

编号: 80-006

中国科学院工程力学研究所研究报告

# 地表冲击波对土与结构 相互作用的效应

宗 福 开

— 九 八 〇 年 一 月

51/18 TLI 4/37

~ / ~

# 地表冲击波对土与结构相互作用的效应

亲福开

## 提 要

本文提出了浅埋结构复合力学模型，对地下结构的动力特性、地表冲击波对土与结构相互作用的效应给出了明晰的结果。文中列举了计算实例，与有限元动力计算结果作了比较。并指出了目前抗爆设计常用的附加质量法的局限性。

## 一. 序

爆炸荷载下对地面上的构筑物的设计就是一个困难的问题，对于埋设在地下的结构常不~~不~~考虑它们的动力特性，而只是采用近似的静力设计的方法~~(1)(2)(3)~~。地下结构及其内部人员和设施常由于地表~~冲击波~~引起的~~强烈震动~~而被破坏或受到伤亡，这就不能不引起工程~~师~~和~~研究人员~~对地~~下~~结构抗爆设计标准的关切。

地下结构在动力荷载下的工作特点是结构变形时作用于周围介质，引起与结构相接触的介质~~各点~~的位移，因而周围介质也对结构的变形产生影响，这就是通常所说的结构与周围介质的相互作用。

对于浅埋的框架结构与介质的相互作用问题是非常复杂的，由于其数学上的困难，很难得到解析解。目前常用的弹性波动解法只能解决极简单的几种问题~~(3)(4)(5)~~。苏联学者采用波阻法~~(6)(7)~~，即把周围介质对结构的作用，用波阻力 $PC\dot{v}$ （其 $PC$ 为介质的波阻， $\dot{v}$ 为结构与介质交界面上的位移速度）来代替，

这种方法由于没有考虑波到达地表的反射影响，对于浅埋结构是有局限的。在设计上常采用附加质量法，即把周围介质与结构的相互作用，用附加在结构上一部分质量来近似处理(1)(2)(8)。这种方法虽简便但缺乏理论根据。

尽管解决这样的问题可以采用具有广泛适用性和一定精确性的数值方法，特别是有限元法。但是，出于下面的原因，分析的简化方法仍然是常用的。

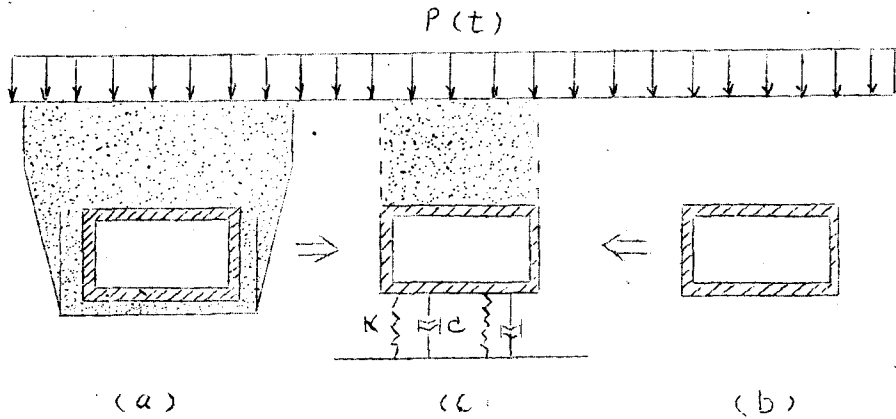
- a. 对于比较严密而复杂的问题，简化的方法可用来作为一阶近似。
- b. 它们比数值计算方法更容易使我们认识复杂问题的本质面貌。
- c. 简化分析方法能分离那些对系统行为有重要影响的参数，以便设计时考虑。

