數學參考叢書

高等代數學

許　行編著

真理書店

數學參考叢書

高等代數學

許　行編著

上海眞理書店發行

數學參考叢書
高等代數學

編著者　許　行

出版發行者　上海眞理書店
上海南京東路哈同大樓427室

印刷者　蔚文印刷公司
上海長樂路二五六號
電話：八四四四三號

1953，3·再版　1501—3000

前　　言

本書是我在授課之餘編寫的，因爲感到目前關于高等代數學的參考書很少，同時學者又感到迫切需要，于是本歷年教授所得的經驗，編寫此書。本書目的在于供給學者自修之用，故內容力求簡潔通俗，例題收集甚多。唯倉卒付印，難免有錯誤之處，望讀者隨時指正。

許　行

目　次

第一章　排列與組合

（一）基礎定理　某事件有 m 種不同做法，做好後另一事件有 n 種不同做法，則先後二事件共有 mn 種做法。

例一　某君進飯館進膳，擬點一菜一湯，菜單上刊有湯三種，清湯、蛋湯、黃豆湯。菜四種，魚、肉、雞、鴨。問某君共有幾種點菜方法？

解　共有 $3 \cdot 4 = 12$ 種點菜方法如下：

$$\text{清湯}\begin{cases}\text{魚}\\\text{肉}\\\text{雞}\\\text{鴨}\end{cases}\qquad\text{蛋湯}\begin{cases}\text{魚}\\\text{肉}\\\text{雞}\\\text{鴨}\end{cases}\qquad\text{黃豆湯}\begin{cases}\text{魚}\\\text{肉}\\\text{雞}\\\text{鴨}\end{cases}$$

例二　房屋一所，朝南門四扇，朝北門五扇，某甲欲從南門入北門出，問有幾種不同的走法？

解　共有 $4 \cdot 5 = 20$ 種不同的走法，設若朝南四門為 A. B. C. D。朝北五門為 V, W. X. Y. Z。某甲由 A 門入，可擇朝北五門中任一門出，有五種不同的走法。若某甲由 B門入，亦可於朝北五門中任擇其一門出，亦有五種不同的走法。C. D 二門亦然。故共有二十種不同的走法。

A 門入——V 門出　第一種
A 門入——W門出　第二種
A 門入——X 門出　第三種
A 門入——Y 門出　第四種
A 門入——Z 門出　第五種

B 門入——V 門出　第六種
B 門入——W門出　第七種
B 門入——X 門出　第八種
B 門入——Y 門出　第九種
B 門入——Z 門出　第十種

C門入——V 門出　第十一種
C門入——W門出　第十二種
C門入——X 門出　第十三種
C門入——Y 門出　第十四種
C門入——Z 門出　第十五種

D 門入——V 門出　第十六種
D 門入——W門出　第十七種
D 門入——X 門出　第十八種
D 門入——Y 門出　第十九種
D 門入——Z 門出　第二十種

總括言之，若一事件有 m 種不同的做法，做好後另一事件有 n 種不同的做法，做好後又一第三事件有 p 種不同的做法……。以上諸事件總共有 mnp…… 種不同的做法。

（二）一羣相異物件之全部或一部份，任意更變其先後次序，計

算其種種不同排列（即不同順序）之方法數，稱爲排列。數學上應用之符號爲 p_r^n，上角 n 爲一羣被排列物件之件數，下角 r 爲一羣被排列 n 件物件中所取而排列之物件件數，如 P_2^5 即從五個相異物件中每次取二件，按種種不同順序之排列。

例　象棋中之車、馬、炮三子，每次取二子之不同排列方法共有六種。即：

車馬 車先馬後	**車炮** 車先炮後	**馬炮** 馬先炮後
馬車 馬先車後	**炮車** 炮先車後	**炮馬** 炮先馬後

由三種相異物件每次取二件來排列，n=3．r=2．即 $P_2^3=6$。

又如趙、錢、孫、李四人。每次由二人來排列之方法共有12種。即：

趙先錢後．　趙先孫後．　趙先李後．　孫先李後．

錢先孫後．　錢先李後．　錢先趙後．　孫先趙後．

李先趙後．　李先孫後．　孫先錢後．　李先錢後．

上例 n=4，r=2，即 $P_2^4=12$。

（三）開始排列第一個位置時，可在 n 件相異物件中任取其中之一件，故第一個位置有 n 種不同排法。排好後，將餘下 n－1 件相異物件中任取其中之一件，排在第二個位置上，故第二個位置有 n－1 種不同排法。同理，第三個位置有 n－2 種不同排法，第四個位置有 n－3 種不同排法，第 r 個位置有 n－r＋1 種不同排法，按 §1 其總共排法當爲各個位置單獨排法之乘積。n 件相異物件每次取 r 件之排列（即排 r 個位置）爲：

