

河南省科委 1999 年科技攻关研究项目

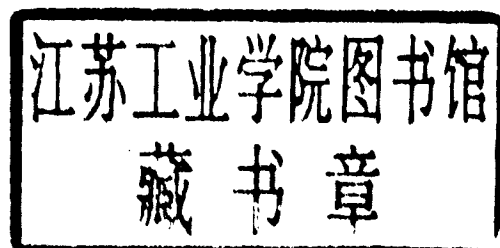
预应力结构优化设计通用程序研制

郑 州 工 业 大 学

二 零 零 零 年 八 月

河南省科委 1999 年科技攻关研究项目

预应力结构优化设计通用程序研制



郑州工业大学

二零零零年八月

预应力结构优化设计通用程序研制

项目负责人：朱明霞

主要成员：王红卫 施力 李育文 杨根顺 王广印 王再军 李芳 何保容

目 录

1. 概述	1
2. 弹塑性有限元理论及算法	4
§ 1 小变形增量弹塑性有限元列式	4
§ 2 微分形式的全量理论弹塑性有限元法	14
§ 3 程序流程图	21
3. FEM 命令与接口	24
§ 1 FEM 的结构	24
§ 2 FEM 的网格剖分、数据输入—批处理方式	26
§ 3 FEM 的网格剖分、数据输入—交互方式	30
§ 4 MESH 模块和 CHECK 模块	33
§ 5 宏观运算指令及数据输入—批处理方式	35
§ 6 运算模块及输出模块	39
§ 7 单元模块的重新连接与用户自配单元的接口技术	40
§ 8 FEM 的图形显示与绘图输出	43
4. 算例验证	45
§ 1 厚壁圆筒的弹塑性分析	45
§ 2 用增量和全量弹塑性有限元法模拟弹塑性压缩过程	47
§ 3 平面应变受压临界失稳高宽比分析	52
§ 4 用轴对称模型分析圆柱体压缩过程	57
§ 5 结论	60
5. 结论	61
附录	62
参考文献	75

1 概述

有限元法(FEM)是随着高速数字计算机的出现而发展起来的有效数值计算方法。它最初是作为结构分析的概念来研究的。1960年 Clough 明确提出了有限单元这一术语,并用它第一次分析了平面应力的结构问题,引起了人们的关注。晚些时候,又建立了这种方法与熟知的里兹(Rize)法的等效性。从而把它应用到那些可以建立变分公式的问题的广泛领域。从此,FEM 成功地应用于弹性的、动力学的平面问题和轴对称问题,以及其它边值问题。正如美国学者 Kobayashi^[7]所说的那样,有限元法以它的适应性,能获得详尽解的能力和它与精确解的固有接近证明它优于其它经典分析方法。因此,从70年代塑性有限元法的算法研究方兴未艾,众多学者提出了各种不同的算法,能解决工程中的诸多实际问题。

传统的机械设计是凭经验、试验、规范等进行人工初步设计,然后通过反复试验对初步设计进行校核和修改。近年来随着计算机技术的普及,产生了高度现代化的计算机辅助工艺(CAE)技术,图1-1给出了典型工艺CAE示意图。

