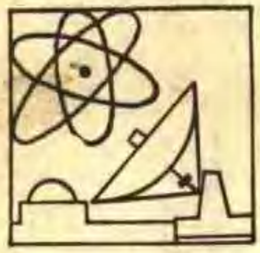
理论力学习题解析指导

孙建华 等编译

下册

西安陆军学院



封面设计：孙 建 华

下册.4.00

理论力学习题解析指导

编译者：孙 建 华 等

出版者：西安陆军学院

印刷者：西北工业大学出版社印刷厂

前　言

《理论力学题解析指导》是在日文《力学演习》（山内恭彦、末岡清市编）的基础上编译而成。

本书以习题演解分析指导为主，每节首先简要介绍有关内容的基本概念，主要的定律和公式，然后用较大的篇幅选择有代表性的习题进行分析讨论，纵横联系，交叉贯穿，开拓解题思路，以加深对基本概念和基本知识的理解和认识。习题按难易程度分A、B、C三类（基本题、引深题、创造题），读者可先易后难，逐步探求。

全书内容翔实，叙述简洁，例题分析详尽，启发讨论创新。读者经过阅读内容演解习题后，可提高解题能力，熟练运算技巧，牢固地掌握基本知识，达到举一反三的效能。但日文教材与英文教材一样，简洁明快，实用性强，但不如苏联教材逻辑推理严密，论证充分，说明透彻。望读者在使用本书过程中注意充实完善，补填不足，摒弃谬误，发展提高。

该书初稿由孙建华、任新民、郭运昌、左 宁等同志编译，蔡泰信副教授初审。最后由孙建华重新编译定稿。在本书的编译过程中，梁子俊、杨海三、孙庭立、张继岐等同志也作了大量的工作，谨此表示诚挚的谢意。由于时间仓促，编译者水平有限，错误在所难免，恳望读者批评指正。

Ⅱ　质点系和刚体力学

第六章　质点系力学基础

基本概念

§1　运动方程　设有n个质点的质点系，其系内各质点的质量及位矢分别为m_i、r_i（$i=1,2,\cdots,n$）。各质点的运动方程为

$$m\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=\vec{F}_i+\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(6\cdot1)$$

考虑第i个质点，$\vec{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$；$\vec{F}_i=(X_i,Y_i,Z_i)$，则有

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=X_i+\sum_{j=1}^{n}X_{ij},$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=Y_i+\sum_{j=1}^{n}Y_{ij},$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=Z_i+\sum_{j=1}^{n}Z_{ij}.$$

式中的$\vec{F}_i$是质点系外作用于第i个质点的外力，$\vec{F}_{ij}$是质点系内质点i、j间的相互作用力（内力）。

§2　作用与反作用定律　第二章所述的牛顿第三定律，对于描述上述运动方程式中的内力的性质非常重要，即质点系内第j个

质点的力$\vec{F}_{ij}$与第i个质点作用于第j个质点的力$\vec{F}_{ji}$之间是作用力和反作用力的性质，则有：

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}\ ,\quad \vec{F}_{ij} /\!/ (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

$$(\text{或}\ \vec{F}_{ij} /\!/ \vec{r}_{ij}) \tag{6.2}$$

即$\vec{F}_{ij}$沿着联结i、j质点的方向，$\vec{F}_{ji}$与其绝对值大小相等、方向相反，其分量之间的关系有

$$X_{ji} = -X_{ij}\ ,$$

$$Y_{ij} = -Y_{ji}\ ,$$

$$Z_{ij} = -Z_{ji}\ .$$

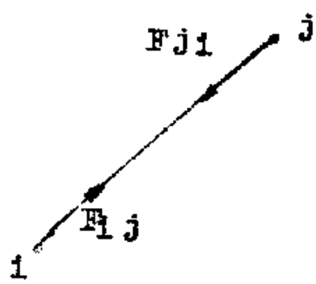


图6—1

也可以写成：

$$\frac{X_{ij}}{x_j - x_i} = \frac{Y_{ij}}{y_j - y_i} = \frac{Z_{ij}}{z_j - z_i}$$

§3　质心坐标系　考查质点系运动最合适最方便的坐标系是质心坐标系，质心坐标为

$$\vec{r}_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i / M\ ,\qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{6.3}$$

式中M为质点系的总质量。

相对于质心的相对坐标，有

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.4}$$

或者 $x_i'=x_i-x_0$，$y_i'=y_i-y_0$，$z_i'=z_i-z_0$.