$$P_r^n=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)。\qquad (1)$$

例　數目字1、2、3、4、………9。問可以排成不同的三位數多少個？

解　數目字1、2、3、4、………9一共九個，排三位數時第一位置可由九個數目字中間任取一個，有九種不同取法，即 n=9。排好後排第二位置，可由餘下八個數目字中間任取一個，有八種不同取法，即 n－1=8。再排第三位置時可由餘下七個數目字中間任取一個，有七種不同的取法，即n－2=7。

先排第一個位置,排好後排第二個位置,第二個位置排好後再排第三個位置,按 §1,總共當有9·8·7或504種不同數字,或即 $n(n-1)(n-2)=P^{9}_{3}$ $=9\cdot8\cdot7=504$。

設若n件相異物件全取而排例之,則(1)式中$n=r$。

$$P^{n}_{n}=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-n+1)$$

逆轉上式之右邊。

$$P^{n}_{n}=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(n-2)(n-1)n \qquad (2)$$

凡自1開始,遂此增加1,達n之連乘積,稱為n階乘。(Factorialn)。符號為$\underline{|n}$ 或 $n!$。

例若 $P^{4}_{1}=4$。 $P^{4}_{2}=4\cdot3$。 $P^{4}_{3}=4\cdot3\cdot2$。 $P^{4}_{4}=4\cdot3\cdot2\cdot1=\underline{|4}$。

$P^{8}_{1}=8$。 $P^{8}_{2}=8\cdot7$。 $P^{8}_{3}=8\cdot7\cdot6$。 $P^{8}_{4}=8\cdot7\cdot6\cdot5$。

$P^{8}_{5}=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$。 $P^{8}_{6}=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4.3$。 $P^{8}_{7}=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$。

$P^{8}_{8}=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\underline{|8}$。

例一 證明, $P^{8}_{6}=4\cdot P^{7}_{7}$。及 $P^{16}_{3}=2\cdot P^{8}_{4}$。

解 $P^{8}_{6}=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=4\cdot P^{7}_{7}$。

$P^{16}_{3}=16\cdot15\cdot14=2\cdot8\cdot3\cdot5\cdot2\cdot7=2\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=2\cdot P^{8}_{4}$。

例二 設若. $P^{2n}_{4}=127\,P^{2n}_{3}$。求n之值?

解 原式即: $2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)=127\cdot2n(2n-1)(2n-2)$。

兩邊同除 $2n(2n-1)(2n-2)$, 得 $2n-3=127$。 $n=65$。

例三 設若 $P^{2n+1}_{4}=140\cdot P^{n}_{3}$,求n之值?

解 原式即:

$$(2n+1)(\overline{2n+1}-1)(\overline{2n+1}-2)(\overline{2n+1}-3)=140n(n-1)(n-2)。$$

或 $(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)=140n(n-1)(n-2)$。

即 $4n(2n+1)(2n-1)(n-1)=140n(n-1)(n-2)$。

兩邊同除 $4n(n-1)$, 得 $(2n+1)(2n-1)=35(n-2)$。

即 $4n^2-1=35n-70$。或 $4n^2-35n+69=0$。

解之得 $n=3$。或$\frac{23}{4}$。因n限為正整數,故$n=3$。$n=\frac{23}{4}$棄去不計。

例四 滬杭線自上海經松江、嘉興、至杭州。大小共二十站。問該線總共需備不同

車票若干種？

解 自某站至某站，是從二十個不同車站每次取二個車站來排列。

$P^{20}_{2}=20\cdot19=380$種。

（或每站需發賣十九種車票，二十站共發賣$20\cdot19$種車票。）

例五 Clifton 一字中母音須彼此連接，不被間隔之排列方法有幾？

解 Clifton 一字，其中 io 二個字母爲母音，其餘五個字母皆爲子音，io 二字母須彼此連接，不能分離，可以當作一個字母。原字七個字母等於六個字母每次全取的排列，$P^{6}_{6}=720$。又因 io 是一種，oi 又是一種，故得$2\times720=1440$ 種不同排列法。

