

《初等数学复习及研究》

(平面几何)

学习参考资料

第二分册

邯郸地区教师进修学校

保定地区教师进修学校

说 明

继《初等数学复习及研究》（平面几何）学习参考资料第一分册，我们又编写了主要内容为第三、四、五章有关证明、轨迹和作图的参考资料。其中增加了一些集合的初步知识，供师专函授学员学习参考。

这本《学习参考资料》是由邯郸地区教师进修学校雷国铭、梁美玲和保定地区教师进修学校王爱俊、王德如、李子年几位同志负责编写的。另外，邯郸地区武安进修学校的蔡则会老师也参加了第五章的编写工作。

由于时间仓促，水平所限，缺点错误在所难免，望批评指正。

编 者

一九七九年十二月

目 录

第三章 证题术	(1)
---------	-----

第一节 关于几何命题的证明和计算	(2)
------------------	-----

一、证明两线段相等	(2)
-----------	-----

二、证明两角相等	(15)
----------	------

三、线段和角的大小	(27)
-----------	------

四、和差倍分及代数证法	(37)
-------------	------

五、怎样证两条直线互相垂直	(55)
---------------	------

六、关于直线平行的证法	(62)
-------------	------

七、关于共线点的证明	(71)
------------	------

八、关于共点线的证明	(82)
------------	------

九、怎样证共圆点	(87)
----------	------

十、关于共点圆的问题	(95)
------------	------

十一、怎样证平方或积的和差关系	(99)
-----------------	------

十二、如何证明面积相等或和差， 或比较大小等问题	(104)
-----------------------------	-------

第二节 关于辅助线	(116)
-----------	-------

第四章 轨 迹	(126)
---------	-------

第一节 集合初步介绍	(126)
------------	-------

一、集合的概念	(126)
---------	-------

二、集合的表示法	(128)
----------	-------

三、集合之间的相等与包含关系	(130)
四、等价集合与可数集	(132)
五、集合的运算	(133)
六、集合运算的性质	(138)
七、一些传统数字内容的集合解释	(141)
第二节 轨迹的概念	(144)
一、意义	(144)
二、轨迹的基本属性	(144)
三、轨迹命题的证明	(145)
四、轨迹命题的类型	(146)
五、基本轨迹命题	(146)
第三节 解法范例	(153)
一、第一类型命题	(153)
二、第二类型命题	(158)
三、第三类型命题	(161)
第四节 与圆几何学相关的轨迹	(166)
一、点对于圆周的幂	(166)
二、等幂轴	(168)
三、等幂心	(171)
第五章 作 图	(173)
第一节 基本知识	(173)
一、作图题的意义	(173)
二、尺规作圆公法	(174)

三、作图成法·····	(175)
四、解作图题的步骤·····	(193)
第二节 常用的作图方法	
一、轨迹相交法·····	(196)
二、游移切线法·····	(200)
三、三角形奠基法·····	(203)
第三节 代数在几何上的应用	
一、几何线段关系式的齐次式·····	(206)
二、一次式的作图·····	(207)
三、二次方程的根的作图·····	(208)
四、代数分析法·····	(209)
第四节 尺规作图不能问题	
一、尺规作图不能性的准则·····	(211)
二、方程的根与系式间的关系·····	(212)
三、三次方程的根·····	(212)
四、几何三大问题·····	(213)
五、作图不能的间接判断法·····	(217)

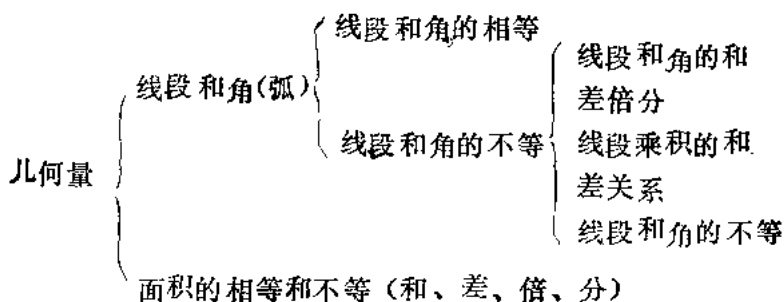
第三章 证 题 术

对证题术应有的认识：证明几何题首先应该仔细审题，明确题设，题断，绘出正确图形，再有条不紊地去思考解决这一问题的途径。但是怎样才能使自己的思维符合规律而不是胡思乱想的呢？证题术在这方面提供了可能性。