本文的主要内容是用复阻尼动力分析理论描述地下结构与周围介质之间相互作用的简化力学模型，给出了它的动力特性，并用该体系的各物理参数组成的两个综合无量纲参数来描述，并求得了在地表冲击波作用下的强迫振动反应，文中还作了计算实例并与有限元动力分析结果作了比较，结果表明，只要正确的选取简化力学模型的力学参数，复合力学模型将能给出令人满意的结果。本文还对附加质量法作了讨论，给出了附加质量系数随两个无量纲动力参数 $\xi$ 和 $\eta$ 的变化曲线，可供地下结构动力设计时参考。

## 二. 简化力学模型的建立及其基本方程.

目前，各国常用的浅埋地下框架结构可以分为两种，一种是开挖式的，即从地表向下开挖构筑结构然后回填，如图一(a)所示；另一种称为暗挖式的，可把结构周围的介质看作原状土（当

然，实际上邻近结构的介质是受松动的土，但它比回填土更接近于原状土)如图一(b)所示。



图一 浅埋框架结构及其简化力学模型

当地表承受一个空气冲击波荷载  $P(t)$  时，传递到结构顶部使结构变形，当结构的刚度远大于周围介质的刚度时（如图一(a)）结构作为刚体的整体运动成为结构各点位移的主要成分，并影响着结构周边的荷载，当结构置于坚硬介质或结构底部为坚硬介质时，如果顶板的弯曲刚度远大于侧墙（反立柱）的拉压刚度时，顶板的整体运动亦成为顶板各点位移的主要成分。显然，当我们略去结构顶部的横向稀疏波、拱纹应等次要因素，并把结构（顶板）与侧部及底部介质的相互作用用集总参数  $K$ （刚度系数）和  $C$ （阻尼系数）来描述，那么图一(c)的简化力学模型可以得到。文献〔9〕也给予了这种启示。

对于简化力学模型我们作了如下几点假定：

a. 所研究的地下通道横向尺寸远小于纵向尺寸，可作为平面变形处理，只需研究单位厚度的剖面的运动。

b. 正如前面所述的，略去结构构件本身的扭曲变形，并只

考虑结构的垂直向运动，略去波在结构中传播的影响。

C. 结构顶部复土考虑为具有复阻尼的线性滞变弹性阻尼体，即认为土体应变的相位总是落后于应力的相位角 $\gamma$ ，其应力—应变关系式为

$$\sigma = e^{i\gamma} E \epsilon \quad (2.1)$$

d. 把复土—结构—地基考虑为一个复合力学体系，结构与其侧部和底部介质的相互作用用一个弹簧和一个阻尼器来代替，即通常所称的集总参数法。关于这些参数的确定方法将在第三节中专门讨论。

在上述基本假定下，对图—(c)的力学模型的土体写出运动方程为：

$$N dx = \rho A \ddot{u} dx \quad (2.2)$$

其中  $N$  为  $x$  方向作用在  $x$  截面上的力， $u$  为土体质点  $x$  方向位移， $\rho$  为土体密度， $A$  为土体截面积， $\ddot{u}$  表示  $u$  对时间的二次导数。

将 (2.1) 代入 (2.2)，并利用关系式  $N = \sigma A$ ，即得

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{u} dx &= E A e^{i\gamma} \epsilon'' dx \\ e^{i\gamma} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中  $a^2 = E/\rho$

土体运动的边界条件为：

$$\begin{aligned} e^{i\gamma} E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -p(t) \\ e^{i\gamma} E A \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=h} &= -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=h} - \bar{K} u \Big|_{x=h} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中  $M$  为模拟刚体运动的结构的质质量， $\bar{K}$  为复刚度。

