



SHUXUEFENXI
NEIRONGTIYAO
JITIJIE



数学分析

内容提要及题解

宁德师范专科学校数学系

数学分析内容提要及题解

1

宁德师范专科学校数学系
数 学 分 析 教 研 组

前 言

为了响应党的十一届三中全会关于全党工作的着重点转移到四个现代化建设上来的伟大号召，我们着手教材建设工作，借以提高教学质量；也为部分青年教师提供教学参考资料；同时考虑到能对业余自学者和中学教师有所裨益，我系编写了数学分析、高等代数、解析几何、概率统计等内容提要与题解，它们将陆续出版。

本书系数学分析部分，内容包括极限论、微分学、不定积分、定积分、级数、微分方程和多元函数的微积分学。共分上、中、下三册。这一册是上册，内容为极限论和微分学。我们把内容按章节归类编排，各章有总的介绍，各节均有详细的内容提要，它交代了该节的基本概念、定理和公式。选解的习题循序渐进，由浅入深，侧重于巩固基本概念和基本理论，并注意到对读者基本运算能力的培养。也选解了部分难度较大的题目以利提高。习题主要选自吉米多维奇《数学分析习题集》（李荣冻译）、复旦大学《数学分析》和同济大学《高等数学学习题集》。

第一册由黄政书、胡连三、潘斯一老师编写，由杨克仁、黄子卿老师审阅。

由于我们的水平不高且业余时间有限，因此不论在选题上或解题过程中都难免有不少的缺点和错误，恳望同志们随时给予批评指教。

宁德师专数学系数学分析教研组

一九七九年三月

目 录

第一章 变量的极限

§ 1. 极限概念的定义	1
§ 2. 极限存在判别法	32
§ 3. 求极限的一些基本方法	51
〔附〕 连续函数	126

第二章 微分学

§ 1. 导数与微分	139
§ 2. 微分学基本定理	214
§ 3. 导数的应用	240

第一章 变量的极限

§ 1. 极限概念的定义

一、内容提要:

变量处在运动变化中, 总有一个变化过程, 和变量在这个变化过程中的变化趋势。

对序列 $x_n = f(n)$ 来说, 变化过程是由表示项数的 n 由小而大取一切自然数值来体现的, 因此有

序 列	n 的 变 化 过 程	过程的不等式 表 示 法	序列 x_n 变化的 趋势可能有:
$x_n = f(n)$	$n \rightarrow \infty$	$n > N$ (N 任意大)	$x_n \rightarrow b$ (常数) $x_n \rightarrow +\infty$ $x_n \rightarrow -\infty$ x_n 振动不定

对函数 $y = f(x)$ 来说, 函数的变化过程是由自变量 x 取值的趋向来体现的, 因此有

函 数	x 的 变 化 过 程	过程的不等式表示法	$f(x)$ 的变化趋势 可能 有:
$y = f(x)$	① x 自 a 的左右双向趋于 a ($x \rightarrow a$)	$0 < x - a < \delta$ (δ 充分小)	$f(x) \rightarrow b$ (常数)
	② x 自大于 a (右方) 趋于 a ($x \rightarrow a + 0$)	$a < x < a + \delta$	$f(x) \rightarrow +\infty$
	③ x 自小于 a (左方) 趋于 a ($x \rightarrow a - 0$)	$a - \delta < x < a$	$f(x) \rightarrow -\infty$
	④ x 无限增大 ($x \rightarrow +\infty$)	$x > A$ (A 任意大)	$f(x)$ 振动不定
	⑤ x 无限减少 ($x \rightarrow -\infty$)	$x < -A$ (A 任意大)	
	⑥ x 的绝对值无限增大 ($x \rightarrow \infty$)	$ x > A$ (A 任意大)	

