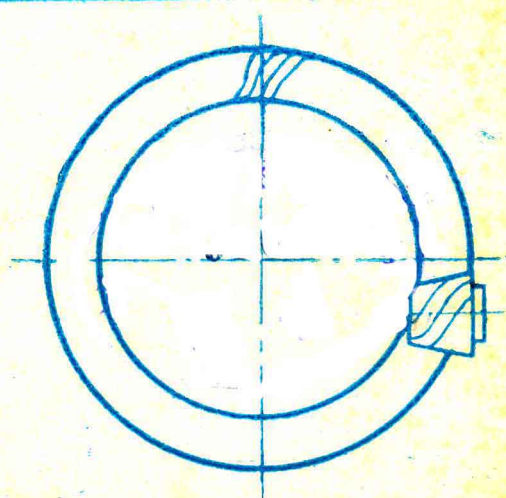


准双曲面齿轮的 设计和制造

Boris A. Shtipelman 著
卢春光 常炯 译



南昌齿轮厂
南昌齿轮研究所

代 序

《准双曲面齿轮的设计与制造》一书全面而详尽地论述了准双曲面齿轮的几何计算方法。作者为准双曲面齿轮(包括螺旋锥齿轮)的设计和制造推导出基本通用公式。这是本书独到之处。关于准双曲面齿轮的设计和所需的机床调整计算,其它齿轮书籍实质上是重复格里生工厂的表格程序算法,几乎没有涉及到基本理论和数学分析。

本书可分为以下三大部份: 1.准双曲面齿轮运动学和几何学的理论分析; 2.准双曲面大小齿轮加工时机床调整参数计算的理论基础; 3.展成法和半展成法齿轮的齿坯尺寸和机床调整计算公式。准双曲面齿轮在齿轮传动中具有代表性。准双曲面齿轮的基本理论和法则同样可运用其它所有型式齿轮。本书阐述的理论和推导出的数学关系为设计人员和制造工程师提供了又一种可选用的重要方法; 这种方法可改善准双曲面齿轮的设计、制造及其应用。

总而言之,鲍里斯·舒蒂别尔曼(Boris Shtipelman)所著一书是对准双曲面齿轮的设计和制造技术一项重大贡献。

阿劳(Arrow)齿轮公司总工程师

约翰C·莱明(John C. Leming)

前 言

齿轮传动机构作为现代机器一个组成部件被用于传递轴之间功率。可在平行轴、相交轴和斜交轴（即非相交轴）之间传递功率。前二种情形通常采用正齿轮、斜齿轮、锥齿轮，第三种情形通常采用斜螺旋齿轮和蜗轮。但是非相交轴功率的传递也可以用准双曲面齿轮。这种齿轮具有如下优点：1. 准双曲面齿轮的承载能力相同于或大于蜗轮，而且不必用有色金属（例如黄铜）制造；2. 因为准双曲面齿轮制造方法在齿面间提供了线性接触，而螺旋齿轮则为点接触，所以准双曲面齿轮承载能力大于交错轴斜齿轮；3. 在齿轮付尺寸和速比相同条件下，准双曲面齿轮付小齿轮大于锥齿轮付小齿轮，所以准双曲面齿轮承载能力大于锥齿轮；4. 准双曲面齿轮付小齿轮可采用二端支承轴承，有较高的承载能力和啮合刚性；5. 准双曲面齿轮付接触率较大且啮合齿面可纵向滑动，所以功率传递平稳、噪音小；6. 准双曲面齿轮付的设计和制造可满足任何轴夹角和很宽的速比范围要求；7. 准双曲面齿轮付由于啮合齿面有相对滑动，所以有较好的跑合条件。

准双曲面齿轮由于具有上述优点而得到广泛应用。汽车工业中主要用于车辆后桥〔1〕。准双曲面齿轮也用于农业机械、印刷机械、海军艇舰、飞机动力装置、轧钢机和造纸机中，在机床上，例如在锥齿轮和准双曲面齿轮铣齿机上，准双曲面齿轮和蜗轮一样已用于工件分度和摇台转动。用于这种场合的齿轮必须经热处理和磨削加工。因准双曲面齿轮比蜗轮可承受较高圆周速度，故可降低机床切齿时间，提高机床生产率和经济效率。

关于准双曲面齿轮的设计和制造，现代工业均采用格里森工厂的方法。格里森工厂于1925年开始准双曲面齿轮的设计，并于1947年、1956年、1954年、1950年和1971年对计算方法作了多次改进。每一次对几何参数计算和机床调整参数计算都列出如计算程序一样的表格型式〔2、3、4、5、〕。这不利于对准双曲面齿轮基本理论的理解和分析。某些理论问题在欧内斯特·怀尔德哈伯（Ernest Wildhaber）〔6—18〕和梅里韦瑟巴克斯特（Meriwetherl）（Baxter）〔19〕的一系文章中已经阐述过。但是，还没有齿轮文献对计算程序提供有充分根据的理论和数学的分析。这就使得在设计和制造新准双曲面齿轮传动付时难于从本质上应用格里生制度。

本书通过研究渐缩齿高的曲线轮齿正交准双曲面齿轮付说明准双曲面齿轮付几何设计参

数的计算，介绍小齿轮和大齿轮加工时机床调整参数计算方法。与参考文献〔20〕相同，本书研究了齿轮速比数小于10的普通准双曲面齿轮，分析了没有刀倾机构而有滚比修正装置机床切齿。同时本书分析研究了切削方法对接触形式(齿轮制造中一项主要技术要求)的影响。

本书共分七章。第一章介绍准双曲面齿轮付主要啮合特点、相对运动、节表面，齿面和齿面接触。第二章论述准双曲面齿轮的设计(包括节锥参数、齿坯尺寸和轮齿尺寸)。第三章介绍准双曲面齿轮付小齿轮和大齿轮切齿过程的原理。