证题术把几何命题按照一定的规律分成若干类（相等、不等、垂直平行……）分别指出该类问题的思路，这就清楚地显示出来证题术在证题中所起的作用。当然证题术绝不是什么“法术”好象学了证题术就对一切难题都能顺利解决似的。实则证题术仅给了我们在思考问题时的理路，真正解决问题还靠自己反复的思考，另外证题的顺利与否还和以前证题经验的多少有直接关系，所以掌握了证题术只是在一定程度上提高了证题的能力，真正彻底的提高，还在于我们熟练运用证题术去多作练习。

证题术的分类标准：我们知道几何学是系统地研究几何图形（初等的限于直线形和圆）性质（位置大小，形状）的科学，而每一个证明题都不外是要证在某种条件（题设）下的某种图形有什么性质（题断）。我们可把几何命题（证明题）按下列方法分成两大类：

一、研究几何量的大小：



二、研究几何量的相互位置:

1、直线和直线的位置关系 { 垂直
平行

2、点和直线的位置 { 共点线
共线点

3、点和圆的位置 { 共点圆
共圆点

4、直线和圆的位置 { 二个公共点
一个公共点
无公共点

5、圆和圆的相互位置 { 外离
外切
相交
内切
内含
同心圆

第一节、关于几何命题的证明和计算

一、证明两线段相等，主要有以下诸方法：

1、证明它们为全等形(多是三角形)的对应线段。

如无现成的全等形可添辅助线造成之。

关于两个三角形的全等可根据全等的五个判定定理证明之，再利用其为对应边（等角的对边）相等，得出二线段相等的结论。

另外由于二全等形的对应线段（对应边上的高、中线、分角线等等）相等，亦可证明二线段相等。

2、同一三角形中两等角的对边。

3、证明它们为平行四边形的一双对边。另外还可利用平行四边形的对角线互相平分的性质证明二线段相等。

4、证明它们为矩形的对角线。

5、证明它们为等腰梯形的对角线。

6、利用中垂线的性质：线段中垂线上的点到两端等距离。

8、利用斜线定理：由一直线外的一点到这条直线的垂线及诸斜线，斜线足与垂线足等距离者（或斜线与垂线夹等角者）斜线便等长。

9、证明它们同等于另一线段或分别等于某二相等的线段。

10、过三角形一边中点且平行于第三边的直线分第二边为两等分。

11、两前项（或两后项）相等的比例式中的两后项（或两前项）相等。

12、证明二线段比值为1。

13、证明它们为同底（或等底）两等积三角形的高或等高积三角形的底。

14、如两线段为同圆或等圆内两线段可证明它们为：
(1)两半径或两直径。

- (2) 等弧所对的弦。
 (3) 等圆周(心)角所对的弦。
 (4) 与圆心等距离的二弦。
 (5) 从圆外一点至圆所引二切线。

15、利用两圆公共弦定理：即连心线平分公共弦。

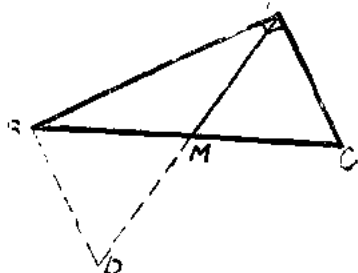
16、利用垂径平分弦定理：由圆心引弦的垂线必平分这个弦。

17、利用等腰三角形的性质。

现举例说明如下：

例1、证明直角三角形斜边中点与三顶点等距离。

《注》本例应用极广宜熟记。



已知 M 为 $Rt\triangle ABC$
斜边 BC 的中点

求证 $MA = MB = MC$

证法1 见图 $\because M$ 是 BC 的中点
 $\therefore BM = MC$

延长 AM 至 D 使 $MD = AM$ 连 BD

$\angle BMD = \angle CMA$ (对顶角相等)

$\therefore \triangle BMD \cong \triangle AMC \therefore AC = BD \quad \angle CAM = \angle D$

$\therefore AC \parallel BD$

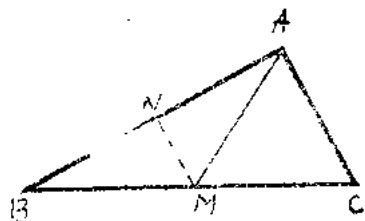
又 $\because CA \perp AB \therefore BD \perp AB$