现在问题是如何给出在如上各种情况下，变量 y (x_n 或 $f(x)$) 极限的定义。一种较模糊的说法是：

如果在某过程中，变量 y 是愈来愈接近于常量 a ，那么就称 a 为变量 y 在这个过程中的极限。

这里所谓“愈来愈接近”只是带描写性的词句，不是精确的数学语言，利用它不能对极限在理论上作深入的研究，因此对极限概念，还必须给以精确的定义，为此有：

定义 1，如果任给 $\varepsilon > 0$ (不论如何小)，在给定的过程中，总可找到时刻 t ，经这个时刻以后，永远有 $|y - b| < \varepsilon$ ，则称在这个过程中， y 的极限等于 b 。

这种定义极限的方法，称为 $\varepsilon - t$ 定义法。其中变量 y 指的可以是序列 x_n ，也可以是函数 $f(x)$ 。

但如果变量 y 已具体化为 x_n ，那么定义 1，应改用如下 $\varepsilon - N$ 法来叙述：

定义 2，如果任给 $\varepsilon > 0$ (不论如何小) 总可找到 N ，当 $n > N$ 时，永远有 $|x_n - b| < \varepsilon$ ，则称 b 为序列 x_n 的极限，记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b.$$

如果变量 y 具体化为函数 $f(x)$ ，那么定义 1，就应改用如下的 $\varepsilon - \delta$ (或 $\varepsilon - A$) 法来叙述：

定义 3，如果任给 $\varepsilon > 0$ (不论如何小) 总可找到 $\delta > 0$ ，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，永远有 $|f(x) - b| < \varepsilon$ ，则称在这个过程中 b 为 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

在前述各种情况下，极限概念的定义，可综述如下表：

任给正数	总找到	当 ... 时	永远有	则 称	记 作
ε (不论如何小)	自然数 N	$n > N$	$ x_n - b < \varepsilon$	b 为 x_n 的极限	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$
	正数 δ	$0 < x - a < \delta$	$ f(x) - b < \varepsilon$	在给定过程中 b 为 $f(x)$ 在 $x = a$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
		$a - \delta < x < a$		左极限	$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$
		$a < x < a + \delta$		右极限	$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$
	正数 A	$ x > A$		在给定过程中 b 为 $f(x)$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$
		$x > A$			$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$
		$x < -A$			$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

任给正数	总找到	当...时	永远有	则称	记作
M	自然数 N	$n > N$	$ x_n > M$	x_n 为无穷大量	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$
			$x_n > M$	x_n 为正无穷大量	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$
			$x_n < -M$	x_n 为负无穷大量	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$
(不论如何大)	正数 δ	$0 < x - a < \delta$			$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ $\begin{matrix} x \rightarrow a \\ x \rightarrow a-0 \\ x \rightarrow a+0 \\ x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{matrix}$
		$a - \delta < x < a + \delta$	$ f(x) > M$	$f(x)$ 为无穷大量	
		$a < x < a + \delta$	$f(x) > M$	$f(x)$ 为正无穷大	
	正数 A	$ x > A$	$f(x) < -M$	$f(x)$ 为负无穷大	
		$x > A$			
		$x < -A$			

二、习题选解:

(一) 从定义出发, 用 $(\varepsilon - N)$ 法证明下列各极限,

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$$

证: 设 $x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}$, 要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$, 只要证,

对于任意给定的正数 ε , (不论如何小), 都可找到 N , 当

$n > N$ 时, 永有 $\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$. 为此由

$$\begin{aligned} \left| x_n - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3} \right| = \\ &= \left| \frac{-n + 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} \right| \end{aligned}$$

当 $n > 2$ 时有

$$\begin{aligned} \left| x_n - \frac{1}{3} \right| &= \\ &= \frac{n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{n}{3 \cdot n^2} \left(\begin{array}{l} \text{分子增大} \\ \text{分母缩小} \end{array} \right) < \frac{n}{3n^2} = \\ &= \frac{1}{n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

得 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 都可找到

$N = \max \{2, [\frac{1}{\varepsilon}] + 1\}$, 当 $n > N$ 时, $\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$ 都

成立. (其中 $[\frac{1}{\varepsilon}]$ 表示 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的整数部分)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$$