随后二章为机床调整的参数计算。第四章是关于非展成法准双曲面齿轮付的加工。第五章是关于展成法准双曲面齿轮付的加工。第六章介绍准双曲面齿轮的轮齿接触区和接触区缺陷的修正方法。第七章以表格形式综合准双曲面齿轮设计和制造的一般计算程序。

作者深忱感谢马丁·卢卡乔(Martin Lukacher)、帕登特阿托奈(Patent Attorney)、纽约洲洛切斯特市法雷尔(Farrel)公司许多友人和内林(Nathan)以及埃拉谢文(Ella Shevin)的大量建议和友好帮助。同时衷心感谢美国齿轮制造协会杰拉尔德·斯科特(Gerald Scott)为本书校阅部分章节和阿劳(Arrow)齿轮公司约翰西·莱明(John C. Leming)给予的合作；衷心感谢约瑟夫·齐格蒙殊(Joseph G. Zymlant)和乔伊斯·弗曼(Joyce Silverman)校阅本书手稿并提出大量文字修改意见。此外，作者还应感谢纽约洲洛切斯特的格里森工厂允许引用他们工厂机床和刀盘的表格数据。

鲍里斯·舒蒂别尔曼
(Boris A. Shtipelman)

于纽约洲洛切斯特市

1978年7月

目 录

| | |
|---------------------------------------|---------|
| 第一章 准双曲面齿轮付的啮合特性..... | (1) |
| 1.1 相对运动..... | (2) |
| 1.2 节表面..... | (5) |
| 1.3 轮齿表面和轮齿接触..... | (13) |
| 1.4 轮齿凸面和凹面的啮合特性..... | (17) |
| 1.5 极限压力角和准双曲面齿轮两异侧齿面的压力角..... | (22) |
| 1.6 轮齿表面接触的参数..... | (31) |
| 第二章 准双曲面齿轮付的设计..... | (47) |
| 2.1 节锥参数的选定..... | (47) |
| 2.2 准双曲面齿轮的齿坯尺寸..... | (52) |
| 2.3 把所设计的准双曲面齿轮传动转化成等高齿的准双曲面齿轮传动..... | (60) |
| 2.4 准双曲面齿轮轮齿的计量尺寸..... | (62) |
| 2.5 准双曲面齿轮的接触率..... | (70) |
| 第三章 准双曲面传动大小轮切齿过程原理..... | (72) |
| 3.1 准双曲面大小齿轮的制造特性..... | (72) |
| 3.2 轮齿表面的结构..... | (85) |
| 3.3 收缩齿高的准双曲面齿轮的基本制造特性..... | (101) |
| 3.4 准双曲面小轮的修正展成..... | (112) |
| 第四章 切制半展成法准双曲面齿轮传动的展成机调整计算..... | (121) |
| 4.1 切制非展成准双曲面大轮的调整计算..... | (121) |
| 4.2 切制半展成法小轮的调整计算..... | (126) |
| 4.3 展成机床调整数据的计算..... | (139) |
| 第五章 切制展成法准双曲面齿轮传动的展成机调整计算..... | (144) |
| 5.1 切制展成法准双曲面大轮的调整计算..... | (144) |
| 5.2 切制展成法准双曲面小轮的调整计算..... | (149) |
| 第六章 准双曲面齿轮付的轮齿接触区及其修正..... | (161) |
| 第七章 准双曲面齿轮设计与制造的一般计算程序..... | (171) |
| 参考文献..... | (246) |

第一章 准双曲面齿轮付的啮合特性

准双曲面齿轮是齿轮传动中最具有通性的一种齿轮。例如，当小轮对大轮中心向上或向下的轴线偏移距等于零时，准双曲面齿轮变成螺旋锥齿轮；当轮齿纵向曲率等于零时，准双曲面齿轮变成斜齿锥齿轮；如果轴夹角等于零，则变成螺旋圆柱齿轮，等等。因此，准双曲面齿轮的啮合理论是研究其他所有齿轮啮合的良好辅导。

曲线齿准双曲面齿轮与螺旋锥齿轮的加工原则上没有什么区别，两种齿轮都用同样的机床和刀具制造〔21〕。通过机床的某种调整可得到所要求的轮齿接触。正确的接触型式可补偿齿轮的安装误差和载荷下的偏移，并允许齿轮有少量移动。准双曲面齿轮可用直刃刀片或曲线刃刀片的刀盘切齿〔22,23,24〕。

与螺旋锥齿轮一样，准双曲面齿轮可用展成法、非展成法或半展成法 (Formate)〔25,26〕加工。对于展成法，小轮和大轮都是用回转着带有刀具的摇台来切齿的。对于非展成法或半展成法，回转摇台的加工仅用于半展成小轮，而大轮则用非展成加工。众所周知〔27,28〕，还有螺旋成形法齿轮付。然而，与制造方法无关，准双曲面齿轮付的基本几何关系是不变的。首先，必须知道小轮相对于大轮中心的位置，即向上或向下的偏移距。偏移位置决定轮齿的螺旋方向，对着大轮齿面看，并使小轮位于右边，若小轮位于大轮中心之下，则小轮是左旋，而大轮是右旋 (图1.1a和1.1b)。如果小轮位于大轮中心之上，则小轮是右旋，而大轮