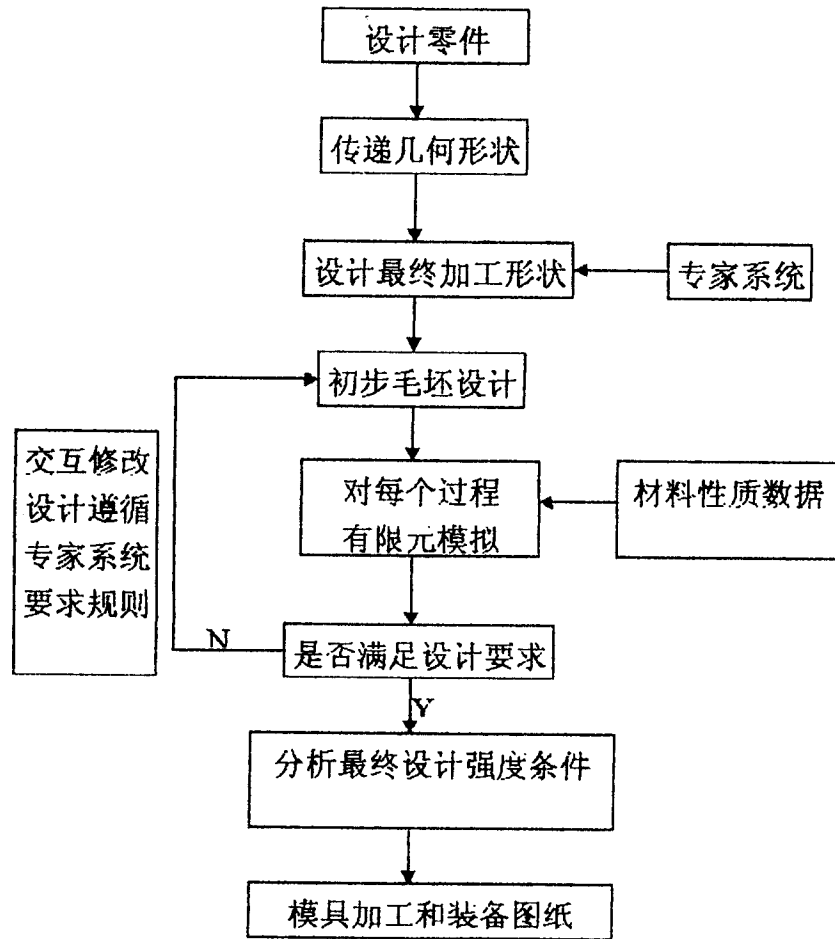


图 1-1 典型工艺 CAE 示意图

图 1-1 给出的设计过程全是在计算机上进行的。专家系统通常是针对某个领域或范围的智能系统,它由知识基础、逻辑法则、推理工具三部分组成,它提供初步

设计及优化准则。有限元计算则是用来进行设计校核和设计优化。专家系统和有限元计算是一个锻造工艺 CAE 的最重要的组成部分, 它们的水平反映了一个工艺 CAE 的水平。专家系统是一个可以象人一样使用已有的知识的系统, 而建立在正确的有限元计算上的变形过程模拟, 则可以产生知识, 能象试验一样提供事实, 因而能使所需要进行的试验减少到最低程度。所以, 有限元技术的发展是现代工艺 CAE 发展的重要条件之一。

用于结构分析计算的有限元法理论发展至今已比较成熟, 国外已开发出了许多商业化的软件, 国内各企业、高校等应用最多的是 SAP (Structure analyses programs) 结构分析程序, 这一软件包括有杆单元、平面单元、固体单元、梁单元、板壳元、管单元、一般弹簧元和边界单元等单元。它主要用于对工程结构进行弹性静、动力分析计算, 这一程序从七十年代引进国内后, 许多高校、科研单位等对它作了或多或少的改造, 但这些改造主要是软件的前、后处理功能方面的功能增强, 以及文件输入输出的汉化处理, 形成了 SAP90、SAP91、SAP93 等等多种版本, 但这些不同版本的软件都没有改变 SAP 原软件的内核, 即单元库的增加。

弹塑性小变形有限单元法是从 1967 年山田嘉昭等推出弹塑性矩阵的显式表达式而发展起来的, 随后以弹性预测—塑性纠正为基本特征的弹塑性有限元解法取得重大进展。求解弹塑性有限元法的主要解法有牛顿法、修正牛顿法和拟牛顿法等多种方法。

弹塑性矩阵是在应力增量和应变增量都是无限小量的情况下导出的, 但在具体实施数值计算时载荷增量只能取作有限小的增量, 于是应力增量和应变增量也就是有限小的增量, 用有限小的增量代替微量后, 增量法求解的每一步都有误差, 导致计算结果与精确解越差越远, 发生所谓漂移。为降低误差, 可以将载荷步取得足够小, 但这是以增加计算量作为代价的, 文献[3, 4]采用一阶白校正法对误差积累进行修正, 它的特点是每个加载步都需要计算不平衡力校正项。文献[5, 6]应用增量修正弦线模量法消除以有限小量代替微量所造成的误差。文献[7]导出了非线性全量弹塑性有限元分析中的一致切线模量, 从而可以得到牛顿迭代法固有的平方收敛速度。文献[8, 9]讨论了有限载荷增量弹塑性有限元分析中传统的切线刚度矩阵丧失精度和牛顿平方收敛速度的原因, 并提出了保证牛顿迭代平方收敛速度, 保证一阶精度和无条件稳定的一致性算法。