### 三. 模型力学参数的确定

#### 1. 结构顶部复土的复阻尼参数的确定

如前所述, 我们把复土介质的动力性质用线性滞变阻尼理论来描绘(10)(11)。γ值可近似取常数, 它取决于不同的土介质种类, 根据式(2.1)介质的滞变曲线方程为

$$\sigma = E \varepsilon \cos \gamma \pm E \varepsilon_s \sin \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^2} \quad (3.1)$$

$$\text{耗散系数 } \psi = \frac{\Delta U}{U_0} = 2\pi \sin \gamma \quad (3.2)$$

$$\text{其中 } \Delta U = \int \sigma d\varepsilon = \int_0^{2\pi/\varepsilon} \sigma \dot{\varepsilon} dt = E \varepsilon_s^2 \pi \sin \gamma$$

$$U_0 = \frac{1}{2} E \varepsilon_s^2$$

ε<sub>s</sub>为弹性应变

ψ值是可以由实验来测定的, 可根据(3.2)求得介质的γ值。通常习惯采用粘滞阻尼理论并通过实验给出了各种材料在各频率下的阻尼比 λ =  $\frac{12}{\omega}$  当取 λ =  $\frac{\gamma}{2}$  时, 对于单自由度体系的谐振动情形, 两种阻尼理论的对数递减量是相同的, 在我们冲击振动的情况, 为简单起见, 也取

$$\gamma = 2\lambda \quad (3.3)$$

#### 2. 结构底部和侧边介质的等效复刚度。

由前面的基本假定, 对于如图-(b)的浅埋结构, 与其侧部和底部介质的相互作用可利用 M. Novak (12)的埋设地基的研究结果, 他是将地基底部土对地基的作用力采用半无限平面上的地基的几何阻尼 C<sub>g</sub> 的阻尼力和动力刚度 K<sub>g</sub> 的弹性力的组合力 R<sub>g</sub> 来表示, 再利用 J. Lyaminec (13) 的常值比拟法, 求得底土对结构作用的等效阻尼 C<sub>z</sub><sup>b</sup> 和等效动力刚度 K<sub>z</sub><sup>b</sup>, 它们与干扰频率无关, 其表达式为:

$$C_z^b = \frac{3.4 Y_b^2}{1 - \mu_b} \sqrt{\rho_b G_b}$$

$$K_z^b = \frac{4 G_b Y_b}{1 - \mu_b}$$
(3.4)

其中  $\rho_b$ ,  $G_b$ ,  $\mu_b$  分别为结构底部介质的密度、剪切模量和波速比,  $Y_b$  为结构底板的等效半径, 可用下式计算

$$Y_b = \sqrt{\frac{4ld}{\pi}}$$
(3.5)

其中  $l$ ,  $d$  为结构底板的长和宽。

对于结构底部敷设有松软垫土层的情况, 如图- (a), 由于从结构底部向下传播的波在该垫层中来回反射积聚能量, 因此,  $C_z^b$  近于零, 而  $K_z^b = \frac{E_b l d}{\delta}$  ( $E_b$  为垫层的弹性模量,  $\delta$  为垫层的厚度), 文献 (9) 的计算结果也证实了这一点。

M. Navok 引用了 Baranov, V. A (14) 对埋设圆柱形基础的圆周表面周围介质假定为一系列相互独立的薄片组成, 推导出了基础与周围介质之间的相互作用力, 利用常值比拟法求得等效动力刚度和等效阻尼为:

$$C_z^s = 0.67 G_s \cdot k_c \cdot Y_s \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}}$$

$$K_z^s = 2.6 G_s \cdot k_c$$
(3.6)

其中  $Y_s = \frac{h \cdot d}{\pi}$ ,  $k_c$  为框架的计算高度。

应当指出, 对于浅埋框架结构, 其复土与结构和周围介质也存在相互作用, 它对  $C_z^s$  和  $K_z^s$  有一定的影响。为了简便, 我们把这种影响用折算高度 (相当于附加刚体的高度) 加到框架高度上作为计算高度来考虑。

最后, 我们把 (3.4) 和 (3.6) 叠加, 即得到框架结构底部和

侧部介质对结构抗力的总的的作用，

$$K_z = K_z^b + K_z^s = \frac{4G_b Y_b}{1-\alpha b} + \varepsilon \cdot 6 G_s f_c \quad (3.7)$$

$$C_z = C_z^b + C_z^s = \frac{3.4 Y_b^2}{1-\alpha b} \left[ \sqrt{\beta_b G_b} + 6.67 G_s f_c Y_b \right] \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}}$$