说明：于本例可见

(1) 从定义出发证明 b 是序列 x_n 的极限，关键在于找出 N ， N 是由 ε 决定的，由 $|x_n - b| < \varepsilon$ ，解得 $n > \varphi(\varepsilon)$ ，于是一般可以取 $N = [\varphi(\varepsilon)]$ 。

(2) 所给的 ε 越小，所需的 N 就越大。

(3) 定义中所要求的 N 不是唯一的，它有无穷多个。事实上，若 $n > N_1$ 时永远有 $|x_n - b| < \varepsilon$ ，那么当 $n > N_1 + 1, N_1 + 2, \dots$ 也都永远有 $|x_n - b| < \varepsilon$ 。因此，起码的 N_1 如果不易解出，那就可将式子适当放大化简，以求较大的 N ，如本例，若由

$$\left| \frac{-5n + 10}{3(n^2 + 2n - 4)} \right| < \varepsilon$$

用平方去绝对值来解出 n ，那就不易了。

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1)$$

〔证一〕由 $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$ ，得 $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$ ，两边取对数得

$$\frac{1}{n} \ln a < \ln(1 + \varepsilon), \quad \therefore n > \frac{\ln a}{\ln(1 + \varepsilon)}$$

故可以取 $N = \left[\frac{\ln a}{\ln(1 + \varepsilon)} \right] + 1$ ，于是，对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，

总可找到 N ，当 $n > N$ 时，永远有

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1)$$

〔证二〕因 $a > 1$, 可令 $\sqrt[n]{a} = 1 + h$, ($h > 0$), 于是

$$a = (1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \dots > 1 + nh$$

$$\therefore h = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon, \text{ 解得 } n > \frac{a-1}{\varepsilon}$$

$$\text{故可以取 } N = \left\lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

〔说明〕于解本例可见: 用不同的方法, 求得的 N , 可能是不一样的. 还可以证明

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

〔证〕任给 $\varepsilon > 0$, 不论如何小, 对于任何正数 a , 总可找到 N , 当 $n > N$ 时, 永远有

$$(1 - \varepsilon)^n < a < (1 + \varepsilon)^n$$

$$\text{即 } 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$$

$$\text{即 } |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

〔说明〕于本例可见: 证明序列的极限, 有时只需指出适合定义里的 N , 确实存在, 而不必具体求出.

$$4. \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

〔证〕令 $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$, 则

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 +$$

$$+ \dots > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

$$\therefore \frac{(n-1)}{2} \alpha_n^2 < 1, \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (n \geq 2),$$

$$\text{由 } \alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon, \text{ 得 } \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2, \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2} + 1$$

$$\text{故可取 } N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \right\rceil + 2, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$5. \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

分析: 要证任给正数 M , 不论如何大, 都可找到 N , 当 $n > N$ 时, 有 $\sqrt[n]{n!} > M$, 即有 $n! > M^n$, 即有 $\frac{n!}{M^n} > 1$. 考察

$$\frac{n!}{M^n} = \frac{1}{M} \cdot \frac{2}{M} \cdot \frac{3}{M} \cdots \frac{n}{M},$$

可知用如下方法证明:

[证一] 因 $n \rightarrow \infty$, 故可取 $n > 2[M]$, 其中 $[M]$ 代表 M 的整数部分, 即

$$([M] \leq M \leq [M] + 1), \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{M^n} &= \frac{1}{M} \cdot \frac{2}{M} \cdots \frac{2[M]}{M} \cdot \frac{2[M]+1}{M} \cdot \frac{2[M]+2}{M} \cdots \frac{n}{M} > \\ &> \frac{1}{M} \cdot \frac{2}{M} \cdots \frac{2[M]}{M} \cdot \frac{2[M]+1}{M} \cdot \frac{2([M]+1)}{M} \cdots \frac{2([M]+1)}{M} > \\ &> \underbrace{\frac{1}{M} \cdot \frac{1}{M} \cdots \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{M}}_{2[M]+1 \text{ 个}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n - (2[M]+1) \text{ 个}} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{M}\right)^{2(M)+1} \cdot 2^{2(M)+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2M}\right)^{2(M)+1} \cdot 2^{2(M)+1} > \left(\frac{1}{2M}\right)^{2(M)+1} \cdot n$$

