第二章　矩阵和矢量（向量）的复习

2—1　引　言

本章的主要目的在于复习一下基本的矢量矩阵分析。

2—1　节主要是介绍矩阵以及有关术语的定义。2—2节将给出一些矩阵运算的规则。2—3节简要的讨论矢量和矢量空间。最后2—4节介绍在矩阵分析中，通常要出现的一些术语的定义。矩阵多项式，凯里—哈米尔顿定理（Cayley Hamgltan）最小多项式，矩阵的指数函数等等的讨论则留待第五章。

现在我们给出一些矩阵和有关术语的定义：

数场。至少含有二个数的集合F称为场，如果a、b是F中的任意二个数，那么a+b，a—b，ab，a／b（其中b≠0）也是F中的数。例如，所有实数的集构成场，同样所有复数的集也构成场。但是整数的集不能构成场，因为a/b（b≠0）可能不是F中的数。同样的正数的集和复数的集二者都不构成场。

在本书中，我们关心的是实数场（所有实数的集）和复数场（所有复数的集）。

矩阵。场F内的矩阵A是F上的一个矩形数组。如果A是在实数场内，则称A为实矩阵。如果A是在复数场上，则称A为复矩阵。

在本书中，我们可以不每次都指出矩阵元素所在的场，但我们将假定这个场是已给定的。

在矩阵中，通常列的数目不一定要等于行的数目。考虑下面的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad (2-1)$$

位于第 i 行和第 j 列的数用 a_{ij} 表示·数 a_{ij} 称为 A 的元素·这个矩阵具有 n 行和 m 列，称之为 n×m 矩阵·第一个下标表示的是行数，第 2 个下标表示的是列数·由方程（2—1）表示的矩阵 A 有时又写作为（a_{ij}），这里我们指出了第（i、j）个元素·而且仅当二个矩阵的对应元素相等时，才称这二个矩阵相等·

矩阵和线性变换有密切的关系·考虑 n 个线性方程组成的方程组：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1m}x_m = z_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2m}x_m = z_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2} + \cdots\cdots\cdots + a_{nm}x_m = z_m$$

这个 n 个方程的方程组对于每一组 m 个变量 x_1，$x_2 \cdots\cdots x_m$ 给定唯一的一组 n 个变量 z_1，$z_2 \cdots\cdots z_n$·这种对应关系称之为由变量组 x_1，$x_2 \cdots\cdots$，x_m 到变量组 z_1，$z_2 \cdots\cdots$，z_n 的线性变换·这个线性变换是是由方程（2—1）所给定的 n m 个系数 a_{ij} 组成的数组表示的·因此 A =（a_{ij}）叫作线性变换矩阵·

方阵·方阵是一种行和列的数目相等的矩阵·这种方阵称为 n 阶矩阵，这里 n 是行或列的数目·它通常称为 n × n 矩阵·

跡·n × n 矩阵 A 的跡定义为：

$$A\text{的跡} = t_r A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

对角矩阵：在主对角线上具有元素 a_{11}，$a_{22} \cdots\cdots$，a_{nn}，而在其

它位置上的元素为零，这样的 n×n 矩阵称为对角矩阵，并可写为：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}=(a_{ij}\delta_{ij})$$

其中 δ_{ij} 是柯络年克 δ 函数，它的定义为：

$$\delta_{ij}=1 \qquad (i=j)$$
$$=0 \qquad (i\neq j)$$

（注意：在矩阵中並没有把为零的项全部写出）对角矩阵也可以表示为：

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots, a_{nn})$$

这种表示法常常扩展到矩阵中。例如，如果：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

则矩阵：

$$\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

可以表示为：

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{或} \quad \mathrm{diag}(A, B)$$

利用垂直和水平虚线将元素区分成子矩阵，这种矩阵称为分块矩阵。后面将对分块矩阵进行详细的讨论。

<u>单位矩阵</u>　单位矩阵是这样一种矩阵，它主对角线上的元素为1，而所有其它的元素为0。

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots\cdots 0\\ 0 & 1 & \cdots\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots 1\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots\cdots,1)$$

单位矩阵 I 有时写作 $I=(\delta_{ij})$，这里 δ_{ij} 柯络年克 δ 函数。如果需要指出单位矩阵的行数（或列数），我们将以相应的行数（或列数）置为下标。例如 $n\times n$ 单位矩阵将表示为 I_n。