用复刚度来表示为

$$\bar{K} = K_z e^{i\gamma} \quad (3.8)$$

其中  $\gamma = \frac{C_z}{\sqrt{K_z M}}$

#### 四. 复合力学模型的自振特性

先讨论图-(c) 模型当  $\gamma = \gamma_s = 0$  时体系的基本振型和频率。这时 方程 (2.3) 和 (2.4) 写为：

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} - K_s u \Big|_{x=l} \end{cases} \quad (4.2)$$

用分离变量法 (15)，不难求得特征方程和振型函数为。

$$\lambda y \frac{P_i \cdot k}{a} = \frac{K_s a}{r P_i} - \frac{m a P_i}{\gamma} \quad (4.3)$$

$$\Sigma_i(x) = C_i C_{\omega} \frac{P_i x}{a} \quad (4.4)$$

(4.3) 可写成如下简洁的形式



$$\text{tg } \xi \bar{P}_i = \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{P_0} - \bar{P}_i \right) \quad (4.5)$$

其中

$$\xi = \frac{P_0 h}{a}, \quad \eta = \frac{Y}{M P_0 a}$$

$$\bar{P}_i = P_i / P_0, \quad P_0 = \sqrt{K_s^2 / M}$$

$$Y = EA$$

方程(4.5)为用两个无量纲参数 $\xi$ 和 $\eta$ 表示的浅埋结构与介质相互作用体系频率的超越方程。可以采用图解法或电算法求得复合体系在不同参数 $\xi$ 和 $\eta$ 时频率比 $\bar{P}_i$ ，这说明体系的自振特性并不取决于体系的单一物理量，而是取决于组合参数 $\xi$ 和 $\eta$ ，它们对于浅埋结构的模拟试验及其动力设计都具有重要的意义。我们把 $\xi$ 和 $\eta$ 称之为复合力学模型的无量纲动力参数。

$\xi$ 和 $\eta$ 具有明确的物理意义。

1. 称 $\xi = \frac{P_0 h}{a}$ 为相对振动周期

$$\xi = \frac{\pi}{2} \cdot T_{50} / T_{st} \quad (4.6)$$

其中 $T_{50} = \frac{4h}{a}$ 表示一端自由一端固定的一维土体纵向振动的基本周期。 $T_{st} = \frac{2\pi}{P_0}$ 表示无复土时地下结构的基本周期。

式(4.6)表明了，参数 $\xi$ 是从土体本身和无复土的结构这两个独立部分的基本振动周期的比值来反映浅埋地下结构的相互作用的动力特性的。从后面的分析我们将看到，参数 $\xi$ 对于复合