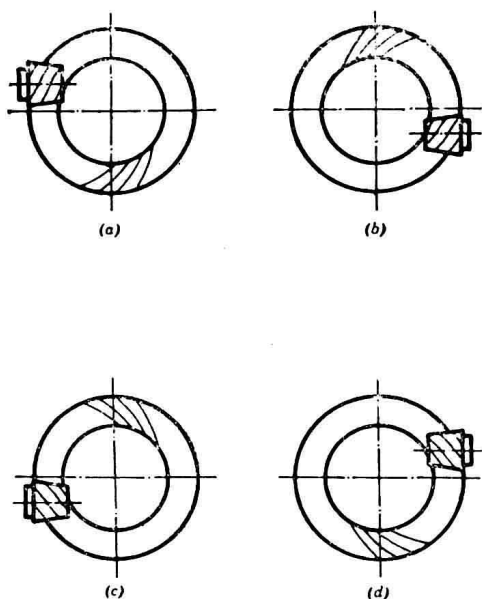


图1.1 准双曲面齿轮轮齿的螺旋方向。(a, b)小轮左旋，大轮右旋 (朝大轮看且小轮在右边)当小轮位于大轮中心之下时。(c, d)当小轮位于大轮中心之上时，小轮右旋，大轮左旋。

是左旋 (图1.1c和1.1d)。此外，准双曲面齿轮付系由多个参数和因素表示，且它们均影响齿轮的几何形状、轮齿状态、大小轮的切齿工艺和轮齿的齿廓形状。在所需的轮齿表面接触获得之前，准双曲面齿轮的设计和制造过程中是难于确定这些因素的。为了消除这些困难，必须对某些齿轮参数加以一定的限制。首先必须限制节锥参数，不过，这些限制并非一

成不变。例如〔29〕，对高传动比并经磨齿的准双曲面齿轮付的几何计算，为使齿轮可在现有机床上通过切削和磨削的方法而获得满意的轮齿接触区，就需要对节锥参数进行特定的计算，但这种计算并不改变齿轮付的基本关系，仅赋予某些几何计算的特殊性质而已。

1.1 相对运动

如上所述，准双曲面齿轮是在不相交的轴线间传递功率的。两轴的相互位置通常用两轴线间最短距离（即准双曲面轴线偏移距 E ）和轴夹角 Σ 来表示。通常，轴夹角可为任意值，但最常用的正交准双曲面齿轮付的轴夹角为 90° 。具有 90° 轴夹角且准双曲面偏移距 $O_1O_2 = E$ 的两轴线 X_1 和 X_2 的相互位置见图1.2。

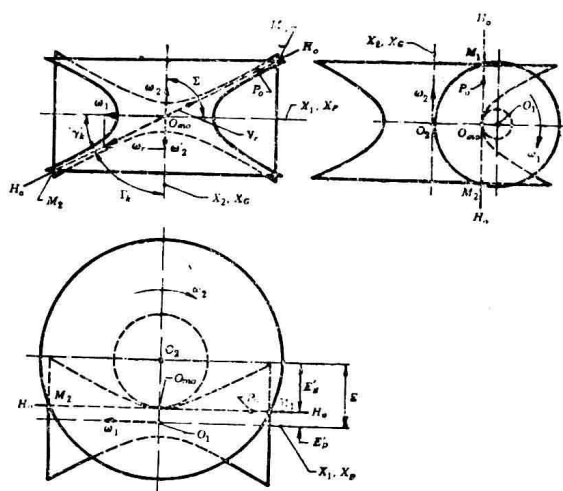


图1.2 轴夹角为 90° 、偏移距为 E 的小轮和大轮。其轴线 X_P 和 X_G 分别与轴线 X_1 和 X_2 相重合。 H_0H_0 是大小轮间相对螺旋运动的瞬时轴线，两个双曲面是由轴线 H_0H_0 分别绕轴线 X_P 和 X_G 回转而产生的。

现在我们研究两个齿轮分别绕轴线 X_P 和 X_G 转动时的啮合情形，该两轴线分别与图1.2中轴线 X_1 和 X_2 相重合，两齿轮角速度向量 $\vec{\omega}_1$ 和 $\vec{\omega}_2$ 在图中从其端点看去是反时针方向旋转的。

与其它齿轮传动一样，准双曲面齿轮啮合的研究也要涉及到相对运动，为表示这种运动，要给每个齿轮都加上一个角速度 $\vec{\omega}'_2 = -\vec{\omega}_2$ 且绕轴线 X_2 的附加转动，结果，第二个齿轮就相对静止，而第一个齿轮不仅以角速度 $\vec{\omega}_1$ 绕轴线 X_1 转动，同时还以角速度 $\vec{\omega}'_1$ 绕轴线 X_2 转动。

显然，相对于静止的第二个齿轮，第一个齿轮的合成运动可化为一个瞬时螺旋运动〔30〕，即可用一个以角速度 $\vec{\omega}$ 绕相对运动瞬时轴线 H_0H_0 的转动和一个以速度 \vec{V} 沿同一轴线的滑移运动来表示。如图1.2所示，轴线 H_0H_0 垂直 O_1O_2 线且相交于 O_{M0} 点，但并不与轴线 X_1 和 X_2 相交，其位置可用角度 γ_K' 、 Γ_K' 和 H_0H_0 分别至 X_1 、 X_2 轴间的距离 E_P' 、 E_G' 确定。

对任意轴夹角 Σ 和传动比

$$m_G = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1.1)$$

γ_K' 、 Γ_K' 、 E_P' 、 E_K' 、 ω_r 、 V_r 值和每转一弧度的滑移量 $P_r = V_r/\omega_r$ （在文献[30]中称为转化节距或诱导节距（reduced pitch））可分别用下列公式确定[31, 32]：

$$\tan \gamma_K' = \frac{\sin \Sigma}{m_G + \cos \Sigma} \quad (1.2)$$

$$\tan \Gamma_K' = \frac{m_G \sin \Sigma}{1 + m_G \cos \Sigma} \quad (1.3)$$

$$E_P' = E \frac{1 + m_G \cos \Sigma}{1 + 2m_G \cos \Sigma + m_G^2} \quad (1.4)$$

$$E_K' = E \frac{m_G (m_G + \cos \Sigma)}{1 + 2m_G \cos \Sigma + m_G^2} \quad (1.5)$$

$$\omega_r = \omega_1 \cos \gamma_K' + \omega_2 \cos \Gamma_K' = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \Sigma} \quad (1.6)$$

$$V_r = E \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_r} \sin \Sigma \quad (1.7)$$

$$P_r = \frac{V_r}{\omega_r} = E \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_r^2} \sin \Sigma \quad *$$