另一种国内广泛应用的软件是 ADINA (Automatic Dynamic Incremental nonlinear Analysis Programs) 即自动动态增量非线性分析程序, 这一软件是由美国麻省工学院 BATHE 教授主持研制开发的用于结构静、动力非线性分析软件, 她包括有杆单元、平面单元、固体单元、梁单元、等参梁单元、板壳元、管单元、一般弹簧元、一般质量/刚度/阻尼单元、二维流体元、三维流体元和二维接触元、三维接触元等单元。能够计算弹性、正交各向异性、非线性弹性、热弹性、曲线描述模式、混凝土模式、等温塑性模式、塑性、多线性塑性、各向同性硬化弹塑性材料模式 (满足 ILIYUSHIN 屈服条件)、热塑性、蠕变、塑性蠕变、橡胶、流体等材料模式, 还备有用户接口用以让用户用任意指定的材料模式。

以上两种软件在国内比较流行, 但单元模式不多, 由于是英文软件, 前后处理比较繁琐, 应用起来不太方便。本课题有限元算法采用 FEM (Finite Element Method) 软件平台, FEM 是一个专用于求解有限元的静力、动力、线性、非线性各类问题的微机软件。它由若干个独立程序组合成一个完整的多功能的程序系统。各程序间通过 FEM 在硬盘中设置的数据库建立起松散的联系, 各程序与数据库又有完全相同的接口和调用方式, 具有较强的装配性, FEM 的特点是单元库丰富, 用户可

以任意选用各种单元、单元组合，或自编单元模式用以解决工程实际问题，配有开放性接口及辅助调试程序，具有较好的前后处理功能，及计算机辅助数据输入功能，可以批处理方式输入数据，也可以人机交互输入信息，数据中包含文字型的宏命令及自由格式的数据项，具有清晰、易读、易记、容易查错等特点。在计算完成之后 FEM 提供多种输出方式，供用户选择使用。有位移、应力、反力的打印输出，结构变形及按任意比例放大或缩小的绘图机输出等，可以最大限度地减少用户对输出结果的再整理。

在本课题的前期，我们进行了金属材料的有限变形压缩试验，得到了一维压缩是的有限变形应力应变变化关系，分别采用多维时的等效应力和等效应变代替一维时的单项应力和应变，推广得到多维时的应力应变本构模型。

以小变形理论作为基本前提，采用适合于金属屈服准则的 Tresca 和 Von Mises 屈服准则，假定材料是各向同性的，采用理想弹塑性，等向线性强化和幂次强化三种本构关系，编制了平面应力、平面应变和轴对称 3—9 节点等参单元程序。为了适应金属锻造成形大变形特点，程序中在每一加载荷迭代收敛后将位移增量加到坐标上去，实现坐标更新。编制均布面力载荷子程序。用以模拟成形过程中工具作用在工件上的均布和非均布载荷时情况。

鉴于实际工程中有这样的情况，如果施加载荷偏离简单加载的幅度不大，而且塑性变形过程中始终没有卸载，采用全量论来模拟金属变形过程可以得到与实验结果相同的结果。在小变形假设前提下假设金属材料体积不可压缩，采用 Levy-Mises 塑性本构方程，材料的应力应变关系服从幂次强化关系，将它处理作非线性弹性问题，采用 3—9 节点等参单元，推导了平面应力、平面应变及轴对称模型微分形式的全量理论有限元列式。为适应金属锻造成形变形的特点，在每个加载荷迭代过程中实现坐标更新。

以上程序都是以 FEM 软件包接口的，利用的网络自动生成和及前后处理功能。应用于结构弹塑性变形分析及锻造成形分析中，分析后壁圆筒受内压时的弹塑性变形规律，金属材料墩粗时内部应变分布，变形过程中不同高宽比时出现的单鼓双鼓现象，在加工有误差时，不同高宽比工件墩粗时失稳临值问题作了分析，并与理论或实验结果做了比较，验证所推有限元算法的正确性。

