或然率教材

或然率目錄

第一章　組合和排列

第二章　二項式定理

第三章　或　然　率

或然率

第一章　組合和排列

一　組合和排列的定義

假定某艦上有紅黃綠白四種不同顏色的信號燈，今同時開兩燈組成一信號，則共可組合成六種信號，就是：

紅黃，紅綠，紅白，黃綠，黃白，綠白。

由幾個不同的物體中，每次取出 r 個作成一組，各組之間至少有一個物體不相同，由此所得的各組便叫做組合所得的組合數，用符號C_n^r表示之。

在上例中 $n=4$ $r=2$ 於是組成的信號數爲※ $C_r^n=C_2^4=6$

上例的四色信號燈，假定每開二燈組成一信號時，同時注意信號燈上下排列的次序，如開紅與黃二信號燈，則成紅上黃下和黃上紅下二種不同的信號，則共可構成12種信號，就是：

紅　黃　紅　綠　紅　白　黃　綠　黃　白　綠　白。

黃，紅，綠，紅，白，紅，綠，黃，白，黃，白，綠。

由 n 個不同的物體中，每次取出 r 個，並依種種不同的順序排成列，這些列便叫做排列。所得的排列數，用符號 A_n^r 表示之，

在上例中 $n=4$ $r=2$ 於是按排列討論，構成的信號數，爲：

$$A_n^r = A_4^2 = 12$$

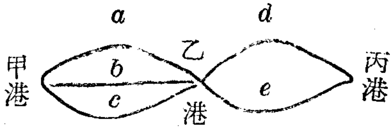
注意：紅黃與黃紅在組合中是一個，而在排列上是二個。

※ C是"*Ccnbination*"的字頭，

A是"*Arrangement*"的字頭，

二 基本原則

假定由甲港到乙港有 a,b,c 三條航線可通航，由乙港到丙港有 d,e 二條航線可通航，則由甲港到丙港可以有 6 條不同的航線可通航，就是：



ad, ae

bd, be

cd, ce

因爲利用甲港到乙港的任一條航線都有 2 條航線到丙港，而甲港到乙港有 3 條航線，所以自甲港往丙港結果就有：

$3\times2=6$ 條航線可通航。

這樣的事例推廣來說，就可以得一普遍的原則。

如做某工作有 m 個方法，完成後繼續接做另一工作有 n 個方法，則完成此兩工作總共有 mn 個方法。

一般來說連續作多件工作，完成各個工作的方法，爲m,n,P……個，則連續完成此多件工作總共有mnP……個方法。

【例如】 用1,2,3,4,5,這五個不同的數字，問可寫成多少個三位數？

【解】 寫一個三位數字，可設想爲連續處理三件工作，第一件工作是寫百位數字，第二件工作是寫十位數字，第三件工作是寫個位數字，我們可以取五個數字中的任何一個寫在百位上，所以處理百位數字有5個方法，剩下4個數字中，可任取一個寫在十位上，所以處理十位數字有4個方法，最後剩下的3個數字中，可任取一個寫在個位上，所以處理個位數字有3個方法，因此連續完成這三件工作一共有5，4，3個方法，也就是說可以寫成60個三位數。

習　題　一

1. 有紅，白，綠，黃，紫五種顏色的信號彈，同時發射2發組成一信號，問可以組成多少種信號？若同時發射3發成一信號，則又可組成幾種信號？（用字排出來）
2. 上題的五色信號彈，假定是每次一先一後發射兩發不同的信號彈，則可以組成多少種信號來？若三發先後發出成一信號，又可以有多少種信號？（用字排出來）
3. 由甲地到乙地有2條路可通，由乙地到丙地有4條路可通，由丙地到丁地有3條路可通，問一人由甲地經乙，丙

到丁地，問共有多少種走法？

4. 由A到B有4條路可通，一人由A到B再折回到A，問共有幾種走法？

5. 用1.2.3.4.5.6.7.8.9.這9個不同的數字，問可以寫成多少個四位數？

三 求排列數的計算

由n個不同的物體中，每次取r個作成的種種排列，其排法可取n個物體中的任一個排在第一位，其餘的$(n-1)$個中的任一個排在第二位，再其餘的$(n-2)$個中的任一個排在第三位，如此推下去一直排到第r位爲止，這同於連續完成r件工作，按上節的基本原則，所得的排列數爲