利用公式

$$\frac{\omega_1}{\sin \Gamma_K'} = \frac{\omega_2}{\sin \gamma_K'} = \frac{\omega_r}{\sin \Sigma} \quad (1.9)$$

该式从向量 $\vec{\omega}_1$ 、 $\vec{\omega}_2$ 和 $\vec{\omega}_r$ 所构成的三角形中很容易看出，于是

$$\omega_r = \omega_1 \frac{\sin \Sigma}{\sin \Gamma_K'} \quad (1.10)$$

或

$$\omega_r = \omega_2 \frac{\sin \Sigma}{\sin \gamma_K'} \quad (1.11)$$

将1.6式表示为：

$$\omega_r = \omega_2 \sqrt{1 + 2m_G \cos \Sigma + m_G^2}$$

则可把 E_P' 和 E_K' 写成：

$$E_P' = E(1 + m_G \cos \Sigma) \frac{\omega_2}{\omega_r} \frac{\omega_1}{m_G \omega_r}$$

* 原文右边分母为 ω_r ，恐为 ω_r^2 之误（译者）

$$E'_r = E m_G (m_G + \cos \Sigma) \frac{\omega_2}{\omega_r} \frac{\omega_1}{m_G \omega_r}$$

再把式1.9给出的

$$\frac{\omega_2}{\omega_r} = \frac{\sin \gamma'_K}{\sin \Sigma}$$

和

$$\frac{\omega_1}{\omega_r} = \frac{\sin \Gamma'_K}{\sin \Sigma}$$

代入, 并经某 简化, 可得

$$E'_p = E \frac{\sin \gamma'_K \cos \Gamma'_K}{\sin \Sigma} \quad (1.12)$$

$$E'_z = E \frac{\sin \Gamma'_K \cos \gamma'_K}{\sin \Sigma} \quad (1.13)$$

类似地, 利用公式1.12和1.13, 可简化 P_r 为

$$P_r = E'_p \tan \Gamma'_K = E'_z \tan \gamma'_K \quad (1.14)$$

因此

$$V_r = \omega_r E'_p \tan \Gamma'_K = \omega_r E'_z \tan \gamma'_K \quad (1.15)$$

以式1.9和1.14联解, 可得

$$m_G = \frac{E'_z \cos \Gamma'_K}{E'_p \cos \gamma'_K} \quad (1.16)$$

在 $\Sigma = 90^\circ$ 的特殊情况下, 可得下列公式:

$$\tan \gamma'_K = \frac{1}{m_G} \quad (1.17)$$

$$\tan \Gamma'_K = m_G \quad (1.18)$$

$$E'_p = E \sin^2 \gamma'_K = E \cos^2 \Gamma'_K \quad (1.19)$$

$$E'_z = E \sin^2 \Gamma'_K = E \cos^2 \gamma'_K \quad (1.20)$$

$$\omega_r = \frac{\omega_1}{\sin \Gamma'_K} = \frac{\omega_2}{\sin \gamma'_K} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (1.21)$$

$$V_r = \omega_1 E \cos \Gamma'_K = \omega_2 E \cos \gamma'_K \quad (1.22)$$

$$P_r = E \sin \gamma'_K \cos \gamma'_K = E \sin \Gamma'_K \cos \Gamma'_K \quad (1.23)$$

1.2 节表面

在不相交轴线齿轮付的相对螺旋运动中，每一个参与运动的点均沿一条螺旋线运动。每一条通过某点的螺旋线的法线都是螺杆的射线〔30〕，所有交于该法线的螺旋线均与之垂直。显然，相对速度向量（即该点沿螺旋线运动的速度向量）相切于螺旋线且垂直于通过该点的射线，如果这点在相对运动的瞬时轴 H_0H_0 上，如图1·2中的 P_0 或 O_m 点，那么它的速度就可仅计算滑移速度 V_r 。因此，如果作一平面通过上述 P_0 或 O_m 那样的点并垂直于过该点的螺杆射线，则速度向量 \vec{V}_r 和轴线 H_0H_0 均位于该平面内。

众所周知，螺旋运动可分解为两个绕不相交轴线的旋转运动，且有无限多个确定解。每对满足于1.14式的轴线称为共轭直线，交于共轭直线的线是螺杆的一条射线。因此，图1.2中的轴线 X_1 和 X_2 是一对共轭直线，且它们之间的最短距离 O_1O_2 是齿轮付相对运动螺旋的射线。如果轴线 H_0H_0 绕各个齿轮的轴线回转，则描绘出两个表面，这两个表面相互沿一条直线即轴线 H_0H_0 相接触。在公式1.2至1.5中给定 E 值和 Σ 值后，则 H_0H_0 的位置仅取决于传动比 m_G ，当 m_G 为常数时，轴线 H_0H_0 在固定空间中便有一个固定的位置。因此，轴线 H_0H_0 绕每个齿轮轴线回转便产生如图1.2中所示的一对直纹表面，即回转双曲面。两个齿轮如具有双曲面状的直纹轮齿，则轮齿的啮合就沿着双曲面的母线发生，换言之，即沿相对运动瞬时轴线发生啮合。双曲面的相对滑动是沿其母线进行的，因为这些母线与轴线 H_0H_0 相重合，加之速度向量 \vec{V}_r 是直接沿着 H_0H_0 的，故得结论：双曲面是准双曲面齿轮的运动节面。具有速比 m_G 等于两准双曲面角速比的齿轮付是唯一的，但是，如果角速比变了，传动比不等于 m_G 的其它齿轮还可设计成无限多付，且其轴线仍可与 X_1 和 X_2 或相应地与 X_P 和 X_G 重合。如在实际设计中我们把角速度 $\vec{\omega}_1$ 和 $\vec{\omega}_2$ 以及 m_G 值分别转变为 $\vec{\omega}_P$ 、 $\vec{\omega}_G$ 和 m ，而