体系的自振特性的影响是十分敏感的。

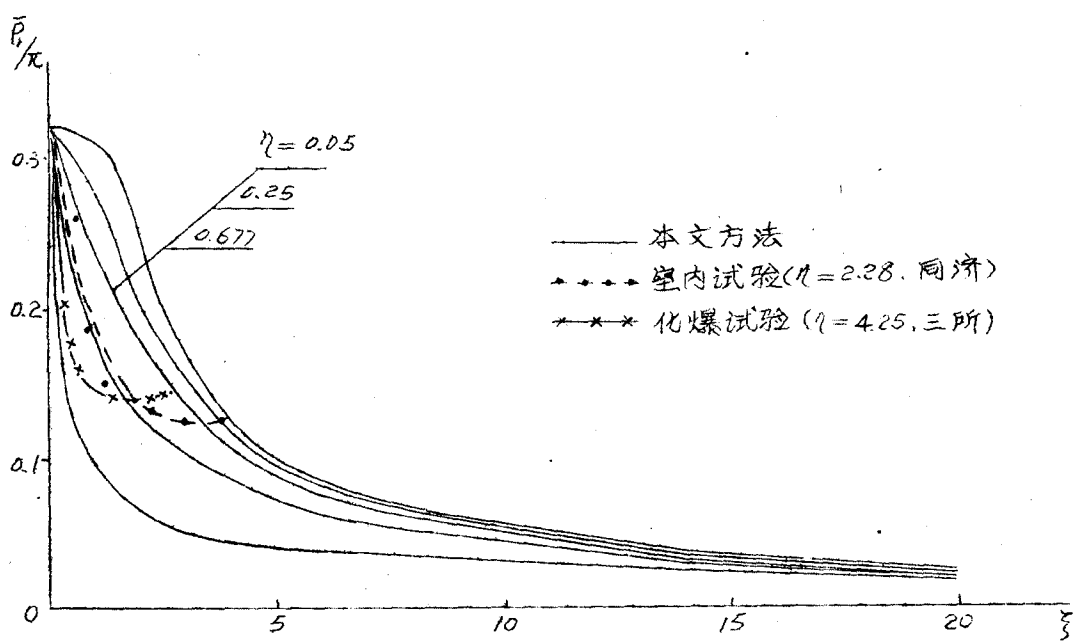
2. 称  $\eta = \frac{EA}{MP_0A} = \frac{\rho a}{m \rho_0}$  为相对声阻抗

$\eta = R_{s0} / R_{st}$  其中  $m = \frac{M}{A}$  (4.7)

其中  $R_{s0} = \frac{EA}{A}$  表示一维土体的声阻抗  $R_{st} = m\rho_0$  表示无复土时，地下结构的等效声阻抗。

式(4.7)表明了，参数  $\eta$  是从土体本身和无复土的结构这两个独立部分的声阻抗参数的比值来反映浅埋地下结构的相互作用的动力特性的。从后面的分析可以看到，参数  $\eta$  对体系的自振特性具有重要的影响。

我们得到一个结论，无阻尼的复合力学体系的自振特性不仅取决于两个独立体系的自振频率，也与它们的声阻抗有关。这就是浅埋结构与介质相互作用的重要特征。



图二. 浅埋结构基频变化曲线

图二为频率方程(4.5)用数值解法所给出的体系的基频 $\bar{p}_1$ 与无量纲动力参数 $\xi$ 和 $\eta$ 的关系曲线,从图中可得如下几点结果:

(1) 复合力学体系的基频小于不带复土的M-K体系的基频;  
 (2)  $\bar{p}_1$ 随 $\xi$ 的增加而减少的速度是一个很有趣的现象,当 $\xi$ 不太大时(小于2), $\eta > 1/2$ ,则 $\bar{p}_1$ 随 $\xi$ 增加其衰减的速度是变大的,而当 $\xi > 2$ 之后,无论 $\eta$ 值取多少,则 $\bar{p}_1$ 随 $\xi$ 的增加,其衰减的速度是变小的,并逐渐趋近于零。

(3) 存在一个 $\xi_{cr}$ 值(约27),当 $\xi > \xi_{cr}$ 时,体系的 $\bar{p}_1$ 以极缓慢的速度随 $\xi$ 增加而减少,并且不同的 $\eta$ 值对 $\bar{p}_1$ 的影响不大,我们称 $\xi_{cr}$ 为临界相对振动周期,也就是说,对于一定的体系,当埋深 $h$ 大于某一值 $h_{cr} = \frac{\xi_{cr} a}{\rho_0}$ 时,可以不必考虑埋深对体系振动特性的影响。

从后面的计算实例看到,采用复合力学体系求得的基频与用有限元法求解如图-1(a)地质条件的体系的基频只相差10%以内(9)。同济大学和我军工程兵某部对埋设梁做了室内和野外化爆试验(16)(17),其结果在图二中用点划线表示,当 $\xi < 1$ 时,与本文所提供的曲线较为接近;而当 $\xi$ 较大时,相差较多,这可能是由于化爆为点爆源以及介质参数给得不十分正确所造成的,另外,当 $\xi$ 较大时介质的弯曲刚度的影响在本文中未加考虑也是造成离散的原因。