对于所有的方阵 A，单位矩阵 I 是可以用关系 $AI=IA=A$ 所唯一确定。因此，如果对于所有的 B 有 $AB=BA$，则 A 是 I 的纯倍数（矩阵和矩阵相乘见2—2节）。

<u>标量矩阵</u>。元素彼此相等的对角矩阵称为标量矩阵。

<u>三角矩阵</u>。主对角线以下（或以上）的元素全为零的矩阵称为三角矩阵。例如：

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}.$$

<u>零矩阵</u>　零矩阵 0 是对于所有的 A 由关系 $A0=0A=0$ 唯一确定的。

<u>转　置</u>　如果 $n\times m$ 矩阵 A 的行和列互换形成 $m\times n$ 矩阵称之为 A 的转置。A 的转置表示为 A'。即，如果 A 表示为：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

则为：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots\cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m}\cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

注意（A'）'＝A・我们很容易证明如果A＋B和AB是有定义的（见2—2节）则：

$$(A+B)'=A'+B'，(AB)'=B'A'$$

<u>共轭矩阵</u>　矩阵A的共轭矩阵是这样一个矩阵，它的每一个元素都是A的相应元素的共轭复数表示为$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$，这里$\overline{a_{ij}}$是$a_{ij}$的共轭复数・例如，如果A给定为：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+j & -3-3j & -1+4j \\ -1+j & -1 & -2+3j \end{bmatrix} \qquad (2-2)$$

则：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-j & -3+3j & -1-4j \\ -1-j & -1 & -2-3j \end{bmatrix}$$

<u>共轭转置</u>　共轭转置是矩阵的转置的共轭・给定矩阵$A=(a_{ij})$共轭转置表示为$\overline{A'}$或A^*，即：

$$\overline{A'}=A^*=(\overline{a_{ij}})'$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例如，如果A是由公式（2—2）给定，则：

$$\bar{A}'=A^*=\begin{bmatrix} 0 & -1-j & -1-j \\ 1 & -3+3j & -1 \\ 0 & -4-4j & -2-3j \end{bmatrix}$$

显然的，A'的共轭与A的转置是相同的。注意：$(A^*)^*=A$。我们容易证明，如果$A+B$和AB是有定义的，则：

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\qquad (AB)^*=B^*A^*$$

还要注意到如果C是复数，则：

$$(CA)^*=\bar{C}A^*$$

如果A是实数矩阵（这个矩阵的全部元素为实数），那么共轭转置A^*与转置A'相同。

m行子式。从n行的行列式中消除n—m行和n—m列可以得到一个m行的行列式，称之为m行子式。

子式M_{ij}　我们使用M_{ij}来表示从n行的行列中消除第i行和第j列所得到的（n—1）行的行列式。

主子式　如果子式的对角线元素也是行列式的对角线元素，则称这个行列式的子式为主子式。

余因子Δ_{ij}　余因子Δ_{ij}的定义为：$\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。余因子$\Delta_{ij}$是A的行列式$|A|$按子式展开式中$a_{ij}$项的系数，或：

$$a_{i1}\Delta_{i1}+a_{i2}\Delta_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}\Delta_{in}=|A|$$

在本书中，我们规定A的行列式用$|A|$或$\det A$表示。如果用$a_{j1}, a_{j2},\cdots\cdots, a_{jn}$代替$a_{i1}, a_{i2},\cdots\cdots, a_{in}$，那么

$$a_{j1}\Delta_{i1}+a_{j2}\Delta_{i2}+\cdots\cdots+a_{jn}\Delta_{jn}=0\ (i\neq j)$$

这是因为A可以认为是拥有二个相同的行。因此，我们可得：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{jk}=\delta_{ji}|A| \qquad (2—3)$$

类似的有：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\Delta_{kj}=\delta_{ij}|A| \qquad (2—4)$$

方阵的伴随矩阵　方阵A的伴随矩阵等于利用A的余因子代替A的每个元素所得矩阵的转置。即，方阵A的伴随矩阵为一矩阵 $B=(B_{ij})$，其中 $b_{ij}=\Delta_{ji}$。方阵A的伴随矩阵写作 $\mathrm{adj}A$。乘积 $A(\mathrm{adj}A)$ 的第j行第i列上的元素为：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\Delta_{ik}=\delta_{ji}|A|$$