对于质心而言，其相对坐标，有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i{}'=0 \text{，或} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i{}'=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i{}'=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i{}'=0$$

亦即 $$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i{}'=\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i-\vec{r}_0)=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i-M\vec{r}_0=0$$

§ 4 动量 将质点系内各质点的动量 $\vec{P}_i=m_i\vec{v}_i=m_i\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$

求其总和

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{n} m\frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad (6\cdot6)$$

即为质点系的动量。其分量为

$$P_x=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dx_i}{dt}, \qquad P_y=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dy_i}{dt},$$

$$P_z=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dz_i}{dt}.$$

由（6·6）和（6·3）可得

$$\vec{P}=M\frac{d\vec{r}_0}{dt} \qquad (6\cdot7)$$

由（6·1）和（6·7）可得

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=M\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dp_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i+\sum_{i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ij}$$

由（6·2）式知，$\sum_{i\neq j}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ij}=0$，故上式为

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i} \qquad (6\cdot8)$$

其分量为

$$\frac{dP_x}{dt}=M\frac{d^2x_0}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad \frac{dP_y}{dt}=M\frac{d^2y_0}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}Y_i,$$

$$\frac{dP_z}{dt}=M\frac{d^2z_0}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}Z_i\ .$$

由（6·8）式可以确定质心的运动，且质心的运动仅与系统的外力有关，而与系统的内力无关。

对于无外力作用的封闭质点系，由于$\vec{F}_i=0$，$\vec{P}$=常量，则此系统动量守恒，其质心的速度为一常量。

对于将质心作为原点的相对坐标系而言，其动量为：

$$\vec{P}_i{}'=m_i\frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}=\vec{P}_i-m_i\frac{d\vec{r}_c}{dt} \qquad (6\cdot9)$$

§5　动量矩　质点系内第i个质点绕坐标系原点转动的动量矩$\vec{\ell}_i$为

$$\vec{\ell}_i=\vec{r}_i\times\vec{P}_i=\vec{r}_i\times m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad (6\cdot10)$$

对整个质点系的所有质点求和，就得到质点系的动量矩$\vec{L}$

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\ell}_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i\times\frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad (6\cdot11)$$

其分量为

$$L_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right),$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right),$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right).$$

对于质心坐标系，则有

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}', \qquad \vec{L}_0 = \vec{r}_0 \times M \frac{d\vec{r}_0}{dt},$$

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \times \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \tag{6·12}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i') \times \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \right)$$

$$= M\vec{r}_0 \times \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{r}_0 \times \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \times \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \times \frac{d\vec{r}_i'}{dt}$$

由（6·5）式知，上式中的第2、3项为0，其次，将（6·11）式对时间求导，有

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

上式中第2项为0，将(6·1)式代入上式第1项有

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}^{n}\vec{F}_{ij})=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}$$

在这里，由于 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}=\sum_{i<j}^{n}\{\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{F}_{ji}\}$

$$=\sum_{i<j}^{n}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}=0$$

于是，有

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}\quad,\vec{N}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i\qquad(6\cdot13)$$

上式为动量矩对时间的变化率的方程式，$\vec{N}$ 是外力对原点的矩·其投影式为

$$\frac{dL_x}{dt}=N_x\ ,\quad\frac{dL_y}{dt}=N_y\ ,\quad\frac{dL_z}{dt}=N_z$$

式中 $N_x=\sum_{i=1}^{n}(y_iZ_i-z_iY_i)$，$N_y=\sum_{i=1}^{n}(z_iX_i-x_iZ_i)$

$$N_z=\sum_{i=1}^{n}(x_iY_i-y_iX_i)\cdot$$

特别是对于 $\vec{F}_i=0$，$\vec{L}=$ 常量，即动量矩守恒·

对于质心坐标系，有

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\vec{N}_0 \quad , \qquad \vec{N}_0=\vec{r}_0\times\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt}=\vec{N}' \quad , \qquad \vec{N}'=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times\vec{F}_i \qquad (6\cdot14)$$