2 弹塑性有限元理论及算法

§ 1 小变形增量弹塑性有限元列式

1.1 概述

物体在弹性变形时, 应力应变关系是线性的。但当物体内部产生塑性变形后, 塑性区内的应力应变关系是非线性的。由塑性理论可知, 应力应变之间不存在一一对应的关系, 塑性应变的大小, 不仅取决于当时的应力状态, 而且还取决于塑性变形的历史。在卸载时, 塑性区内的应力应变服从线性关系, 由于塑性应力应变关系具有这些特点, 弹塑性有限元法比较复杂, 求解起来也困难得多, 具体表现在:

1 由于塑性区内应力应变之间是非线性的, 故而为了求解方便, 需要将非线性问题线性化, 在弹塑性有限元法中多采用逐次加载法, 即将物体屈服后需加的载荷分成若干步加上(每步载荷要求足够小), 在每个加载步内, 把应力应变关系看成是线性的。

2 由于在加载和卸载时, 塑性区内的应力应变关系是不一样的, 因此, 在每步载荷计算时, 首先要判断塑性区内的单元是处于加载状态还是卸载状态, 继续加载则按流动理论计算, 否则按弹性计算。

3 要根据塑性理论的塑性应力应变关系, 须求得联系塑性区内应力和应变的弹塑性矩阵。由于塑性理论中关于塑性应力和应变关系以及硬化假定有多种理论, 采用不同的理论会得到不同的弹塑性矩阵表达式, 由此会得到不同的有限元计算公式。

常见的塑性有限元法求解方法有变刚度法、初应力法和初应变法, 后两种方法又称初载荷法, 无论采用哪个方法, 都必须要求出弹塑性矩阵的显式表示。

弹塑性有限元法是 70 年代末, 在山田嘉昭等人推出弹塑性矩阵显式表示基础上发展起来的。它不仅能用来对受力物体进行应力分析, 进行强度计算, 而且还能用于锻造加工过程的受力分析。同时这种方法也可有效地计算塑性变形后因卸载而引起的残余应力。弹塑性有限元法发展至今, 理论上已比较完善, 也解决了许多工程问题^[1-9]。小变形弹塑性有限元法理论比较成熟, 且应用于结构优化分析得到的结果也比较可靠, 我们可利用这个理论编制有限元程序, 本课题主要研究平面应力、平面应变和轴对称弹塑性应力分析问题, 工程中大多数问题可近似地看作上述的某一类型, 采用接近金属性质的 Trsca 和 Von Mises

准则。采用 3~9 节点等参单元，材料应力应变本构关系分别为理想塑性、线性强化和幂次强化模型，为模拟工程问题中塑性变形较大的构件变形规律，在每个加载步迭代完成后自动实现坐标更新，为模拟结构之间互相作用的面力载荷，编制了分布面力子程序。

1.2 用于数值计算的屈服准则表达式

为了便于数值计算，把屈服函数改写成另一种应力不变量形式，主要优点是可以用计算机对普遍形式的屈服函数和流动法则编制程序，而对任何一种特殊的准则，只要三个常数就能确定。

Tresca 屈服准则：

$$2\sqrt{J_2'} \cos\theta = Y(k) = \sqrt{3}K(k) = \sigma_y(k)$$

Von Mises 屈服准则：

$$\sqrt{3J_2'} = \sigma_y(k)$$

1.3 理想塑性材料和强化材料的加卸载准则

1 理想塑性材料的加卸载准则

理想塑性材料的加载面和屈服面是一样的，如果以 $f(\sigma_{ij})=0$ 表示屈服面，则可以把加卸载准则用数学形式表示如下：

$$\begin{array}{ll} f(\sigma_{ij}) < 0 & \text{弹性状态} \\ f(\sigma_{ij}) = 0, & \\ df = f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - f(\sigma_{ij}) = \delta f / \delta \sigma_{ij} d\sigma_{ij} = 0 & \text{加载} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 & \\ df = \delta f / \delta \sigma_{ij} d\sigma_{ij} < 0 & \text{卸载} \end{array}$$

在应力空间，上述加卸载准则可表示为：

$$\begin{array}{ll} f=0, & d\sigma * n = 0 & \text{加载} \\ f=0, & d\sigma * n < 0 & \text{卸载} \end{array}$$