因此 $A(\mathrm{adj}A)$ 为一对角线元素等于 $|A|$ 的对角线矩阵，于是有 $A(\mathrm{adj}A)=|A|I$。同样的，乘积 $(\mathrm{adj}A)A$ 的第j行第i列上的元素为：

$$\sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}a_{ki}=\delta_{ij}|A|$$

因此我们有关系式

$$A(\mathrm{adj}A)=(\mathrm{adj}A)A=|A|I \qquad (2—5)$$

例如，给定矩阵A

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

可求得 $\mathrm{adj}A$ 为：

$$
\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}
\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}\\
\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}\\
\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}3 & 6 & -4\\ 7 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -7\end{bmatrix}
$$

和

$$
A(\operatorname{adj}A)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6 & -4\\ 7 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -7\end{bmatrix}=17\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

<u>非奇异（非退化）矩阵和奇异（退化）矩阵</u>·如果存在一个矩阵 B 使得 $BA=AB=I$，则称方阵 A 为非奇异的（非退化的）·如果存在这这样的矩阵 B，那么它可以表示为 A^{-1}· A^{-1}称为 A 的逆矩阵·如果 $|A|$是非零的，则逆阵 A^{-1}存在·如果 A^{-1}不存在，则称 A 是奇异的（退化的）·

<u>逆矩阵</u>·对于非奇异矩阵 A，存在着一个逆矩阵 A^{-1}，它具有特性 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$，其中 I 是单位矩阵·因此有 $(A^{-1})^{-1}=A$·如果 $AB=C$，那么 $A^{-1}AB=IB=B=A^{-1}C$·如果 A 和 B 都是非奇异矩阵，则乘积 AB 也是非奇异矩阵·此外，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 这一点可以由下式看出：

$$
(B^{-1}A^{-1})AB=B^{-1}(A^{-1}B)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I
$$

同样的我们可以得出：$(AB)(B^{-1}A^{-1})=I$·因此我们证明了：

2—9

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

注意：对于非奇异矩阵A

$$A^{-k}=(AA\cdots\cdots A)^{-1}=A^{-1}A^{-1}\cdots\cdots A^{-1}=(A^{-1})^{k}$$

同样还有：

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

这个关系式可以通过对下式求转置来证明：

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

即：
$$(A^{-1})'A'=A'(A^{-1})'=I'=I$$

因此$(A^{-1})'$是A'的逆矩阵，或：

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

同样的，我们有如下的关系：

$$(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}$$

根据公式（2—5）和逆矩阵的定义，我们有：

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}$$

因此，非奇异矩阵的逆矩阵等于以矩阵的行列式去除余因子所形成矩阵的转置。如果A给定为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

那么

$$A^{-1}=\frac{adjA}{A}=\begin{vmatrix}\frac{\Delta_{11}}{|A|} & \frac{\Delta_{21}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{\Delta n_1}{|A|}\\ \frac{\Delta_{12}}{|A|} & \frac{\Delta_{22}}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{\Delta n_2}{|A|}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\Delta_{1}n}{|A|} & \frac{\Delta_{2}n}{|A|} & \cdots\cdots & \frac{\Delta nn}{|A|}\end{vmatrix}$$

其中Δ_{ij}是矩阵A中a_{ij}的余因子。因此，A^{-1}中第i列的各项是原来矩阵A中第i行各余因子的1/|A|倍。例如，如果A给定为：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

则分别求得|A|和adjA为：

$$|A|=17 \qquad adjA=\begin{bmatrix}3 & 6 & -4\\ 7 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -7\end{bmatrix}$$

因此A的逆矩阵为：

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\begin{bmatrix}\frac{3}{17} & \frac{6}{17} & \frac{4}{17}\\ \frac{4}{17} & \frac{3}{17} & \frac{2}{17}\\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & \frac{7}{17}\end{bmatrix}.$$

下面对于2×2矩阵和3×3矩阵给出其确定逆矩阵的公式。对于2×2矩阵A，其中：

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ ad-bc\neq 0$$

逆矩阵为：

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

对3×3矩阵A，其中：

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},\quad A\neq 0$$

其逆矩阵为：

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

A的逆矩阵也可以利用与此不同的另一种方法求取（另外的方法在5—2节中给出）。

现在我们讨论x_1，x_2，……，x_n的n元联立方程：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\quad&\quad\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}$$