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots\text{到 } r \text{ 個因式}$$

第r個因式$n-(r-1)$或$n-r+1$，由此得求排列數的公式：

$$\therefore A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

若$r=n$，則因式就有n個，最後一個因式$n-r+1$爲

$n-n+1$即1，由此得求n個不同物體全取的排列數的公式：

※$\therefore P_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1$

此連乘積$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1$謂之$n$階乘，以符號$n!$

P是*Permutation*的字頭，表示取全部時的排列數。或以$\lfloor n$表示之。

【例一】 求A_4^3的值

【解】 $A_4^3=4(4-1)(4-2)=4\cdot 3\cdot 2=24$

【例二】 用4種不同的顏色的信號燈，上下排列，每次開一燈或齊開二燈，三燈，四燈，問共可有多少種信號。

【解】 開一燈有A_4^1種，開2燈有A_4^2種，開3燈有A_4^3種，開4燈有P_4因此組成的信號總數爲：

$$A_4^1+A_4^2+A_4^3+P_4=4+4\cdot3+4\cdot3\cdot2+4\cdot3\cdot2\cdot1$$
$$=4+12+24+24=64$$

答：組成的信號總數爲64種

【例三】 某艦隊有一艘巡洋艦A和4艘驅逐艦B,C,D,E成直線排列，若(1)全取排列，有幾種？(2)隊首一定是一艘巡洋艦的排法，有幾種？(3)巡洋艦不許在中央的排法，有幾種？

【解】 1. 5艘軍艦全取排列的，有

$P_n=P_5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$（種）

2. 只要將巡洋艦拿出等驅逐艦排列成一種時，把巡洋艦放在隊首卽得，所以等於有四艘驅逐艦全取排列一樣。

卽$P_4=4!=4\times3\times2=24$（種）

3. 巡洋艦在中央的排列法等於四驅逐艦排列後，將巡洋艦插入中央卽$P_4=4!$故巡洋艦不許在中央的排列法共有$P_5-P_4=5!-4!=96$（種）

習題二

1. 求下列各排列數之值：

A_5^2， P_4， A_8^5， A_4^3， A_{10}^4

2. 用1,3,5,7,9五個數字可寫成多少個四位數？

3. 兩手持旗打信號，每一隻手臂的位置有上，斜上，橫直，斜下和下五個位置，問共可組成多少種符號？

4. 用紅，黃，藍，白，綠，紫六種信號彈，依序發射2發，可成幾種信號？又依序發射3發，可成幾種信號？

5. 用紅，黃，藍，白，紫五種信號發射1發，或依序發射2發，3發，4發和5發，共成多少種信號？

6. 用0,1,2,3,4這五個數字可寫成多少個三位數？

7. 有不同軍艦7艘排成一行，其中某艦不能排在隊首或隊尾，問共有幾種排列法？

8. 上題中某艦不能排在中央，問共有多少種排列法？

四　求組合數的計算

組合與排列的不同，在於組合不管排列的順序，只限制各組之間不能完全相同。

例如由紅，黃，綠，白四個信號燈，每取三個按上下的次序排列，共有構成24種信號，就是

$A_4^3=4\cdot3\cdot2=24$

紅黃綠	紅黃白	紅綠白	黃綠白
紅綠黃	………	………	………
………	………	………	………
………	………	………	………
六種	六種	六種	六種

若信號的構成只限制每組所含的顏色不能全同，而不管信號燈排列的次序如何，則僅能組成四種信號，就是

$C_4^3=4$　紅黃綠，紅黃白，紅綠白，黃綠白

由於每一組合能變成 P_3 排列，所以 $A_4^3=C_4^3\times P_3=4\times 3!=24$

由上例可知n個不同的物體中取r個的排列等於由n個不同的物體中取r個的組合數乘以r個物體全取的排列數，就是：$A_n^r=C_n^r P_r$由此得求組合數的公式：

$$C_n^r=\frac{A_n^r}{P_r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}\cdots\cdots(1)$$