例六 七個兒童排成一行，其中某一指定兒童不得站在行首或行尾，問共有若干種不同排列方法？

解 七個兒童任意排列之方法有 $P^{7}_{7}=\underline{|7}$ 種。若該指定兒童指定站在行首不得移動，則排列時只由餘下六個兒童來排列。其不同方法有 $P^{6}_{6}=\underline{|6}$ 種。同理該指定兒童站在行尾時亦爲$\underline{|6}$種。若由原有七個兒童任意排列方法數中減去該指定兒童站在行首及行尾之排列方法數，便得該指定兒童不得站在行首或行尾的方法數，即 $\underline{|7}-2\cdot\underline{|6}=3600$種。

例七 數目字0、1、2、3、………9能組成相異的四位數字若干種？

解 數目字十個每次取四個來排列，其方法共有 P^{10}_{4}種。亦即能組成 P^{10}_{4}種相異的四位數字。但若0135，0186等第一位爲零的數字，不得稱爲四位數，必須删去。首位指定爲零的數字有 P^{9}_{3} 種，因首位既指定是零，首位上便不得任意排列，只有餘下 1、2、3、……9，九個數目字排在百位、十位、和個位的三個位置上，故得 P^{9}_{3}種。相異四位數字共有 $P^{10}_{4}-P^{9}_{3}=4536$種。

例八 數目字 0、1、2、3、4、5、能組成被 5 所除盡的相異三位數字若干種？

解 能被 5 所除盡的數字其末位數字必須是 0 或5，倘若末位固定是0，則末位上便不得自由排列，能自由排列者僅百位與十位數，由餘下五個數字取二個排在其上有 P^{5}_{2}種排法，同理末位固定爲5時亦有 P^{5}_{2}種排法。但若015，075 等首位爲 0 的數字因其實際上爲二位數，必須删去，末位固定爲 5 首位固定爲 0 之數字只得從餘下四個數字 1、2、3、4、來排在十位數之地位上，是四中取一之排列，即 P^{4}_{1}，故被 5 能除盡的數字有

$$2\times P^{5}_{2}-P^{4}_{1}=36\text{種}$$

（四）若由相異物件 n 件取 r 件來任意排列，在排列過程中得以重複取用，稱爲重複排列。其排列方法數爲n^r。該以排第一個位置時可在 n 件中任取一件，有 n 種不同取法。排第二個位置時因爲可以重複取用，故仍然有 n 件物件，仍然有 n 種不同取法。同理排第三個位置時，亦有 n 種不同取法……。排第 r 個位置時，亦有 n 種不同取法。按§1其排列方法數爲：

$$n\cdot n\cdot n\cdot n\cdots\cdots\text{至 r 個因式} = n^r。\qquad (3)$$

例一　數目字1、2、3、4、5、6、7、問能排成一位數，二位數，三位數若干種？

解　題中沒有註明相異的一位數、二位數、或三位數、是可以重複排列，數目字有七個，一位數可由七個內任擇一個排列，有七種方法，卽 $n=7$。$r=1$。$n^r=7^1=7$。排二位數時，先排第一個位置，有七種方法，排好後可以重複原數，故排第二個位置時，仍然有七種方法。總共有 $7\cdot7$ 計 49 種方法。卽 $n=7$。$r=2$。$n^r=7^2=49$。同理可以重複排列的三位數有 $7^3=343$ 種排列方法。

例二　獎品三種，發給學生十人，一人可以同時得幾種獎品，問有幾種發法？

解　發第一件獎品時，可發給十人中之任何一人，有 10 種方法。發第二件獎品時因一生能同時連得數獎，故仍有 10 種方法。發第三件時亦然。$n=10$。$r=3$。$n^r=10^3=1000$ 種方法。

（五）n 件物件中，p 件爲一類，q 件爲一類，r 件爲又一類，則在排列中內部部份類同，稱爲不盡相異的排列。設若所求排列數爲 x，又以 p 件同類物件作爲相異物件 p 件，其排列方法數爲$\lfloor\underline{p}$，同理q件同類物件作爲相異物件時之排列方法數爲$\lfloor\underline{q}$。r 件同類物件爲$\lfloor\underline{r}$。其總共排列方法數爲$x\cdot\lfloor\underline{p}\cdot\lfloor\underline{q}\cdot\lfloor\underline{r}$，因其恰巧等於 n 件相異物件全取之排列方法數。卽：

$$x\cdot\lfloor\underline{p}\cdot\lfloor\underline{q}\cdot\lfloor\underline{r}=\lfloor\underline{n}。$$