$$m = \frac{\omega_P}{\omega_G} \quad (1.24)$$

这样转变后，其相对运动还是一种螺旋运动，但已是新的轴线 HH 来表示的螺旋运动。类似于公式1.17至1.23，新轴线 HH 的位置和各瞬时相对运动参数的相应公式为：

$$\tan \gamma_K = \frac{1}{m} \quad (1.25)$$

$$\tan \Gamma_K = m \quad (1.26)$$

$$E_P = E \sin^2 \gamma_K = E \cos^2 \Gamma_K \quad (1.27)$$

$$E_G = E \sin^2 \Gamma_K = E \cos^2 \gamma_K \quad (1.28)$$

$$\omega_r = \frac{\omega_P}{\sin \Gamma_K} = \frac{\omega_G}{\sin \gamma_K} = \sqrt{\omega_P^2 + \omega_G^2} \quad (1.29)$$

$$V_r = \omega_P E \cos \Gamma_K = \omega_G E \cos \gamma_K \quad (1.30)$$

$$P_r = E \sin \gamma_K \cos \gamma_K = E \sin \Gamma_K \cos \Gamma_K \quad (1.31)$$

新的轴线HH如图1.3所示*,该图和图1.2一样,也表示了轴线 X_P 和 X_G 以及原来轴线 H_0 、 H_0 的位置。此时,与图1.2相类似,向量 $\vec{\omega}_r$ 由向量 $\vec{\omega}_P$ 和 $\vec{\omega}_G' = -\vec{\omega}_G$ 合成而得。由于齿轮角速度的改变,故位于轴线 H_0 、 H_0 上的点 P_0 参与了绕轴线HH的相对运动。因此, P_0 点的相对滑动速度向量 \vec{V}_{s_0} 可写成:

$$\vec{V}_{s_0} = \vec{V}_r + \vec{V}_{\omega} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_r \vec{R}_{om}$$

其中 $R_{om} = a_p$ 是点 P_0 至轴线HH的距离。直线 $n_{oP}n_{oG}$ 是通过点 P_0 并相交两条共轭直线(轴线

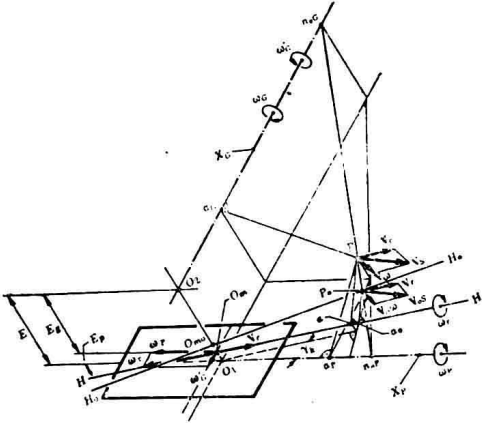


图1.3 两对具有相同的大小轮轴线 X_C 和 X_P 但速比不相同的准双曲线齿轮付,其相对螺旋运动的两根瞬时轴线

X_P 和 X_G)的螺旋运动的射线。因此,向量 \vec{V}_{s_0} 垂直于 $n_{oP}n_{oG}$ 。同样, V_s 也垂直于 $n_{oP}n_{oG}$,它是 $n_{oP}n_{oG}$ 上任一点 P 的相对滑动速度向量。象 P_0 一样, P 点参与有转化节距 P_r (按1.31式求得的)的瞬时螺旋运动。与 V_{s_0} 相似, V_s 可写成

$$\vec{V}_s = \vec{V}_r + \vec{V}_{\omega} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_r \vec{R}_m \quad (1.32)$$

其中, $R_m = a_p$ 是点 P 至轴线HH的距离。如果 $R_{op} = a_{oP}$ 和 $R_{oG} = a_{oG}$ 值分别为点 P 至轴线 X_P 和 X_G 的距离,则 \vec{V}_s 可写成

$$\vec{V}_s = \vec{V}_P + \vec{V}_G' = \vec{\omega}_P \vec{R}_{op} + \vec{\omega}_G' \vec{R}_{oG} \quad (1.33)$$

因此,当原来的双曲面回转体以新的角速度向量 $\vec{\omega}_P$ 和 $\vec{\omega}_G$ 回转时,接触线(轴线 H_0 、 H_0)上任意点的相对滑动速度向量(如 P_0 点的 \vec{V}_{s_0})就与该接触线不相重合,而是相互倾斜了。因此,经过改变其速比为 m 后,原先啮合的轮齿就不允许在其齿面间发生相对滑动了。能满足这个要求的齿轮轮齿,必须在准双曲面接触点处的轮齿方向与新的相对滑动速度向量相符合。这就是说,轮齿齿向必须倾斜于轴线 H_0 、 H_0 。因此,轮齿在节表面上仅有一点与轴线 H_0 、 H_0 相交,且齿轮间在节表面上也仅有一点相互接触,在其它各点上,轮齿可呈任意形状,包括曲线形状。

总结前面所述,可得到如下结论:相对于传动比 m_G 的任何速比变化都可能导致有同样轴心 X_P 和 X_G 的新齿轮传动付,其轮齿有新的确定方向。在各种情况下,原始的双曲面不再是节表面,而变成新的双曲面。新的双曲面是由轴线HH在齿轮系统中绕轴线 X_P 和 X_G 回转而描绘