或用向量矩阵方程的形式表示为：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$AX = B$$

求解 X，我们可得：

$$x_1 = c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \cdots\cdots + c_{1n}b_n$$

$$x_2 = c_{21}b + c_{22}b_2 + \cdots\cdots + c_{2n}b_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + \cdots\cdots + c_{nn}b_n$$

或：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots\cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots\cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

上式等价于：

$$X = A^{-1}B$$

因此：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots\cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots\cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

如果不需要通过大量的计算就能够求得以 b_1，b_2，……，b_n表示的 x_1，x_2……，x_n，那么那种方法是实际可行的。

<u>对称矩阵和斜对称矩阵</u>　对称矩阵是这样一种矩阵，它与其转置相等。也就是说，对于对称矩阵A

$$A' = A \qquad 或 \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

如果矩阵A等于其负的转置，即：

$$A' = -A \quad \text{或} \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

则称其为斜对称矩阵。

如果A为任一方阵，则$A + A'$是对称矩阵，而$A - A'$是斜对称矩阵。例如，如果A给定为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

则：

$$A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix} = \text{对称矩阵}$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \text{斜对称矩阵}$$

注意：如果A是长方矩阵，那么$A'A$是对称矩阵。还应指出的是对称矩阵的逆矩阵也是对称的。为了证实这一点，我们取$AA^{-1} = I$的转置。我们有：$(A^{-1})'A' = I' = I$，注意到$A = A'$，则有：$(A^{-1})'A' = (A^{-1})'A = I = A^{-1}A$。因此$A^{-1} = (A^{-1})'$。这样，对称矩阵的逆矩阵也是对称的。

<u>正交矩阵</u>。如果矩阵A是实数矩阵，并且满足关系式$A'A = AA' = I$则称A是正交矩阵（这意味着$|A| = \pm 1$并且A是非奇异的）。在正交矩阵中，逆矩阵完全等于它的转置。

$$A^{-1} = A'$$

正交矩阵的例子有：

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.6 & 0.8 & 0\\ -0.8 & 0.6 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

为了证明它们是正交矩阵，我们来计算A^{-1}和B^{-1}。

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=A',\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}0.6 & -0.8 & 0\\ 0.8 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=B'$$

如果A和B是$n\times n$正交矩阵，那么A^{-1}，A'和AB也是正交矩阵，因此A'是正交的。因为$A^{-1}=A'$，所以A^{-1}也是正交的。因为$B'=B^{-1}$，$A'=A^{-1}$，$(AB)'=B'A'$和$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，我们有$(AB')=(AB)^{-1}$，因此AB是正交的。

埃尔米特矩阵和斜埃尔米特矩阵。矩阵的元素为复数量时，称为复数矩阵。如果复矩阵A满足关系：

$$A^*=A \quad 或 \quad a_{ij}=\overline{a}_{ji}$$

其中$\overline{a}_{ji}$是a_{ji}的复共轭，则称A为埃尔米特矩阵。例如：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4+j3\\ 4-j3 & 2\end{bmatrix}$$

如果埃尔米特矩阵A写为$A=B+jC$，这里B和C是实矩阵，则：

$$B=B',\qquad C=-C'$$

在上面的例中：

$$A=B+jC=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}+j\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}$$

注意，埃米尔特矩阵的逆矩阵也是埃米尔特矩阵，或$A^{-1}=(A^{-1})^*$。

还要指出的是每个方阵都可以唯一的表示为$A=G+jH$，其中G和H是埃米尔特矩阵并且表示为：

$$G=\frac{1}{2}(A+A^*),\qquad H=\frac{1}{2j}(A-A^*)$$

G和H为埃米尔特矩阵这一点可由下面的关系看出：

$$G^*=\frac{1}{2}(A^*+A)=G$$

$$H^*=\frac{-1}{2j}(A^*-A)=H$$

对于n×n埃米尔特矩阵A和B我们很容易证明，矩阵A+B，A－B，AB+BA也是埃米尔特矩阵。因为$AB=A^*B^*=(BA)^*$，所以当且仅当A和B可交换位置乘积AB才是埃米尔特矩阵。埃尔米特矩阵的行列式总是实数，这是因为：

$$|A|=|A^*|=|\bar{A}'|=|\bar{A}|$$

如果矩阵A满足关系，$A^*=-A$，则A称为斜埃尔米特矩阵。例如：

$$A=\begin{vmatrix} j5 & -2+j3 \\ 2+j3 & j \end{vmatrix}$$

如果斜埃尔米特矩阵A写为$A=B+jC$，其中B和C是实矩阵则：

$$B=-B',\qquad C=C'$$

对于上面的例题：

$$A=B+jC=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+j\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