因此得 n 件物件內部部份類同，p 件爲一類，q 件爲一類，r 件爲一類之排列數爲；

$$x=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{r}}\qquad (4)$$

三類以上依此類推。

例一　顏色彈子十七粒，其中七粒是黑的，六粒是紅的，四粒是白的，求排列方法數？

解　按題意卽物件 17 件其中 7 件爲一類，6 件爲一類，4 件爲一類，其排列方法數爲；

$$\frac{\underline{|17}}{\underline{|7}\;\underline{|6}\;\underline{|4}}=4084080。$$

例二　今有一分幣五枚、五分幣六枚、一角幣四枚分給兒童十五人，問有若干種不同分法？

解　按題意卽物件 15 件中，5件爲一類、6 件爲一類、4 件爲又一類、其分法卽排列方法數爲：

$$\frac{\underline{|15}}{\underline{|5}\;\underline{|6}\;\underline{|4}}=630630。$$

例三　數目字2、3、0、3、4、2、3、能組成大於一百萬之數字若干種？

解　一百萬爲七位數，大於一百萬的數字至少亦須爲七位數。數目字 2、3、0、3、4、2、3、共七個，內有二個2，三個3，連0在內能組成的七位數，當有 $\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\;\underline{|3}}$ 種。但若 0332423，0423233 第一位爲零的數字不得稱爲七位數。同時其値也小於一百萬，必須刪去，以零爲第一位的數字，卽零固定於第一位不動，由2,3,3,4,2,3、六個數目字內有二個2，三個3，之排列方法數爲 $\frac{\underline{|6}}{\underline{|2}\;\underline{|3}}$ 種。故大於一百萬之數目字有：

$$\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\;\underline{|3}}-\frac{\underline{|6}}{\underline{|2}\;\underline{|3}}=\frac{\underline{|7}-\underline{|6}}{\underline{|2}\;\underline{|3}}=360種。$$

例四　某城區有南北街十條，東西街五條，一人欲取最短之途徑由西南角走至東北角，問有若干種，不同走法？

解　南北街十條，皆被東西街割成 $5-1=4$ 段。東西街五條，皆被南北街割成 $10-1=9$ 段。由西南角走至東北角，必須經過南北街4段，東西街9段，卽經過十三段街，其中4段是一類。9段又是一類。其走法爲；

$$\frac{\underline{|13}}{\underline{|9}\;\underline{|4}}=715種。$$

（六）凡相異物件繞環狀排列之，如穿珍珠成手鐲，坐圓台四圍開會等。稱爲環狀排列。設所求環狀排列方法數爲 x，於 n 件相異物

件取 r 件來按環狀排列之，其排上去方法有 r 種。總共排法有 xr 種。亦即 n 件相異物件取 r 件排列之方法數 P^n_r。故得：

$$xr = P^n_r。\qquad x = \frac{P^n_r}{r}。\qquad (5)$$

若 n 相異物件全取而排列之，則 n＝r。

$$x = \frac{P^n_n}{n} = \frac{\underline{|n}}{n} = \underline{|(n-1)}。\qquad (6)$$

例一　八人圍桌而坐，問有若干種不同坐法？

解　n＝8、n－1＝7、坐法爲 $\underline{|7} = 5040$ 種。

例二　四男四女圍桌而坐，男女相間，問有若干種不同坐法？

解　假定先請女子入席，其坐法當有 $\underline{|4-1} = \underline{|3}$ 種。坐定後四女邊上的四個位置，再由男子入席，四個空位坐四人，有 $P^4_4 = \underline{|4}$ 種坐法。按§1；女子坐定後，男子入席之坐法當有 $\underline{|3} \times \underline{|4} = 144$ 種。

若珍珠穿成手鐲，因可以反轉觀看，其排列數當爲原數之 $\frac{1}{2}$。例若有紅、黃、白三寶石穿成一鐲。正面看上去的紅、黃、白一種排列方法。等於鐲反轉來後之白、黃，紅，雖爲二種，實則僅一種。故其環狀排列方法數爲 $\frac{1}{2} \cdot \frac{P^n_r}{r}$，n件全取之環狀排列方法數爲 $\frac{1}{2}\underline{|n-1}$。