【例一】 求 C_5^2的值

【解】 $C_5^2=\frac{5(5-1)}{2\cdot1}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=\frac{20}{2}=10$

【例二】 求 C_8^5的值

【解】 $C_8^5=\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=8\cdot7=56$

【例三】 求紅，黃，綠，白，藍，紫6個不同顏色的信號燈，每取6個，5個，4個，3個，2個和1個的各種組合數。

【解】 取6的組合數　$C_6^6=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=1$

取5的組合數　$C_6^5=\frac{6\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=6$

取4的組合數　$C_6^4=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=15$

取 3 的組合數 $C_6^3=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}=20$

取 2 的組合數 $C_6^2=\frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot5}{\cancel{2}\cdot1}=15$

取 1 的組合數 $C_6^1=\frac{6}{1}=6$

【例四】 從10人中選出 3 人爲代表 (1)若某人必須入選，共有多少種選法？ (2)若某人必須落選，共有多少種選法？

【解】 1.某人必須選入，等於 9 人中選 2 人的選法，就是

$$C_9^2=\frac{9\cdot\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}\cdot1}=36\text{ (種)}$$

2.某人落選，等於9人中選3人的選法，就是 $C_9^3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}$ $=84$ (種)

習 題 三

1.求下列各組合數的值：

C_5^4， C_8^5， C_{17}^{15}， C_{25}^{8}，

2. $C_n^8=C_n^7$ 求n

3.5 種顏色的信號彈，每次取 3 色組成一信號，問共可組成多少種信號？

4.上題中每取 1 色，2 色，3 色，4 色和5 色，問共可組成多少種信號？

5.拔河比賽，共有 4 隊參加，每 2 隊對比，須比賽幾場方輪流完畢？

6.從12位候選人中，選舉 5 人，問共有多少種選法？

7. 上題中某人必須選入，有多少種選法？若某人必須落選有多少種選法？

五 求組合數的另一公式

由n個不同的物體中，取出r個作成一組合時，那剩餘的$n-r$個物體，自然結合起來成爲另一個組合，如此由r個物體作成的每一個組合都有一個由$n-r$個物體所成的組合對應着，反過來講也合理。再由上節例三，$C_6^1=C_6^5$ $C_6^2=C_6^4$而$5=6-1$ $4=6-2$所以：

$$C_n^r=C_n^{n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

這個關係也可由(1)式化出：

較$(n-r+1)$小1的是$(n-r)$

把(1)式分子分母同乘以$(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

得：$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2,1}{[r(r-1)(r-2)\cdots3\cdot2\cdot1][(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1]}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{r!\ (n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

同樣寫出C_n^{n-r}的計算

$$C_n^{n-r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots[n-(n-r)+1]}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{n(n-1)\ (n-2)\cdots\cdots(r+1)}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

較$(r+1)$小1的是r

分子分母乘以$r(r-1)(r-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1[r(r-1)(r-2)\cdots3\cdot2\cdot1]}$$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ 這兩個結果是一樣的，即 $C_n^r=C_n^{n-r}$

這關係在計算中給我們很多方便

【例一】 求 C_8^7的值

【解】 $C_8^7=C_8^{8-7}=C_8^1=\dfrac{8}{1}=8$

注意在(2)式中如$r=n$ 則 $C_n^n=C_n^{n-n}=C_n^0$

但 $C_n^n=1$ 因我們規定 C_n^0的值爲1.