$\therefore Rt\triangle ABD \cong Rt\triangle BAC \therefore AD = BC$

$\therefore \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$

即 $AM = BM = CM$ 。

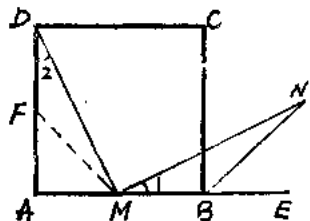
证法2 (见图) 引 $MN \perp AB$ 连 AM



$\because AC \perp AB$
 $\therefore MN \parallel AC$ $\because M$ 是 BC 的中点 $\therefore N$ 亦为 AB 的中点 即 MN 为 AB 的中垂线

$$\therefore AM = BM = CM$$

例2 (如图) 在正方形 $ABCD$ 中 M 是 AB 的中点



$MN \perp MD$ BN 平分 $\angle CBE$
 则 $MD = MN$

已知 } 从略
 求证 }

证明 取 AD 的中点 F 连 FM

$\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 1$ 和 $\angle 2$ 均为 $\angle AMD$ 的余角)

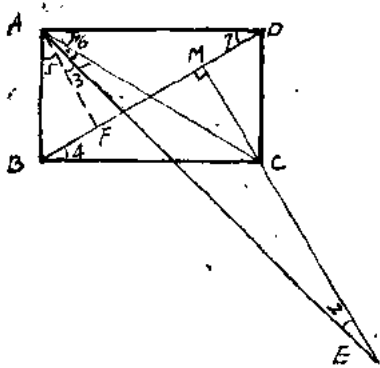
又 $\because AB = AD$ $BM = DF$ 亦即 $AM = AF$

$\therefore \triangle AMF$ 为等腰直角三角形 $\therefore \angle MFD = 135^\circ$

又 BN 为 $\angle CBE$ 的分角线 $\therefore \angle MBN = 135^\circ$

$\therefore \triangle MBN \cong \triangle DFM$ $\therefore MD = MN$

例3 自矩形 $ABCD$ 的顶点 C 作对角线 BD 的垂线延长交 $\angle A$ 的平分线于 E 点, 则 $AC = EC$



已知 } 从略
求证 }

[思考] 要想证明 $AC = CE$ 需设法证明 $\angle 1 = \angle 2$

由于 AF 和 EM 均垂直于 BD 故 $AF \parallel EM$
 $\therefore \angle 3 = \angle 2$ 若能证明 $\angle 1 = \angle 3$ 即可

又 $\because AE$ 为 $\angle A$ 的分角线, 若能证 $\angle 5 = \angle 6$ 即可

证明 (见图) 作 $AF \perp BD \because CM \perp BD$
 $\therefore AF \parallel CE \therefore \angle 3 = \angle 2$ (内错角相等)

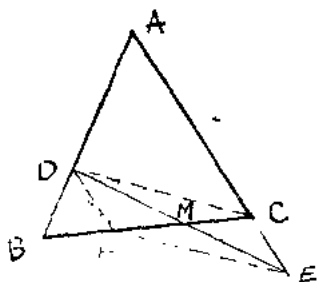
又 $\because AE$ 是 $\angle A$ 的分角线 $\therefore \angle BAE = \angle DAE$

从图中可知 $\angle 4 = \angle 5$ 又 $\angle 4 = \angle 7$ $\angle 6 = \angle 7$

$\therefore \angle 5 = \angle 6 \therefore \angle 1 = \angle 3 \therefore \angle 1 = \angle 2$

$\therefore AC = CE$ 。

例 4 于等腰 $\triangle ABC$ 的一腰 AB 上取一点 D , 再在他腰 AC 的延长线上取一点 E , 令 $BD = CE$. 则 DE 必被底边 BC 平分。



已知 D 为等腰 $\triangle ABC$ AB 边上的一点, E 为 AC 延长线上的一点且 $BD = CE$
 又 DE 交 BC 于 M

求证 $DM = EM$

[思考] 作 $DF \parallel AC$, 设法证明 $CD \parallel FE$ 为一平行

边形，若能证明 $DF = CE$ 即可得以上结论。

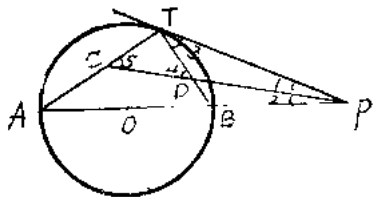
要证 $DF = CE$ ，只要证 $DF = BD$ 。即证 $\angle B = \angle DFB$ 即可。由作图可知 $\angle ACB = \angle DFB$ (同位角相等)

又 $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形 $\therefore \angle B = \angle ACB$
 $\therefore \angle DFB = \angle B \therefore DF = BD = CE$ ，于是得出 $CD FE$ 为一平行四边形。