理想塑性材料的特点是屈服面不能扩大， $d\sigma$ 不能指向屈服面之外。

对于一般的幂次强化材料，加载面在应力空间中将不断变化，如果 $\phi = 0$ 表示加载面，与理想塑性材料不同之处是加载面允许向外扩张，因此应力增量 $d\sigma$ 可向屈服面 $\phi(\sigma_{ij}) = 0$ 以外，加卸载准则为：

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} \cdot \bar{n} &> 0 && \text{加载} \\ d\bar{\sigma} \cdot \bar{n} &= 0 && \text{中性变载} \\ d\bar{\sigma} \cdot \bar{n} &< 0 && \text{卸载} \end{aligned}$$

强化材料在变形过程中有中性变载的现象，它相当于应力点沿加载面切向变化，加载面并未扩大的情形，图 1 是强化材料加卸载准则示意图。

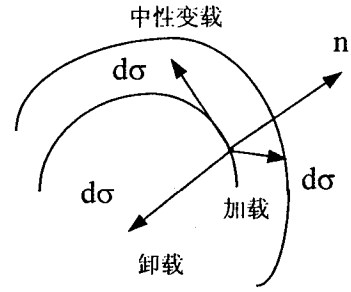


图 1 强化材料的加卸载准则

1.4 弹塑性应力应变关系

金属在塑性变形后，一般变形量是很大的，在初次屈服之后，材料特性将是部分弹性和部分塑性的，即 $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p$ ，其中 $d\epsilon_{ij}^e$ 为弹性部分， $d\epsilon_{ij}^p$ 为塑性部分，弹性部分满足广义虎克定律；即 $d\epsilon_{ij}^e = d\sigma_{ij}/2G - (3\nu/E)d\sigma_{kk}\delta_{ij}$ ，而塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ 满足 $d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \delta f / \delta \sigma_{ij}$ ，由于我们仍然采用的是小变形理论，在任一应力增量过程中，其应变的变化假定可分为弹性和塑性两部分之和，因此应力应变之间的本构关系为 Prandtl-Reuss 方程：

$$d\epsilon_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{(1-2\mu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

1.5 弹塑性矩阵 Dep 的计算

将本构方程(1)式用矩阵形式表示出来，在屈服函数表达式中， k 是控制屈服面扩张的强化参数，一般情况下取为塑性应变增量，即 $dk = d\epsilon_p$ ，屈服函数改写作：

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - K(k) = 0 \quad (2)$$

微分(2)式

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (3)$$

或

$$a^T d\sigma - H d\lambda = 0 \quad (4)$$

其中定义如下

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right]$$

矢量 a 叫做流动矢量。Prandtl-Reuss 方程即可写作

$$d\varepsilon = [D]^{-1} d\sigma + d\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \quad (5)$$

式中 D 是弹性常数矩阵。将式(5)的两边同乘 $d_p^T = a^T D$ 利用(4)式得塑性乘子 $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{1}{[H' + a^T D a]} a^T D d\varepsilon \quad (6)$$

将式(6)代入到式(5)中, 我们得到整个弹塑性增量的应力应变关系为:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (7)$$

$$D_{ep} = D - \frac{d_D d_D^T}{H' + d_D^T a} \quad d_D = D a \quad (8)$$

强化系数 H' 可由本构方程求出, 当时材料为弹性并用弹性模量 E 来表征, 此后材料就进入塑性了, 这时材料曲线的局部正切将连续地改变并将其称为弹塑性切线模量 E_T 。用等效应力可以很容易地表示强化定律 $K = K(k)$, 在应变强化为 $k = \bar{\varepsilon}_p$ 的假设下, 有:

$$\bar{\sigma} = \sigma_s + E_T (\int d\bar{\varepsilon}_p - \varepsilon_s)^n \quad (9)$$

或对其微分:

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = n E_T (\int d\bar{\varepsilon}_p - \varepsilon_s)^{n-1} \quad (10)$$

在用本构方程由应变增量求应力增量时, 须计算材料的弹塑性矩阵, 这就要求求流动矢量, 前面已将流动矢量表示成应力不变量和的函数, 故有下列式子

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (11)$$

式中

$$\sigma^T = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy} \right\}$$

在屈服函数中有变量 θ , θ 与应力不变量之间有关系式:

$$\sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{(J_2')^{3/2}}$$

微分上式我们得到:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[\frac{1}{(J_2')^{3/2}} \frac{\partial J_3'}{\partial \sigma} - \frac{3J_3'}{(J_2')^2} \frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \sigma} \right] \quad (12)$$