〔註〕鐲、圈等類與人坐圓桌類。因人圍桌而坐，計算排列方法者只能由上往下觀看，無法反轉，故與鐲圈一類可任意反轉者異。

例三　相異彩珠八粒，可穿成若干種不同手鐲？

解　$\frac{1}{2}\underline{|n-1} = \frac{1}{2}\underline{|8-1} = \frac{1}{2}\underline{|7} = 2520$ 種。

（七）由 n 件相異物件每次取 r 件，不計其先後之順序而單計算其種種相異組成方法數，稱爲組合。例若象棋中車、馬、炮三子，其每次取二子之組合方法只有三種即：

車馬　　車炮　　馬炮

至於何者在先，何者在後等種種不同的順序，則一概不計。組合數學上應用之符號爲 C^n_r。上角 n 爲一羣被組合相異物件之件數，下角

r 為一羣被組合相異物件 n 件中所取而組合之件數，如上例 $C^3_2=3$。

排列與組合相異之點為排列包括取與排而組合僅取而不排。

（八）n 件相異物件中取 r 件有 C^n_r 種取法，取後再行排列時有 $P^r_r=\underline{|r}$ 種排法。取而後排之方法有 $C^n_r\times\underline{|r}$ 種。同時 n 件相異物件每次取 r 件來排列法又等於 P^n_r。故：

$$C^n_r\times\underline{|r}=P^n_r。\quad 或 C^n_r=\frac{P^n_r}{\underline{|r}}。$$

但因 $P^n_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1)$，

故得 $$C^n_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}。\qquad(7)$$

例若 $C^3_2=\frac{3\cdot2}{1\cdot2}=3$。$C^{11}_{4}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=330$。

$$C^{11}_5=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=462。$$

若將 (7) 式分子分母同乘 $\underline{|n-r}$，即：

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\times\underline{|n-r}}{\underline{|r}\times\underline{|n-r}}。$$

分子部份等於自 n 至 1 之階乘 $\underline{|n}$，即：

$$C^n_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}。\qquad(8)$$

又因 $C^n_n=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}}=1$，故 $C^n_n=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|n-n}}=1$。但 $\underline{|n-n}=\underline{|0}$，

故 $\underline{|0}$ 等於1。

再以 $n-r$ 代入 (8) 式中之 r，$C^n_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|n-(n-r)}}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}}$

$=C^n_r$。

故得 $$C^n_r=C^n_{n-r}。\qquad(9)$$

例若 $C^{19}_{17}=C^{19}_{19-17}=C^{19}_2$，$C^7_5=C^7_{7-5}=C^7_2$，

$C^{12}_8=C^{12}_{12-8}=C^{12}_4$。

例一　設 $C^n_8=C^n_7$，求 n 之值。

解　$C^n_8=C^n_{n-8}=C^n_7$　$n-8=7$　$n=15$

例二　設 $C^{2n}_3:C^n_2=44:3$，求 n 之值

解　依題意即

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{44}{3}\times\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$$

或 $$\frac{4n(2n-1)(n-1)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{44n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}$$

二邊同除 $\frac{n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}$，得 $4(2n-1)=44$，或 $2n-1=11$，$n=6$。

例三　設 $C^{18}_r=C^{18}_{r+2}$　求 r 之值。

解　按 $C^n_r=C^n_{n-r}$，得 $C^{18}_r=C^{18}_{18-r}=C^{18}_{r+2}$

$18-r=r+2$，$r=8$。

例四　設 $C^{28}_{2r}:C^{24}_{2r-4}=225:11$，求 r 之值。

解　按公式8，$C^n_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$ 得

$$\frac{\underline{|28}}{\underline{|2r}\ \underline{|28-2r}}:\frac{\underline{|24}}{\underline{|2r-4}\ \underline{|24-(2r-4)}}=\frac{225}{11}。$$

或 $$\frac{\underline{|28}}{\underline{|2r}\ \underline{|28-2r}}\times\frac{\underline{|2r-4}\ \underline{|28-2r}}{\underline{|24}}=\frac{225}{11}。$$