当考虑介质的复阻尼时,其频率计算公式(11):

$$P_i^c = P_i \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \approx P_i \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (4.8)$$

当 $\gamma = 2\lambda$ 较小时, $P_i^c \approx P_i$

### 五. 地表冲击波荷载作用下复合力学模型的动力反应

模型图-(c) 中地表受冲击波荷载为

$$P(t) = P_m \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \quad (5.1)$$

求解方程 (2.3) 和 (2.4)

令方程 (2.3) 的解为

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (5.2)$$

$$\text{其中 } u_2(x, t) = \frac{P_m}{E e^{i\gamma}} \left( \frac{EA e^{i\gamma}}{K_s e^{i\gamma_0}} + h - x \right) \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \quad (5.3)$$

上式中利用了公式 (3.8).

把式 (5.2) 和 (5.3) 代入 (2.3) 和 (2.4) 式, 得

$$e^{i\gamma} a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ -e^{i\gamma} E \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=h} = \frac{K_s e^{i\gamma_0}}{A} u_1 \Big|_{x=h} + \frac{M}{A} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=h} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = -\frac{P_m}{E e^{i\gamma}} \left( h + \frac{AE}{K_s e^{i\gamma_0}} e^{i\gamma} - x \right) \\ \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = \frac{P_m}{E \theta e^{i\gamma}} \left( h + \frac{EA e^{i\gamma}}{K_s e^{i\gamma_0}} - x \right) \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\text{令 } u_1(x, t) = \bar{x}(x) T(t) \quad (5.7)$$

则方程 (5.4) 变为

$$\ddot{X}(x) + \frac{P^2}{a^2} X(x) = 0 \quad (5.8)$$

$$\ddot{T}(t) + e^{2\gamma} p^2 T(t) = 0 \quad (5.9)$$

如果略去小阻尼  $\gamma$  和  $\gamma_2$  对体系振型和频率的影响, 则频率方程和振型函数同 (4.5) 和 (4.4) 式 (5.9) 的解为:

$$T_i(t) = e^{-\nu \beta_i t} [C_i \cos \beta_i^c t + D_i \sin \beta_i^c t] \quad (5.10)$$

其中  $\nu = \sin \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$

$$\beta_i^c = \beta_i \cos \frac{\gamma}{2} \approx \beta_i$$

这样, 方程 (5.4) 的解为

$$u_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} \beta_i t} \cos \frac{\beta_i}{a} x [C_i \cos \beta_i t + D_i \sin \beta_i t] \quad (5.11)$$

其中的  $C_i$  和  $D_i$  为待定常数, 可利用初始条件 (5.6) 来确定。

由 (5.6) 第一式得

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos \frac{\beta_i}{a} x = -\frac{P_m}{Ee^{2\gamma}} \left( k + \frac{AEe^{2\gamma}}{K_i E \gamma_2} x \right) \quad (5.12)$$

利用振型函数  $X_i(x)$  在  $x$  等于零到  $l$  范围内的正交性, 并注意这里的正交条件是附带有附加项的, 经过一系列运算之后可得

$$C_i = \frac{\frac{P_m}{Ee^{2\gamma}} \frac{k^2}{\beta_i^2}}{\frac{k}{2} \left( 1 + \frac{\sin c \beta_i}{2 \beta_i} \right) + \frac{M a^2}{E e^{2\gamma} A} \cos^2 \beta_i} \quad (5.13)$$

其中  $\beta_2 = \frac{P_2 h}{a}$

用同样的方法，由(5.6)第二式可得

$$P_2 D_2 = \frac{\frac{P_m}{E e^{2\gamma}} \frac{h^2}{\beta_2^2}}{\frac{h}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\beta_2}{2\beta_2}\right) + \frac{M a^2}{E e^{2\gamma} A} \cos^2 \beta_2} \quad (5.14)$$