§6　动能　质点系的动能定义为

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 . \qquad (6\cdot15)$$

动能积分，为

$$[T]_{t_0}^{t}=T-T_0=\int_{t_0}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i}F_{ij}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)\right\}dt$$

(6·16)

位能由质点的相互位置决定，是质点的位置函数，有

$$\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}=-\mathrm{grad}_i V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n)$$

或者，$\sum_{j\neq i}X_{ij}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}$　　$\sum_{j\neq i}Y_{ij}=-\frac{\partial V}{\partial y_i}$

$$\sum_{j\neq i}Z_{ij}=-\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

则有　　$E=T+V$

$$[E]_{t_0}^{t}=E-E_0=\int_{t_0}^{t}\sum^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}\,dt \qquad (6\cdot17)$$

对于外力，有

$$\vec{F}_i=-\mathrm{grad}_i U$$

或者 $X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$ ，$Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$ ，$Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}$ 。

其中 $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n)$。当 $E+U=$常量时，机械能守恒。

§7 变质量物体的运动 这里考虑的是质量随时间而变化的物体的运动。例如飞行火箭喷出气体的运动，在饱和水蒸汽中落下雨滴的运动等都是变质量物体的运动。实际上，对于质点系或其质点系中的一部分质量随时间 t 增加或减少的问题，其运动方程式推导如下：

（a） 飞行火箭质量减少的情况 设在某瞬时 t，物体的质量为 $m(t)$，速度为 $v(t)$，dt 时间内喷出质量 dm 的速度为 v'，其动量为

$$P_t = mv$$

$t+dt$ 时刻系统的动量，除 $(m+dm)(v+dv)$ 外，还有质量 $-dm$ 具有速度 v' 的动量，故

$$P_{t+dt} = (m+dm)(v+dv) - v'dm$$

由于动量的变化与作用于该系统的外力的冲量 Fdt 相等，两端同除以 dt，取 $dt \to 0$ 时的极限，有

$$\frac{d(mv)}{dt} - \frac{dm}{dt}v' = F$$

或者

$$m\frac{dv}{dt}=F+\frac{dm}{dt}(v'-v) \qquad (6\cdot19)$$

（b） 降落雨滴质量增加的情况　若时刻t仅有质量dm以速度v'附加在雨滴上，则有

$$P_t=mv+dmv', \qquad P_{t+dt}=(m+dm)(v+dv)$$

故可得到与（a）式相同的运动方程式。

例题分析

〔1〕 质量为m_1和m_2的两个质点系在一根无重的细绳的两端，该细绳跨置在一个光滑的滑轮上，如图所示。试求各质点及系统质心的加速度。设滑轮的半径为a。

〔解〕 此装置叫阿德伍德机构。取坐标系oxy如图所示，

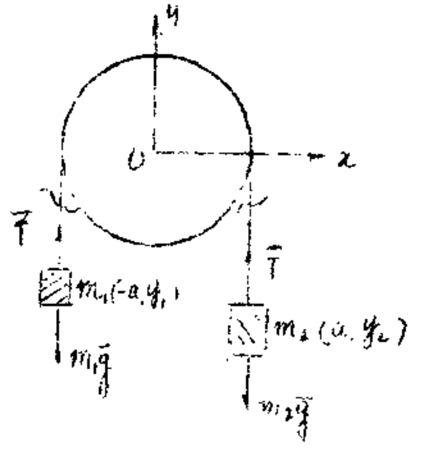


图6－2

m_1、m_2的坐标分别为$(-a, y_1)$，(a, y_2)；该质点系在铅直平面内运动。由于无重细绳放置在光滑的滑轮上，绳内各部分的张力T大小相等。对于质点m_1而言，一方面受有铅直向下的重力m_1g，另方面受有铅直向上的绳的张力T。质点m_2，亦然。故各质点在铅直方向上的