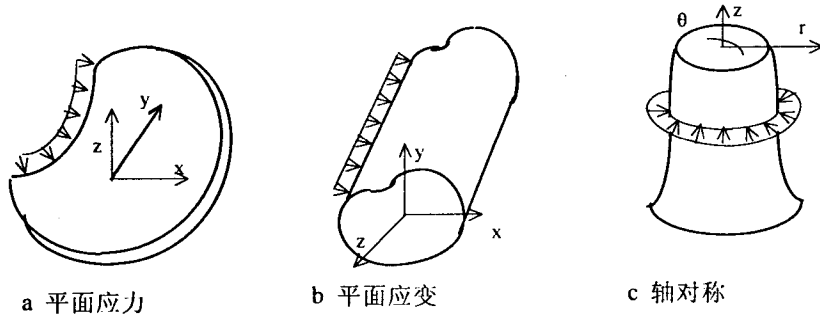
将(12)式代入(11)式并利用 θ 与应力不变量之间有关系式, 则可得到流动矢量:

$$a = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 \quad (13)$$

对平面问题, 采用直角坐标系, 对轴对称问题, 则用柱坐标系比较方便, 二维问题所采用的坐标系如图 2 所示:

在平面应力情况下, 不为零的应力有 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} , 平面应变时不为零的应力有 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 和 τ_{xy} , 轴对称时不为零的应力有 σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 和 τ_{rz} 。故应力列阵为:

$$\begin{aligned} \sigma^T &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \sigma_z\} & \sigma_z &= 0 & \text{平面应力} \\ \sigma^T &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \sigma_z\} & \varepsilon_z &= 0 & \text{平面应变} \\ \sigma^T &= \{\sigma_r \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \sigma_\theta\} & & & \text{轴对称} \end{aligned}$$



2-2 二维问题所采用的坐标系

对于平面应力和平面应变问题, Z 方向是独立坐标方向。对轴对称问题, θ 方向作为独立方向, 应力分量按上述顺序排列时, 弹性矩阵的显式为

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & \frac{\mu}{1-\mu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于轴对称情况，分别用 r 、 z 和 θ 代替 x 、 y 和 z ，在这里给出流动矢量的具体表达式

$$\begin{aligned} a_1^T &= \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} \\ a_2^T &= \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad 2\tau_{xy} \quad \sigma'_z\} \\ a_3^T &= \left\{ \left(\sigma'_y \sigma'_z + \frac{J_2}{3} \right) \quad \left(\sigma'_x \sigma'_z + \frac{J_2}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. -2\sigma'_z \tau_{xy} \quad \left(\sigma'_x \sigma'_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

应力偏量的不变量表达式为

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) + \tau_{xy}^2 \\ J_3' &= \sigma'_z(\sigma_x'^2 - J_2') \end{aligned} \quad (15)$$

弹塑性矩阵中的 d_p ，对于平面应变和轴对称情况

$$d_p = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\mu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\mu} a_2 + M_1 \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\mu} a_4 + M_1 \end{Bmatrix} \quad M_1 = \frac{E\mu(a_1 + a_2 + a_4)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (16)$$

式中

$$G = \frac{E}{2(1-\mu)} \quad \text{剪切模量}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a \text{ 的分量}$$

对于平面应力问题，表示式如下

$$d_D = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\mu} a_1 + M_2 \\ \frac{E}{1+\mu} a_2 + M_2 \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\mu} a_4 + M_2 \end{Bmatrix} \quad M_2 = \frac{E\mu(a_1 + a_2)}{1 - \mu^2} \quad (17)$$

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial J_1}$$

$$C_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2'}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2'}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$$

$$C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2')^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

1.6 刚度矩阵、不平衡力的计算、后继屈服面计算及应力修正

等参单元可以提高数值解的精度，在等参单元分析中需要使用两种坐标系，即总体坐标系和自然坐标系。总体坐标系是描述整个物体或结构所使用的坐标系，平面问题采用直角坐标系，轴对称问题采用柱坐标系。自然坐标系是用一组不超过 1 的无量纲参数 ξ 、 η 来表示单元内点的位置的坐标系。