式(5.13)、和(5.14)代入(5.11)可得

$$u_1(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_m h^2 e^{-\frac{\gamma}{2} P_2 t} \cos \frac{P_2 x}{a} \left[ \frac{1}{P_2 \theta} \sin P_2 t - \cos P_2 t \right]}{E e^{2\gamma} \beta_2^2 \left[ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\beta_2}{2\beta_2}\right) + \frac{M a^2}{E e^{2\gamma} A} \cos^2 \beta_2 \right]} \quad (5.15)$$

把(5.15)式和(5.3)式代入(5.3)即得问题的全解

$$u(x, t) = \frac{P_m}{E e^{2\gamma}} \left( \frac{E A e^{2\gamma}}{k_2 c^{2\gamma/2}} + h - x \right) \left( 1 - \frac{x}{b} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_m h^2 e^{-\frac{\gamma}{2} P_2 t} \cos \frac{P_2 x}{a} \left[ \frac{1}{P_2 \theta} \sin P_2 t - \cos P_2 t \right]}{E e^{2\gamma} \beta_2^2 \left[ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\beta_2}{2\beta_2}\right) + \frac{M a^2}{E A e^{2\gamma}} \cos^2 \beta_2 \right]} \quad (5.16)$$

复土介质中任一点的压力  $P(x, t)$  为

$$P(x, t) = -E e^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$P(x, t) = P_m \left( 1 - \frac{x}{\theta} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_m h e^{-\frac{\gamma}{2} P_2 t} \sin \frac{P_2 x}{a} \left[ \frac{1}{P_2 \theta} \sin P_2 t - \cos P_2 t \right]}{\beta_2 \left[ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\beta_2}{2\beta_2}\right) + \frac{M a^2}{E A e^{2\gamma}} \cos^2 \beta_2 \right]} \quad (5.17)$$

式(5.16)和(5.17)中均有实部和虚部两部分，因为外加荷载为实数荷载，所以，只要取其实部即为所求的解。把  $x = \xi$  代入上两式，经过整理即得结构顶部的位移和荷载的表达式。

$$U(\xi, t) = \frac{P_m A}{K_A} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{\theta}\right) \cos \gamma \xi + \sum_{i=1}^{\infty} U_i e^{-\frac{\gamma}{2} P_i t} \sin(P_i t + \xi_i) \right\} \quad (5.18)$$

$$\text{其中 } U_i = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{P_i^2 \theta^2}} \cdot \cos P_i \xi}{\frac{1}{2} \xi \eta \bar{P}_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\xi \bar{P}_i}{2 \xi \bar{P}_i}\right) \cos \gamma + \bar{P}_i^2 \cos^2 \xi \bar{P}_i + \delta_i^2} \quad (5.19)$$

$$\delta_i = \frac{\frac{1}{2} \xi \eta \bar{P}_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\xi \bar{P}_i}{2 \bar{P}_i}\right) \cos^2 \gamma}{\cos \gamma \left(1 - \frac{\sin 2\xi \bar{P}_i}{2 \xi \bar{P}_i}\right) + \frac{2}{\xi \eta} \cos^2 \xi \bar{P}_i}$$

其中  $\xi \eta \xi_i = -P_i \theta$

由于  $\gamma$  较小，一般来说有

$$\delta_i \ll \frac{1}{2} \xi \eta \bar{P}_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\xi \bar{P}_i}{2 \xi \bar{P}_i}\right) \cos \gamma + \bar{P}_i^2 \cos^2 \xi \bar{P}_i$$

$$P(\xi, t) = P_m \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{\theta}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i e^{-\frac{\gamma}{2} P_i t} \sin(P_i t + \xi_i) \right\} \quad (5.20)$$