运动方程为

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}&=T-m_1g \\ m_1\frac{d^2y_2}{dt^2}&=T-m_2g \end{aligned}\right\} \qquad (6\cdot20)$$

这里，由于m_1、m_2用不可伸长的细绳联系在一起，故

$$y_1+y_2=\text{常数} \qquad (6\cdot21)$$

将（6•21）式对时间t求二阶导数，代入（6•20）式，有

$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g \qquad (6\cdot22)$$

从而有 $$\frac{d^2y_1}{dt^2}=-\frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g \qquad (6\cdot23)$$

这样就求出了各点的加速度。

其次令质点系质心的坐标为x_0、y_0，有

$$x_0=\frac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2}a, \quad y_0=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

质心的加速度为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g-\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g$$

$$=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2g$$

由于上述机构作匀加速运动，故其解答是比较容易的。倘若衬

质点系作为一个整体来考虑，其结果同上。

其动量矩方程式为：

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}\{-am_1\dot{y}_1+am_2\dot{y}_2\}=N=-a(T-m_1g)+a(T-m_2g)$$

〔2〕 在光滑的水平面上有一个质量为M的三棱柱，试求质量为m的质点沿倾角为α三棱柱的光滑斜面滑下的运动。

〔解〕 考虑由三棱柱M与质点m组成的质点系。在质心沿铅垂对称面内取坐标轴x和y，如图所示。m、M的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)。作用于m和M的力有重力 $m\vec{g}$ 和 $M\vec{g}$ 及反力 $\vec{N}$。由于在水平的x轴方向无力作用，故有

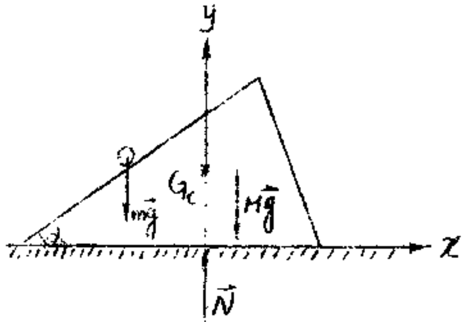


图6－3（a）

$$m\ddot{x}_1+M\ddot{x}_2=0 \tag{6·24}$$

其动量 $m\dot{x}_1+M\dot{x}_2=$ 常量。由于系统初始静止，则有

$m\dot{x}_1+M\dot{x}_2=0$ 。即是 $mx_1+Mx_2=$ 常量。

质点系的质心 G_C 的坐标为

$$x_C=\frac{mx_1+Mx_2}{m+M} \qquad y_C=\frac{my_1+My_2}{m+M}$$

若 $x_0 = 0$，则 y 轴通过质心 G_0，有

$$y_2 = 常数 \quad , \qquad \ddot{y}_2 = 0 \tag{6·25}$$

其次，由于质点 m 沿着斜面运动，则有

$$\frac{\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2}{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2} = \tan\alpha \tag{6·26}$$

设斜面对 m 的法向反力为 $\vec{R}$，则 m 的运动方程为

$$m x_1 = -R\sin\alpha \quad , \quad m y_1 = R\cos\alpha - mg \tag{6·27}$$

将（6·24）、（6·25）、（6·26）、

（6·27）诸式联立求解，得

$$x_2 = -\frac{m}{M}\ddot{x}_1 \,,$$

$$\ddot{y}_1 = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)\tan\alpha$$

$$= x_1 \frac{M+m}{M}\tan\alpha$$

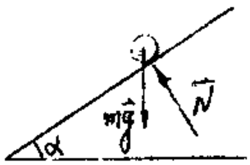


图6—3（b）

将它们代入（6·27）式，得

$$-\frac{R\cos\alpha - mg}{R\sin\alpha} = \frac{M+m}{M}\tan\alpha \;,\quad R = \frac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{M\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g \;,\quad \ddot{y}_1 = -\frac{(M+m)\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g \tag{6·28}$$