<u>酉矩阵（Unitary matrix）</u> 酉矩阵是一个复数矩阵，它的逆矩阵等于其转置的共轭。即：

$$A^{-1}=A^*\qquad 或\qquad AA^*=A^*A=I$$

酉矩阵的例是：

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}(2+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(3+j)\\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-3+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2-j)\end{bmatrix}$$

为了加以证明，我们计算A^{-1}和A^{*}。因为对于酉矩阵A其A的行列式等于1或$|A|=1$，我们可得：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}(2-j) & -\frac{1}{\sqrt{15}}(3+j)\\ \frac{1}{\sqrt{15}}(3-j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2+j)\end{bmatrix}$$

共轭转置为A^{*}为：

$$A^{*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{15}}(2-j) & -\frac{1}{\sqrt{15}}(3+j)\\ \frac{1}{\sqrt{15}}(3-j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2+j)\end{bmatrix}$$

因此我们证明了$A^{-1}=A^{*}$

正交矩阵满足关系$AA^{*}=A^{*}A=I$；因此它们也是酉矩阵。

注意，如果A是酉矩阵，则逆矩阵A^{-1}也是酉矩阵。为了说明这一点，注意到$AA^{*}=A^{*}A=I$，我们可得：

$$(A^{*})^{-1}A^{-1}=(A^{-1})^{*}(A^{-1})=I$$

$$A^{-1}(A^{*})^{-1}=(A^{-1})(A^{-1})^{*}=I$$

如果$n\times n$矩阵A和B是酉矩阵，那么AB也是酉矩阵。为了证明这一点，注意到$AA^{*}=A^{*}A=I$和$BB^{*}=B^{*}B=I$，我们有：

$$(AB)(AB)^{*}=ABB^{*}A^{*}=AA^{*}=I$$

$$(AB)^{*}(AB)=B^{*}A^{*}AB=B^{*}B=I$$

因此可以看出AB是酉矩阵。

<u>正规矩阵</u>　如果一个矩阵和它的共轭转置是可以交换的，则称此矩阵为正规矩阵。就是说，对于一个正规矩阵A应有：

$$AA^{*}=A^{*}A \quad \text{（设A为复数矩阵）}$$

$$AA'=A'A \quad \text{（设A为实数矩阵）}$$

注意，若A为正规，而U为酉矩阵，则$U^{-1}AU$也是正规的，因为：

$$\begin{aligned}
&(U^{-1}AB)(U^{-1}AU)^{*}\\
&=U^{-1}AUU^{*}A^{*}(U^{-1})^{*}=U^{-1}AA^{*}(U^{-1})^{*}\\
&=U^{*}A^{*}AU=U^{*}A^{*}(U^{-1})^{*}U^{-1}AU\\
&=(U^{-1}AU)^{*}(U^{-1}AU)
\end{aligned}$$

显然，如果一个矩阵是对称的，或是埃尔米特矩阵，或是斜对称矩阵，或是斜埃尔米特矩阵，或是酉矩阵，或是正交矩阵，则该矩阵一定是正规的。

<u>摘要</u>。我们将各种矩阵的定义概括起来列成下表以便查考：

$A'=A$	A为对称矩阵
$A'=-A$	A为斜对称矩阵
$A'A=AA'=I$	A为正交矩阵
$A^{*}=A$	A为埃尔米特矩阵
$A^{*}=-A$	A为斜埃尔米特矩阵
$AA^{*}=A^{*}A=I$	A为酉矩阵
$AA^{*}=A^{*}A$　$AA'=A'A$	A为正规矩阵

2.2　矩阵运算规则

本节先复习一下矩阵的代数运算的一些法则，然后给出矩阵的导数及积分之定义。最后介绍矩阵的微分规则。我们将看到，矩阵代数和普通代数的不同在于矩阵的乘法不服从交换律，以及矩阵的消去是不允许的。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com