*该图和下面所有图中,带有一个小点“·”的角度均为 90° 。

成的。根据这种情况，我们可得出另一个重要结论：因啮合轮齿在节表面上只有一个点相互接触，故在准双曲面齿轮设计中可选取最简单的表面作为节表面。例如，两个圆柱或圆锥表面就可考虑作为节表面，只要这两个圆柱或圆锥以角速度 ω_P 和 ω_G 绕两不相交轴线旋转时沿一个点接触，并在接触点处有一条公法线。有时把这种圆锥面称为节锥。但这仅是为了方便其事，因为它们的表面并不是两个准双曲面齿轮的运动节表面。

利用这种简化方法，我们可按如下方式选择节表面：如果轴线 X_P 和 X_G 的排布位置已给定（即轴间夹角 Σ 和两轴的最短距离或准双曲面移距 E 已知），我们则可选择任一与两轴线相交的直线上的一点（ P ）作为节表面的点。该直线（如图 1.4 中的 $n_P n_G$ 线）不同于图 1.3 的 $n_{O_P} n_{O_G}$ 线，它与轴线 $H_O H_O$ 可以不相交。然而，由于它交于一对共轭直线（轴线 X_P 和 X_G ），所以可作为绕轴线 HH 回转的相对螺旋运动的射线。当然，点 P 的相对滑动速度向量 \vec{V}_s 垂直于 $n_P n_G$ 线。因此，与公式 1.33 相类似，我们可写成下式（参看图 1.4）：

$$\vec{V}_s = \vec{V}_P + \vec{V}'_G = \vec{\omega}_P \vec{R}_P + \vec{\omega}'_G \vec{R}_G \quad (1.34)$$

其中 $R_P = a_P P$ 和 $R_G = a_G P$ 是从 P 点分别至轴线 X_P 和 X_G 的距离。

向量 \vec{V}_s 位于通过 P 点并垂直于直线 $n_P n_G$ 的平面内。图 1.4 中所述的平面是 T 面，它与轴线 X_P 和 X_G 分别交于点 O_P 和 O_G 。若取直线 $n_P n_G$ 作为接触点的公法线并取 P 点作为两节表面的接触点，我们则可用直线 $O_P P$ 和 $O_G P$ 作为绕轴线 X_P 和 X_G 回转的节锥母线，一般说来，当直线 $n_P n_G$ 交于两轴线并相互组成不等于 90° 的倾角时，直线 $O_P P$ 和 $O_G P$ 绕轴线 X_P 和 X_G 旋转则可形成图 1.4 中所示的锥面。这两个锥表面在准双曲面齿轮付设计中可作为节表面。正如上面所述，这种锥面可称之为节锥，但仅是为了方便其事，实际上该锥面并不是两个准双曲面齿轮的运动节表面。

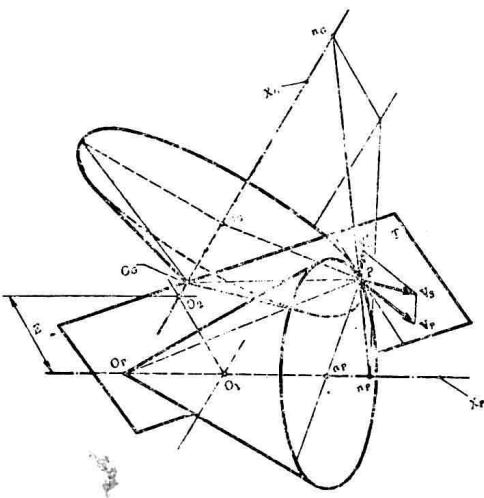


图 1.4 准双曲面齿轮付的节锥，并带有公切面 T 。

若给定螺旋射线的位置（该例中就是给出了直线 $n_P n_G$ 的位置），则可确定角 γ 和角 Γ 。这两个角可称为节角。此外，选定射线上点 P 的位置后，我们可确定两个圆锥的半径 R_P 和 R_G 、锥距 $O_P P$ 和 $O_G P$ ，将此两锥距记作 A_P 和 A_G ，就可写成：

$$A_P = \frac{R_P}{\sin\gamma} \quad (1.35)$$

和

$$A = \frac{R_G}{\sin\Gamma} \quad (1.36)$$

图1.5是图1.4所确定的两个圆锥，它们在P点相互接触，这两个圆锥的相对位置用从直线 O_1O_2 分别至通过P点并垂直轴线 X_P 和 X_G 的两平面的距离来表示，并把这些距离记作 Z_P 和 Z_G 。另外， Z 表示顶点 O_G 至轴线 X_P 的距离， G 表示顶点 O_P 至轴线 X_G 的距离。根据图1.5d，有

$$\begin{aligned} Z_P &= n_P P \sin\Gamma \\ n_G P &= A \tan\Gamma \end{aligned}$$

相类似地，由图1.5f 可得

$$Z_G = n_G P \sin\gamma$$

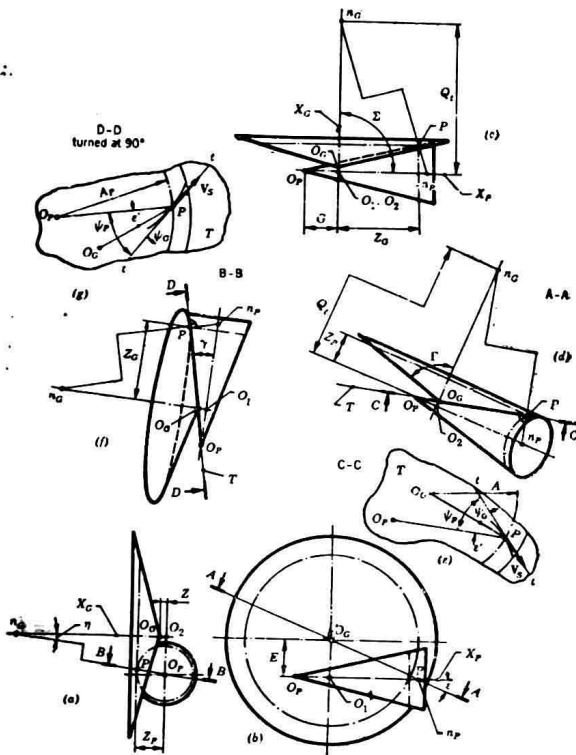


图1.5 大轮和小轮节锥的相对位置。
(a) 侧视图 (b) 前视图 (c) 顶视图 (d) 沿着小轮轴平面且其移距角为 Σ 的平面所截成的大轮截面图 (e) 在公切面 T 上的视图 (f) 沿着大轮轴平面且其移距角为 η 的平面所截成的小轮截面图 (g) 公切面 T 上的视图。