再由对角线互相平分 得出 $DM = EM$

证明 (见上图) 作 $DF \parallel AC \therefore \angle ACB = \angle DFB$
 $\because \triangle ABC$ 为一等腰三角形 $\therefore \angle B = \angle ACB$
 $\therefore \angle B = \angle DFB \therefore DF = BD = CE$
 $\therefore CD FE$ 为一平行四边形。
 $\therefore DM = EM$ (平行四边形的对角线互相平分)。

例 5 如果在直径 AB 的延长线上任取一点 P ，从 P 向圆引切线切点为 T ， $\angle APT$ 的平分线交 AT 于 G ，交 BT 于 D 则 $TC = TD$



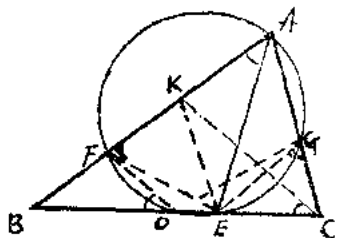
已知 } 从略
 求证 }

证明 (见图) $\because CP$ 是 $\angle APT$ 的分角线
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ 又 $\because PT$ 是 $\odot O$ 的切线， T 为切点
 $\therefore \angle 3 = \angle A$ (弦切角等于同弧上的圆周角)
 据三角形的外角定理知 $\angle 4 = \angle 3 + \angle 1$
 $\angle 5 = \angle A + \angle 2 \therefore \angle 4 = \angle 5$
 $\therefore TC = TD$ (在同一三角形中等角的对边相等)。

例6 在 $\triangle ABC$ 中 D 为 BC 的中点, AE 为 $\angle A$ 的平分线交 BC 于 E . $\odot ADE$ 交 AB 、 AC 于 F 、 G

求证 $BF = CG$

已知 }
求证 } 从略



证法1 (见图) $\because AE$ 是 $\angle A$ 的平分线

$\therefore \angle BAE = \angle CAE \quad \therefore \widehat{FE} = \widehat{EG}$, 连 FE 和 EG
 $\therefore FE = EG$ (等弧对等弦) $\therefore \angle EGC = \angle AFE$ (圆内接四边形的
 外角等于内对角) 再在 BA 上截取 $FK = BF$ 连 FD 、
 CK , 则 FD 是 $\triangle BCK$ 的中位线 $\therefore DF \parallel CK$,
 $\therefore \angle BDF = \angle BCK$ 而 $\angle BDF = \angle BAE$ (外角等于内对
 角)。 $\therefore \angle BCK = \angle KAE \therefore A, K, E, C$, 四点共圆
 $\therefore \angle FKE = \angle ECG \quad \therefore \triangle FEK \cong \triangle GEC$
 $\therefore CG = FK = BF$ 。

证法2 (见上图) 由 A, F, D, G 为圆内接四边形

$$\therefore \angle AFD + \angle AGD = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BFD + \angle DGC = 180^\circ$$

据已知 $BD = DC$ 令 $\triangle DGC$ 绕 D 点依顺时针方向
 旋转, 使 C 点与 B 点重合 则 $BFDG$ 构成一四边形

$\therefore$ 对角互补 $\therefore B, F, D, G$ 四点共圆

从而可知 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDG$ 的外接圆相等

但 A, F, D, E 为圆内接四边形

$$\therefore \angle BDF = \angle FAE = \angle EAG = \angle EDG = \angle CDG$$

$\therefore BF = CG$ (在等圆中等圆周角对等弦)。

证法 3 (见下图) 连结 GD 并延长到 H 使 $DH = DG$

连 BH 由于 D 为 BC 的中点

$$\therefore \triangle BDH \cong \triangle GDC$$

$$\therefore BH = CG$$

$$\therefore \angle H = \angle CGD = \angle AFD$$

$\therefore B, H, D, F$ 四点共圆

$$\text{又} \because \angle FDB = \angle FAE$$

$$\angle C = \angle EAG = \angle BDH$$

$$\therefore BF = BH = CG。$$

证法 4 (见证法 1 图) 由割线定理知:

$$BF \cdot BA = BD \cdot BE \dots\dots\dots (1)$$

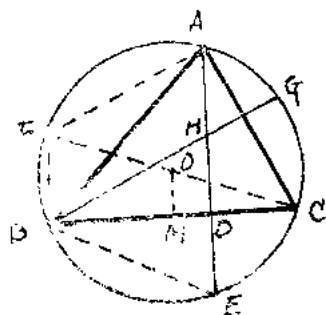
$$CG \cdot CA = CE \cdot CD \dots\dots\dots (2)$$

(1) 得: $\frac{BF}{CG} \cdot \frac{BA}{CA} = \frac{BE}{CE}$ (其中 $BD = DC$)