如果平面四边形单元包含曲边，则还可以在这些曲边上填加新的节点，得到 5~9 节点曲边四边形单元，在双线性插值基本函数的基础上，迭加一个新的更高阶次的函数，可以得到相应的插值函数。5~9 节点插值函数由表 2-1 给出。如果在单元中不包括某个节点 i ($i=5\sim 9$)，表中前四行中 $N_i=0$ ，在后四行中相应地划去 N_i 行。这样由 4~9 节点等参单元的坐标和位移插值公式可表示为：

$$[x] = [N][x^e]$$

$$[u] = [N][u^e]$$

其中

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & \cdots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & \cdots & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

表 1 4~9 节点平面单元的形函数

节点号	基本形函数	补充形函数 5~8 节点	9 节点
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$ $-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$ $-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{4}N_9$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$-\frac{1}{2}N_6$ $-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{4}N_9$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$-\frac{1}{2}N_7$ $-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
5		$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_9$
6		$\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$	$-\frac{1}{2}N_9$
7		$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\frac{1}{2}N_9$
8		$\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$	$-\frac{1}{2}N_9$
9			$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$

单元内任意一点的应变增量与单元节点位移增量有如下关系:

$$\Delta \varepsilon = B \Delta u_e$$

由虚功原理, 在第 $m+1$ 载荷步的作用下, 系统的平衡方程是对总应力 σ_{m+1} 列出的:

$$\Psi(u_{m+1}) = \sum \int B^T \sigma_{m+1} dV - R_{m+1} = 0 \quad (18)$$

如果在载荷 R_m 作用下的解 u_m , σ_m 是严格准确的:

$$\Psi(u_m) = 0$$

这时系统的平衡方程(18)式可改写为

$$\Psi(u_{m+1}) = \sum \int B^T \Delta \sigma dV - \Delta R = 0 \quad (19)$$

$\Delta \sigma = D_{ep} \Delta \varepsilon$, 由此可得系统的切线刚度矩阵为:

$$K_T = \sum \int B^T D_{ep} B dV$$

(19)式是关于位移增量的非线性方程组, 求解可得增量步内的位移增量, 然后由小变形几何关系和增量本构关系求得相应的应变增量和应力增量。

这样, 由应变增量 $\Delta \varepsilon$ 就可求得应力增量 $\Delta \sigma$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \int_{\epsilon_m}^{\epsilon_m+r\Delta\epsilon} D d\epsilon + \int_{\epsilon_m+r\Delta\epsilon}^{\epsilon_m+\Delta\epsilon} D_{ep} d\epsilon = rD\Delta\epsilon + \int_{\epsilon_m+r\Delta\epsilon}^{\epsilon_m+\Delta\epsilon} D_{ep} d\epsilon \\ &= D\Delta\epsilon - \int_{\epsilon_m+r\Delta\epsilon}^{\epsilon_m+\Delta\epsilon} D_p d\epsilon\end{aligned}\quad (20)$$

在程序中，取应变增量非常小，故采用下面式子计算应力增量

其中 D_p 是按状态 $\sigma_m + \Delta\sigma^e, k_m$ 计算的塑性矩阵。我们知道，弹塑性本构方程是以应力应变的无限小增量形式给出的，而在有限元数值计算是按上述有限增量形式进行的，这样，对于理想弹塑性材料而言，最终的应力值将跑到屈服面之外，对于强化材料，由于应变硬化，还伴随屈服面的扩大，最终的应力值也不一定处于屈服面上。在有限元程序中，每加载步计算完以后还须将应力值修正到屈服面上。程序中采用幂次强化本构关系，在求后继屈服面时，在每加载步内还计算等效塑性应变

$$dk = d\lambda a^T \sigma = \sigma^T d\epsilon_p \quad (21)$$

用等效应力和等效塑性应变代入上式

$$d\lambda a^T \sigma = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}_p \quad (22)$$

因此我们得到总的等效应变

$$\bar{\epsilon}_p^{m+1} = \bar{\epsilon}_p^m + \frac{d\lambda a^T \sigma}{\bar{\sigma}} \quad (23)$$