$$n_P P = A_P \tan\gamma$$

因此，

$$Z_P = A_P \tan\gamma \sin\Gamma \quad (1.37)$$

$$Z_G = A \tan\Gamma \sin\gamma \quad (1.38)$$

而且，

$$Z = Z_P - A \cos\Gamma = A_P \tan\gamma \sin\Gamma - R_G \cot\Gamma \quad (1.39)$$

$$G = A_P \cos \gamma - Z_G = R_P \cot \gamma - A \tan \Gamma \sin \gamma \quad (1.40)$$

两圆锥相互接触的P点通常作为一个出发点, 因该点大致处在轮齿齿面的中点, 故有时称它为平均点 (Mean Point) [20]。如图1.5所示, 公法线即射线 $n_P n_G$ 通过P点, 同时平面T垂直于 $n_P n_G$, 该平面沿着母线 $O_P P$ 和 $O_G P$ 与两圆锥接触, 两条接触母线 $O_P P$ 与 $O_G P$ 相互倾斜成 ϵ' 角。图1.5g及1.5e中的平面T包含P点的相对滑动速度向量 \vec{V}_S , 该向量可由公式1.34求得, 并与在P点相切于轮齿齿线的直线 $t t$ 相重合。母线 $O_P P$ 和 $O_G P$ 与直线 $t t$ 分别构成 Ψ_P 和 Ψ_G 角, 并称它们为螺旋角, 其关系为:

$$K_1 = \frac{\cos \Psi_G}{\cos \Psi_P} \quad (1.41)$$

其差值为:

$$\epsilon' = \Psi_P - \Psi_G \quad (1.42)$$

若将公式1.41改写成

$$K_1 = \frac{\cos \Psi_G}{\cos (\Psi_G + \epsilon')}$$

或

$$K_1 = \frac{\cos (\Psi_P - \epsilon')}{\cos \Psi_P}$$

简化之, 就可得到下列公式[11,20]:

$$\tan \Psi_G = \frac{K_1 \cos \epsilon' - 1}{K_1 \sin \epsilon'} \quad (1.43)$$

$$\tan \Psi_P = \frac{K_1 - \cos \epsilon'}{\sin \epsilon'} \quad (1.44)$$

因此

$$K_1 = \sin \epsilon' \tan \Psi_P + \cos \epsilon' \quad (1.45)$$

如图1.5b所示, 接触法线的投影 $n_P o_G$ 与小轮轴线 X_P 倾斜成角度 ϵ 。类此, 接触法线的投影 $n_G o_P$ (在图1.5a中) 与大轮轴线 X_G 倾斜成角度 η 。显而易见,

$$\tan \eta = \frac{E}{Q_t} \quad (1.46)$$

和

$$\sin \epsilon = \frac{E - R_P \sin \eta}{R_G} \quad (1.47)$$

其中, Q_t 是沿轴线 X_G 测量的从直线 $O_1 O_2$ 至轴线 X_G 交于接触法线的点之间的距离, Q_t 值表示法线的位置, 它还与角度 γ 和 Γ 有关。因此, Q_t 被称为锥度因数 (Tapey factor) [11], 而且它影响到准双曲面齿轮付的某些参数 (下面将谈到)。根据图1.5d, 可得到

$$Q_t = Z_P + R_G \tan \Gamma \quad (1.48)$$

表示节锥的参数和点P位置的角度值间有一定的关系。根据图1.5, 由直角三角形 $n_P o_G o_1$ (图1.5b) 可求得

$$\sin \epsilon = \frac{E}{n_P o_G}$$

$$\cos \varepsilon = \frac{n_P O_1}{n_P O_G}$$

由直角三角形 $n_G O_P O_2$ (图1.5a)

$$\tan \eta = \frac{E}{n_G O_2}$$

由直角三角形 $n_P O_2 n_G$ (图1.5d)

$$\tan \Gamma = \frac{n_G O_2}{n_P O_2}$$

$$\cos \Gamma = \frac{n_P O_2}{n_P n_G}$$

和由直角三角形 $n_P O_1 O_G$ (图1.5f)

$$\sin \gamma = \frac{n_P O_1}{n_P n_G}$$

我们先用上面 $\sin \varepsilon$ 的公式与 $\tan \eta$ 的公式联解, 其次再用 $\cos \varepsilon$ 和 $\sin \gamma$ 的公式联解, 就可得下列公式:

$$\tan \eta = \sin \varepsilon \frac{n_P O_G}{n_G O_2}$$

$$\sin \gamma = \cos \varepsilon \frac{n_P O_G}{n_P n_G}$$

距离 $n_P O_G$ (图1.5b) 和 $n_P O_2$ (图1.5d) 相等。因此

$$\tan \Gamma = \frac{n_G O_2}{n_P O_G}$$

$$\cos \Gamma = \frac{n_P O_G}{n_P n_G}$$

最后得:

$$\tan \eta = \sin \varepsilon \cot \Gamma \quad (1.49)$$

$$\sin \gamma = \cos \varepsilon \cos \Gamma \quad (1.50)$$

法线 $n_P n_G$ 的投影与顶点 O_P 之间的距离 (参看图1.5b) 等于 $n_P O_P \sin \varepsilon$ 而法线 $n_P n_G$ 的投影与 O_G 之间的距离 (参看图1.5a) 等于 $(E - Z \tan \eta) \cos \eta$ 。利用这些值, 我们可由图1.5g 得到:

$$\sin \varepsilon' = \frac{(E - Z \tan \eta) \cos \eta}{A} \quad (1.51)$$

并从图1.5d和1.5e可得:

$$\sin \varepsilon' = \frac{n_P O_P \sin \varepsilon}{A_P}$$

和

$$\cos \varepsilon' = \frac{Z_P}{\cos \Gamma} \cdot \frac{1}{A_P}$$

由直角三角形 $n_P O_P P$ (图1.5f), 有

$$\cos \gamma = \frac{A_P}{n_P O_P}$$

所以,

$$\sin \varepsilon' = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \gamma}$$