再据分角线定理 有: $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$ 代入上式

得 $\frac{BF}{CG} = 1 \quad \therefore BF = CG。$

例 7 三角形的垂心到高线 (延长线) 与外接圆交点间的线段被垂直此线的一边所平分。



已知 H 为 $\triangle ABE$ 的垂心,
 AD 为 BC 边上的高, 延长 AD 与外接圆相交于 E , O 为外心

求证 $HD = DE$

证法2 (见图) $\because$ H为 $\triangle ABC$ 的垂心

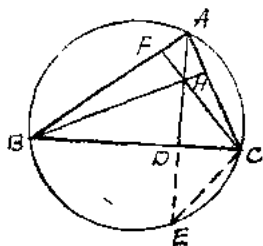
$CF \perp AB$ $AD \perp BC$

$\therefore \angle FCB = 90^\circ - \angle B$

连CE $\angle DCE = 90^\circ - \angle E$

$\because$ A、B、F、C共圆

$\therefore \angle B = \angle E \quad \therefore \angle FCB$
 $= \angle DCE$ (等角的余角相等)



在 $\triangle CHE$ 中 CD 为顶角 $\angle HCE$ 的平分线
 且 $CD \perp HE$ ($\because AD \perp BC$)

$\therefore CD$ 必平分底边 HE

$\therefore HD = DE$

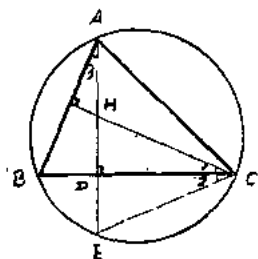
证法3 (见图) $\angle 1 = \angle 3$ (等角的余角相等)

$\angle 2 = \angle 3$ (同弧上的圆周角相等)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ CD 为公用边

$\therefore \text{Rt}\triangle CHD \cong \text{Rt}\triangle CED$

$\therefore HD = DE$



例8 在直角三角形 ABC 的两直角边 AB 、 AC 上向

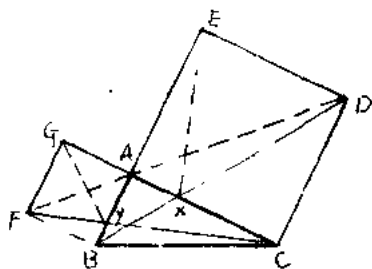
形外作正方形 $ABFG$ 和

$ACDE$ 而 BD 、 CF 各

与 AC 、 AB 交于 X 、 Y 点

求证 $AX = AY$

(利用等底、等积两三角形
等高证明之)



(图3.14)

证明 (见上图) 连 GY 、 EX 和 BD 、 AE (显然为一
 线) $\therefore S_{\triangle EAM} = S_{\triangle DAX}$

$$\therefore S_{\triangle EBM} = S_{\triangle DBA}$$

同样 $S_{\triangle GAY} = S_{\triangle FAY}$

$$\therefore S_{\triangle GGY} = S_{\triangle FGA}$$

$$\therefore S_{\triangle DAX} = S_{\triangle ABC} \text{ (同底等高两三角形等积)}$$

同理 $S_{\triangle FAY} = S_{\triangle ABC}$

$$\therefore S_{\triangle DAX} = S_{\triangle FAY}$$

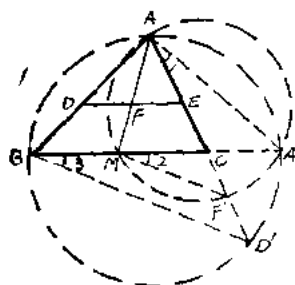
$$\therefore S_{\triangle EBM} = S_{\triangle GGY}$$

$$\therefore AB = AG \quad AE = AC \quad \therefore EB = CG$$

$$\therefore AX = AY \text{ (等底等积两三角形高相等)}.$$

例 9 在三角形内作任何平行于底边的直线其夹于两腰

间的线段必被底边上的中线所
 平分。



AM 为 $\triangle ABC$, BC

已知 边上的中线, $DE \parallel BC$,

DE 分别交 AB 、 AM 、

AC 于 D 、 F 、 E 。

求证 $DF = FE$

(利用圆的有关定理证明之)

证法 1 (见图) $\therefore BE \parallel BC$

$\therefore \angle DEA = \angle BCA$ 延长 BC 至 A' 使

$CA' = EA$ 再延长 AC 至 F' 又至 D' 使 $CF' = EF$,

$F'D' = FD$ 则 $\triangle A'CF' \cong \triangle AEF$, 和

$\triangle A'CD' \cong \triangle AED$ (S, a, S)