其中

$$\theta_i = \frac{\sin \xi \bar{P}_i \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{P_i^2 \theta^2}}}{\frac{1}{2} \xi \bar{P}_i \left(1 + \frac{\sin 2\xi \bar{P}_i}{2 \xi \bar{P}_i}\right) + \frac{\xi \bar{P}_i \cos \gamma}{\xi \eta} \cos^2 \xi \bar{P}_i + \lambda_i} \quad (5.21)$$

$$\lambda_i = \frac{\frac{2 \xi \bar{P}_i \cos^2 \gamma}{\xi^2 \eta^2} \cos^2 \xi \bar{P}_i \sin^2 \gamma}{\left(1 + \frac{\sin 2\xi \bar{P}_i}{2 \xi \bar{P}_i}\right) + \frac{2 \cos \gamma}{\xi \eta} \cos^2 \xi \bar{P}_i}$$

同样，由于  $\gamma$  较小，有

$$\lambda_i \ll \frac{1}{2} \xi \bar{P}_2 \left( 1 + \frac{\sin \xi \bar{P}_2}{\xi \bar{P}_2} \right) + \frac{\xi \bar{P}_2 \cos \xi}{\xi^2} \cos^2 \xi \bar{P}_2$$

从 (5.20) 和 (5.18) 可以看到它们的形式是相似的，因此可以用相同形式的公式求得结构顶部的位移和压力峰值。如果略去高阶项，则由

$$\frac{du(\xi, t)}{dt} = \frac{dP(\xi, t)}{dt} = 0 \quad \text{得}$$

$$\cos(P_1 t + \xi_1 + \xi') = \frac{e^{\frac{\gamma}{2} P_1 t} \cos \gamma \xi}{\alpha_1 P_1 \theta \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \quad (5.22)$$

$$\cos(P_2 t + \xi_2 + \xi') = \frac{e^{\frac{\gamma}{2} P_2 t}}{\alpha_2 P_2 \theta \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \quad (5.23)$$

其中  $\alpha_1 \xi' = \frac{\gamma}{2}$

从上两式可求得位移和压力的极值到时间。

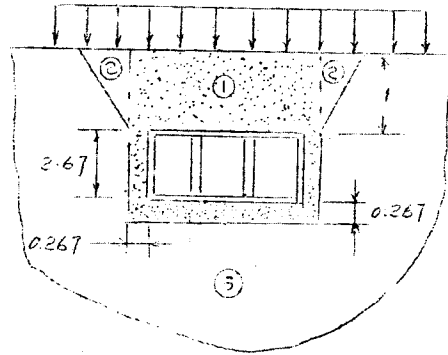
从公式 (5.18) 和 (5.20) 的结构位移及结构顶部荷载表达式可以看到，它们是由反应初期的瞬态项和一系列衰减的周期性振动的稳态项这两部分组成，通常稳态的高阶项衰减很快，只取第一项即可。

## 六. 计算实例

用本文提出的复合力学模型计算了文献 [9] 中 No 11 浅埋三跨框架结构，并与用有限元动力计算所得结果进行比较。

文献 [9] 中 No 11 模型的剖面图及地质参数为





图三 N2 11 剖面图

力学参数

	$E(\text{Kg/cm}^2)$	$\rho(\text{Kg Sec}^2/\text{cm}^4)$	$\mu$	$\lambda$
①	129	208	0.3	0.08
②	7400	288	0.2	"
③	$1.56 \times 10^5$	288	0.1	"
结构	$8.7 \times 10^4$	288	0.13	"

框架总的质量  $M = 6.34 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{Sec}^2/\text{m}$ 。地表冲击波波形为突然加载而后以指数衰减的曲线：

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{0.2}\right) e^{-0.8t} \quad (6.1)$$

为与采用第五节中的计算公式，把 (6.1) 式化为等效三角形荷载为

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{0.121}\right) \quad (6.2)$$

根据第三节复合力学模型的力学参数的确定方法，取复土复模量  $E = 129 e^{-0.16i} \text{ Kg/cm}^2$ 。