对于线性强化材料，由于应变硬化而产生的后继屈服面为

$$\bar{\sigma}_s^{m+1} = \sigma_s + H' \bar{\epsilon}_p^{m+1} \quad (24)$$

对于幂次强化材料来说，由于每个加载步内的硬化系数 H' 不一样，程序中将材料处理成阶段硬化，即是说，将每个加载步内的硬化系数 H' 看作常数，且等于加载步开始时材料的硬化系数，这样，应力的更新不同于线性强化材料，须在每个载荷步迭代完成后求出相应的等效塑性应变增量后，实现后继屈服面更新。在第 $m+1$ 次迭代终了时的等效应变增量为：

$$d\bar{\epsilon}_p^{m+1} = \frac{d\lambda a^T \sigma}{\bar{\sigma}} \quad (25)$$

在第 $m+1$ 次迭代终了时的后继屈服应力为：

$$\bar{\sigma}_s^{m+1} = \bar{\sigma}_s^m + H' d\bar{\epsilon}_p^{m+1} \quad (26)$$

另一方面，由第 $m+1$ 次迭代终了时的应力的等效应力为：

$$\bar{\sigma}_{m+1} = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^*} \quad (27)$$

由(25)、(26)和(27)式得到应力修正系数为：

$$\zeta = \frac{\sigma_s^{m+1}}{\bar{\sigma}_{m+1}} \quad (28)$$

将第 $m+1$ 次迭代终了时的各应力分量乘以修正系数后，则应力回到屈服面

上。

1.7 分布边界载荷的计算

如图3所示,在任一单元边界上,沿法向和切向可以给定每单位长度上的分布载荷,这些分布力可沿边长变化。当外载作用的边界上的法向和切向值给定时,那么分布载荷的变化规律也就确定了,为了与单元拓扑定义中结点联结号的编排次序一致,三(或两)节点形成的承载边界相对于承载单元也必须按逆时针方向编排,图中示出了法向载荷和切向载荷的正向。

设在边界上作用有分布的法向载荷和切向载荷,那么第I个节点上的一致节点力按下式计算

$$\begin{aligned} P_{xi}^{(e)} &= \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^{(e)} \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \\ P_{yi}^{(e)} &= \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^{(e)} \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi \end{aligned} \quad (29)$$

式中 p_n 和 p_t 分别是法向和切向分布载荷,积分是沿承载单元边界 $\Gamma^{(e)}$ 进行的。对于轴对称单元,边界载荷实际上是沿单位面积上的载荷,因此按圆周方向积分。

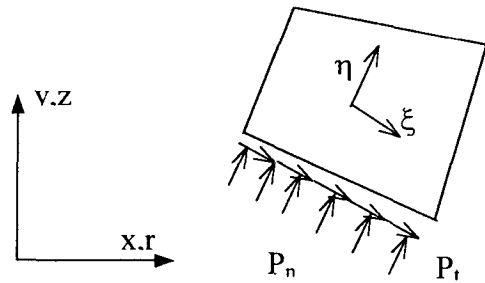


图3 单元边界的切向和法向载荷

1.8 坐标更新

金属进入塑性变形阶段后通常变形都很大,如果一直以初始坐标计算下去,难以准确拟合材料的试验曲线,影响计算结果的准确性,甚至计算结果与实际情况不符,如果在每次载荷迭代收敛后实现坐标更新,则可克服上述缺点,每次迭代以该加载步开始时的坐标为基准,如果载荷步足够小,则累积应变就是材料变形的对数应变,具体表示式为:

$$\tilde{\epsilon} = \sum \Delta \epsilon_i = \int d\epsilon \quad (30)$$

其中 $\Delta \epsilon_i$ 是第 i 步迭代时的应变增量值,它是第 i 步迭代时的位移增量 Δu_i 与当时的瞬时坐标 x_i 的比值。

$$\Delta \epsilon_i = \frac{u_i}{x_i} \quad (31)$$

在程序中,每当在一个载荷步内计算迭代终了时,将这个载荷步内的位移增量 Δu_i 与这个载荷步开始时的坐标 x_i 相加,就完成坐标更新。

$$x_{i+1} = x_i + \Delta u_i \quad (32)$$