亦即 $$\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}=\frac{225}{11}。$$

所以　$2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)=24024$

$(4r^2-6r)(4r^2-6r+2)=24024$。

設　$4r^2-6r=x$ 代入上式得 $x(x+2)=24024$，解此方程式 $x=154$ 或 -146

即 $4r^2-6r=154$. 解之得 $r=7$. $x=-146$ 棄去不計。

例五　由十人中選三人組織小組會，問(一)某甲一定在內及(二)某甲一定除外之選舉方法？

解　(一)某甲一定在內，組織小組會時僅須從其餘九人中選舉二人湊上即得。只求選法不問次序如何屬組合不屬排列，故有 $C^9_2=\frac{9\cdot8}{1\cdot2}=36$ 種選法。

(二)某甲一定除外，即某甲無被選舉權，選舉時只得由九人中選三人，有 C^9_3

$=\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}=84$種選法。

例六　某廠有勞方40人，資方10人，今欲組成委員會，擬定選舉代表六人，(一)委員會中含資方一人，(二)委員會中至少有資方一人，問有若干種選法？

解　(一)勞方由40人中選舉5人，有C^{40}_{5}種方法，資方有10人中選舉一人，有C^{10}_{1}種方法，故委員會中含資方一人之選法有$C^{40}_{5}\times C^{10}_{1}=6580080$種。

(二)勞資雙方選代表之方法數為50人中選6人，即C^{50}_{6}，內中不含資方的選舉方法數為勞方40人中選6人，即C^{40}_{6}，由雙方共同選法中減去不含資方的選法，所得即至少含資方一人之選法，$C^{50}_{6}-C^{40}_{6}=12052320$種。

例七　撲克牌52張依次序分給A、B、C、D、四人，每人13張，問有若干種分法？又若攤成四堆每堆13張，有若干種攤法？

解　分給A時A可於52張中任擇13張，有C^{52}_{13}種選擇方法，輪到B時B只能從剩下的39張中任擇13張，有C^{39}_{13}種選擇方法，輪到C時C只能從B拿剩的26張中任擇13張，有C^{26}_{13}種選擇方法，輪到D時只剩13張，無從選擇，拿去就是，有C^{13}_{13}種選擇方法(即一種選擇法)。又按§1照其總共選擇方法當為各單獨選擇方法的乘積，即

$$C^{52}_{13}\times C^{39}_{13}\times C^{26}_{13}\times C^{13}_{13}=\frac{\underline{|52}}{(\underline{|13})^4}$$

又若攤成四堆則無先後次序之別須由上述結果中除去$\underline{|4}$即

$$\frac{\underline{|52}}{(\underline{|13})^4\ \underline{|4}}$$

組合問題須同時運用排列者稱為排列與組合複合問題、一般試題以此種佔最多數，運算時須先行分析題意，以下為複合問題的例解，學者若能詳加研習，不難領會。

例一　於Examination一字中每次取四個字母來排成一字，問有若干種排法？(交大)

解　Examination一字中有十一個字母，a二個，i二個，n二個e,x,m,t,o,各一個，每次取四個字母有下列三種組成方法。

(一)二個相同其餘二個相同，　二個相同的字母有a,a,i,i,n,n,三對，從三

對中取二對有 C^{3}_{2} 種擇取方法，取定後有 $\dfrac{|\underline{4}}{|\underline{2}\;|\underline{2}}$ 種排列方法

(二)二個相同其餘二個互相不同　二個相同的字母可由 a, a, i, i, n, n, 三對中任取一對有 C^{3}_{1} 種擇取方法，其餘二個互相不同的字母可由七個互相不同的字母中擇取二個，有 C^{7}_{2} 種擇取方法，取定後四個字母二個相同有 $\dfrac{|\underline{4}}{|\underline{2}}$ 種排列方法。

(三)四個互相不同　可由 a,i,n,e,x,m,t,o 八個字母中任擇四個，有 C^{8}_{4} 種選擇方法，取定後有 $P^{4}_{4}=|\underline{4}$ 種排列方法，故總共有

$$C^{3}_{2}\times\frac{|\underline{4}}{|\underline{2}\;|\underline{2}}+C^{3}_{1}\times C^{7}_{2}\times\frac{|\underline{4}}{|\underline{2}}+C^{8}_{4}\times|\underline{4}=2454\text{種方法。}$$

例二　有 2n 個人圍二圓桌而坐，每桌坐 n 人，問有若干種坐法?(華東統考)