另外, 利用从公式1.37得到的 Z_P 值, 可得

$$\cos \varepsilon' = \frac{A_P \tan \gamma \sin \Gamma}{\cos \Gamma} \cdot \frac{1}{A_P}$$

因此

$$\sin \varepsilon = \sin \varepsilon' \cos \gamma \quad (1.52)$$

$$\cos \varepsilon' = \tan \Gamma \tan \gamma \quad (1.53)$$

用已得的公式联解, 还可确定准双曲面齿轮付参数的其它关系, 由直角三角形 $n_P O_1 n_G$ (图1.5f):

$$\tan \gamma = \frac{n_P O_1}{n_G O_1}$$

由直角三角形 $n_P O_G O_1$ (图1.5b)

$$n_P O_1 = E \cot \varepsilon$$

又由直角三角形 $n_G O_P O_2$ (图1.5a)

$$n_G O_P = \frac{E}{\sin \eta}$$

因此, 利用这些参数值并注意到距离 $n_G O_P$ 和 $n_G O_1$ (见图1.5f) 相等, 我们可写成

$$\tan \gamma = \frac{\sin \eta}{\tan \varepsilon} \quad (1.54)$$

另外, 同时考虑公式1.52和1.53, 我们可求得下列公式:

$$\tan \varepsilon' = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} \cot \Gamma \quad (1.55)$$

或利用由公式1.50求得的 $\sin \gamma$ 值, 可写成:

$$\tan \varepsilon' = \frac{\tan \varepsilon}{\sin \Gamma} \quad (1.56)$$

此外, 用公式1.49代入公式1.55后, 可得

$$\tan \varepsilon' = \frac{\tan \eta}{\sin \gamma} \quad (1.57)$$

由公式1.52求得的 $\sin \varepsilon'$ 值和公式1.56, 可得

$$\cos \varepsilon' = \frac{\sin \varepsilon'}{\tan \varepsilon'} = \frac{\sin \Gamma}{\cos \gamma} \cos \varepsilon \quad (1.58)$$

与此相类似, 由公式1.54求得的 $\sin \eta$ 值和公式1.49可得:

$$\cos \eta = \frac{\sin \eta}{\tan \eta} = \frac{\tan \Gamma \tan \gamma}{\cos \varepsilon} \quad (1.59)$$

以公式1.53代入得:

$$\cos \eta = \frac{\cos \varepsilon'}{\cos \varepsilon} \quad (1.60)$$

该式与1.58式联解, 得

$$\cos \eta = \frac{\sin \Gamma}{\cos \gamma} \quad (1.61)$$

由公式1.61和从公式1.50求得的 $\cos \varepsilon$ 值, 可得到下列替代公式1.37和1.38的公式:

$$Z_P = R_P \cos \eta \quad (1.62)$$

$$Z_G = R_G \cos \varepsilon \quad (1.63)$$

上面这两个公式也可根据图1.5a和1.5c求得, 把它们与1.39和1.40式联立, 于是得:

$$Z = R_P \cos \eta - R_G \cot \Gamma \quad (1.64)$$

$$G = R_P \cot \gamma - R_G \cos \varepsilon \quad (1.65)$$

利用公式1.62, 我们可把公式1.48中的参数 Q_1 写成

$$Q_1 = R_P \cos \eta + R_G \tan \Gamma \quad (1.66)$$

现在, 我们推导准双曲面偏移距 E 与锥距 A_P 和 A 的关系。对照图1.5a和1.5b, 可得下列公式:

$$E = R_G \sin \varepsilon + R_P \sin \eta$$

或者, 与1.35和1.36式合并, 我们可写成:

$$E = A \sin \Gamma \sin \varepsilon + A_P \sin \gamma \sin \eta$$

若从公式1.54中算出 $\sin \eta$ 值, 则可写成:

$$E = \sin \varepsilon \cos \Gamma (A \tan \Gamma + A_P - \frac{\sin \gamma}{\cos \varepsilon \cos \Gamma} \tan \gamma)$$

与公式1.50合并, 得:

$$E = \sin \varepsilon \cos \Gamma (A \tan \Gamma + A_P \tan \gamma) \quad (1.67)$$

或

$$A \tan \Gamma + A_P \tan \gamma = \frac{E}{\sin \varepsilon \cos \Gamma} \quad (1.68)$$

若将该式分子分母分别乘以 $\tan \varepsilon$ 并利用1.56式, 可得:

$$A \tan \Gamma + A_P \tan \gamma = \frac{E \tan \varepsilon' \tan \Gamma}{\sin \varepsilon \tan \varepsilon}$$

于是,

$$\frac{\sin \varepsilon \tan \varepsilon}{E} = \frac{\tan \varepsilon' \tan \Gamma}{A \tan \Gamma + A_P \tan \gamma} \quad (1.69)$$

公式1.68也可写成

$$\sin \varepsilon = \frac{E}{\cos \Gamma (A \tan \Gamma + A_P \tan \gamma)} \quad (1.70)$$

或与公式1.36合并, 得

$$\sin \varepsilon = \frac{E}{R_G + A_P \tan \gamma \cos \Gamma} \quad (1.71)$$