【例二】 有書12本，等分給A,B,C三人，各得4本，共有多少種分法？

【解】 A 可得之書籍有 C_{12}^4法，B 有 C_8^4法，而 C有 C_4^4法，

故分給法 C_{12}^4，C_8^4，$C_4^4=\dfrac{12!}{4!4!4!}$

$$=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=34650$$

答：可有 34650 種分法

習 題 四

1. 求下列各組合的值：

C_{17}^{15}， C_{22}^{19}， C_{14}^{10}，

2. 由黨員20名，團員18名中，選出黨員 4 名，團員 3 名，組成委員會，有幾種選法？

3. 有18人，分成相等的甲，乙，丙三個學習組，問共有多少種分法？

4. 有16人分成三個學習組甲組須8人，乙組須5人，丙組須3人，問共有多少種分法？

5. 甲有紅綠藍紫四種信號彈，乙有黃白兩種信號彈，現甲乙合作，由甲取出二個與乙取出一個結合成一組信號，問有多少種組合？若依次序發射，問可成多少種不同信號？

第二章 二項式定理

一 連乘積的構成

設求$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$的積

在求多項式乘多項式的積時，是以乘數的每一項乘被乘數的每一項即得，所以$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)$可先用$(x+b_2)$的各項乘$(x+b_1)$的各項得$(x\cdot x+b_1x+b_2x+b_1b_2)$再將乘出來的積的各項再被$(x+b_3)$的各項來乘，則得最後的結果。

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)=x\cdot x\cdot x+b_1\cdot x\cdot x+b_2\cdot x\cdot x+b_1\cdot b_2\cdot x$$
$$+b_3\cdot x\cdot x+b_1\cdot b_3\cdot x+b_2\cdot b_3\cdot x+b_1\cdot b_2\cdot b_3$$

故從三已知多項式中，各選一項而相乘，即得積中的一項，例如從第一多項式中選取x，第二多項式中選取b_2，第三多項式中選取b_3，則得乘積的b_2b_3x項，其餘類推。

二 一次二項因式的乘積

上述例題，我們可以用視察法求得$x+b$的多個因式的積。

例如：$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)=x^3+(b_1+b_2+b_3)x^2$

$+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+b_1b_2b_3$就是

在各因式中選x即得x^3。

在二個因式中選 x，其他一因式選b，即得 b_1x^2，b_2x^2，b_3x^2，等項，即乘積中的$(b_1+b_2+b_3)x^2$

在一個因式中選x，其他二個因式中選b，即得b_1b_2x，b_1b_3x，

b_1b_2x等項，即乘積中的$(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x$

在各因式中選b，即得$b_1b_2b_3$

同理可證明得一般的公式爲：

$$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots\cdots(x+b_n)=x+(b_1+b_2+b_3\cdots b_n)x^{n-1}+(b_1b_2+b_1b_3\cdots\cdots\cdots+b_2b_3+\cdots\cdots b_{n-1}b_n)x^{n-2}+(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\cdots\cdots\cdots+b_{n-2}b_{n-1}b_n)x^{n-3}+\cdots\cdots+b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n$$

從這一般公式中，知

x^{n-1}的同類項的個數等於在n個b中每次取1個的組合數C_n^1，

x^{n-2}的同類項的個數等於在n個b中每次取2個的組合數C_n^2，

x^{n-3}的同類項的個數等於在n個b中每次取3個的組合數C_n^3，

最後一種x^0，它的同類項的個數，等於在n個b中全取的組合數C_n^n

三　二項式定理

在上式$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots\cdots(x+b_n)$的各因式中，若$b_1=b_2=b_4=\cdots\cdots b_n=b$　$x=a$，

則$(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)\cdots\cdots(x+b_n)=(a+b)^n$

所以由上面公式中，得二項式定理：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^3a^{n-3}b^3+\cdots\cdots\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

【例一】 $(a+b)^3=a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+c_3^3b^3$

$$=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot2}{2\cdot1}ab^2+\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}b^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

【例二】 求$(2x+y)^4$之展開式

$$(2x+y)^4=(2x)^4+4(2x)^3y+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}(2x)^2y^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}(2x)y^3$$
$$+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}y^4=16x^4+32x^3y+24x^2y^2+8xy^3+y^4$$

習題五

1。求$(x+y)^4$的展開式

2.求$(P+g)^5$的展開式

3.求$(2x+2y)^3$的展開式

4.求$(1+2x)^4$的展開式

5.求 $(\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y)^3$的展開式