解　2n 個人中選n個人之選法有 C^{2n}_{n} 種，選好後 n 個人坐第一桌，有 $|\underline{n-1}$ 種排法，第二桌同樣有 $|\underline{n-1}$ 種排法，總共當有

$$C^{2n}_{n}\,|\underline{n-1}\;|\underline{n-1}=\frac{|\underline{2n}}{|\underline{n}\;|\underline{2n-n}}\,|\underline{n-1}\;|\underline{n-1}=\frac{|\underline{2n}}{n^{2}}\text{種坐法。}$$

例三　將四白及四黑棋子，排成一直線，令其首尾二棋不同色，其排法有幾種?(西南聯大)

解　爲首第一個棋子，可以是白棋，可以是黑棋，可由黑白二種棋中任擇一種，有 C^{2}_{1} 種方法。尾端一棋因須與爲首一棋不同色，首端若爲白棋尾端只得排黑棋，首端若爲黑棋尾端只得排白棋，因其不得從黑白二色棋中任擇一種，故僅一種選法，首尾二子排定後中間排六子，三白三黑，有 $\dfrac{|\underline{6}}{|\underline{3}\;|\underline{3}}$ 種排法，故共有

$$C^{2}_{1}\times\frac{|\underline{6}}{|\underline{3}\;|\underline{3}}=40\text{種排法。}$$

(九)相異物件 n 件，每次取1件、2件、3件，……至 n 件，其各組合方法數之總和，稱爲組合總和，其值爲 $2^{n}-1$。證法如下:

二項式 $(a+b)^{n}$ 展開後爲

$$C^{n}_{0}\,a^{n}+C^{n}_{1}\,a^{n-1}b+C^{n}_{2}\,a^{n-2}b^{2}+\cdots\cdots+C^{n}_{n}\,b^{n}\text{。}$$

設若令 a=b=1，代入上式左右二邊，得

$$2^n = C^n_0 + C^n_1 + C^n_2 + C^n_3 + \cdots\cdots + C^n_n。$$

因 $C^n_0 = 1$，移項至左邊，即

$$2^n - 1 = C^n_1 + C^n_2 + C^n_3 + \cdots\cdots C^n_n。 \qquad (9)$$

例一　某甲有朋友六人，今欲請六人中之一人、或二人、或三人………，或全體來家吃飯，問總共有若干種請法？

解　按題意所求者爲組合總和，n=6，故 $2^6-1=63$ 種方法。

另解　六人中請一人，有 C^6_1 種請法。六人中請二人，有 C^6_2 種請法。同理請三人、四人、五人、六人，有 C^6_3、C^6_4、C^6_5、C^6_6 種請法。故總共有

$C^6_1 + C^6_2 + C^6_3 + C^6_4 + C^6_5 + C^6_6 = 6+15+20+15+6+1 = 63$ 種請法。

例二　某小商店櫥窗內陳列相異貨物14種，問顧客有若干種選購方法？

解　顧客可於14種內選一種、或二種、或三種、………或14種，即 C^{14}_1，C^{14}_2，C^{14}_3，………C^{14}_{14}，爲求組合總和。故其選購方法共有 $2^{14}-1=16383$ 種。

（十）若求組合總和之一羣物件內，p 件爲同一類，q 件爲另一類，r 件爲又一類……，而 n=p+q+r……。第一類 p 件相同種類物件可選取一件、或二件、或三件、……或p件，或一件不取。故有 p+1 種選取方法。同理第二類 q 件相同種類物件有 q+1 種選取方法。第三類 r 件相同種類物件有 r+1 種選取方法。其餘依次類推，其總共取法當有 (p+1) (q+1) (r+1)……種。

但倘若全部皆不取，即第一類全部不要，第二類第三類又全部不要等。全部皆不取不得稱爲選取法中之一種，因其根本沒有選取，必須刪去。故得 n 件物件內 p 件爲一類 q 件爲一類 r 件爲一類……之組合總和，亦即選取方法總和爲

$$[(p+1)(q+1)(r+1)-1]$$

例一　銀幣三種，計一角幣二枚、二角五分幣五枚、半圓幣四枚，問可以支付若干種不同金額？

解　二角五分幣四枚可當作半圓幣二枚、故原題可作爲一角幣二枚、二角五分幣一枚、半圓幣六枚、其組合總和爲