故当 $n > 2[M]$ 和 $(2M)^{2(M)+1}$ 时, 有 $\frac{n!}{M^n} > 1$, 即有

$$\sqrt[n]{n!} > M,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

〔证二〕利用不等式 $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$. (此式可用归纳法证之), 任给 $M > 0$, 不论如何大, 由

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{n}{e} > M, \text{ 得 } n > eM$$

故可取 $N = [eM] + 1$, 当 $n > N$ 时有 $\sqrt[n]{n!} > M$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

6. 设 $a > 1$, k 为自然数, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$

〔证〕令 $a = 1 + \lambda$, ($\lambda > 0$), 则

$$\begin{aligned} a^n &= (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2!} \lambda^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{(k+1)!} \lambda^{k+1} + \dots \\ &> \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{(k+1)!} \lambda^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{a^n}{n^k} &> \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1-\frac{k}{n}) \\
&> \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} n(1-\frac{k}{n})^k = \\
&= b \cdot \frac{1}{n^{k+1}} (n-k)^k > b \cdot \frac{1}{n^{k+1}} (\frac{n}{2})^k = \\
&= \frac{bn}{2^k}, \quad (b = \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}, n > 2k)
\end{aligned}$$

任给 $M > 0$, 不论如何大, 由

$$\frac{bn}{2^k} > M \text{ 得 } n > \frac{2^k}{b} M = \frac{2^k (k+1)! M}{\lambda^{k+1}}$$

故可找到 $N = [\frac{2^k (k+1)! M}{\lambda^{k+1}}]$, 当 $n > N$ 时, 永远有

$$\frac{a^n}{n^k} > M, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$$

7. $a > 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

[证] 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $n \rightarrow +\infty$, 故可找到 N_1 , 使当 $n > N_1$ 时有

$$\frac{ea}{n} < \frac{ea}{N_1} < 1$$

于是由 $\frac{a^n}{n!} < \frac{a^n}{(\frac{n}{e})^n} = (\frac{ea}{n})^n < (\frac{ea}{N_1})^n < \varepsilon$, 得

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{ea}{N_1})}$$

取 $N = \max \left\{ N_1, \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{e a}{N_1})} \right\rceil \right\}$, 则当 $n > N$ 时, 永远有

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

〔说明〕由6、7可见: 当 $n > N$ 时有

$$n^k < a^n < n! \quad (a > 1).$$

$$8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \text{不存在, } a = -1 \\ \infty, & |a| > 1 \end{cases}$$

〔证〕(1) 1°若 $0 < |a| < 1$, 则

$$\text{由 } |a^n - 0| = |a|^n < \varepsilon, \text{ 得 } n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}$$

$$\text{或因 } 0 < |a| < 1, \text{ 则 } \frac{1}{|a|} > 1,$$

$$\text{可设 } \frac{1}{|a|} = 1 + \alpha \quad (\alpha > 0)$$

$$\frac{1}{|a|^n} = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \dots > n\alpha$$

$$\therefore |a|^n < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon \text{ 得 } n > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$$

2°若 $a = 0$, 则 $a^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdots 0 = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \quad 0 \leq |a| < 1$$

(2) $a=1$, 则 $a^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$, 故这时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1.$$

(3) 若 $a=-1$, 则 $a^{2k}=1$, $a^{2k+1}=-1$, 故 a^n 振动不定

$\therefore$ 这时 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ 不存在

(4) 若 $|a| > 1$,

设 $|a| = 1 + \lambda$ ($\lambda > 0$), $|a|^n = (1 + \lambda)^n > n\lambda$

任给 $M > 0$, 由 $n\lambda > M$, 得 $n > \frac{M}{\lambda}$

即当 $n > \frac{M}{\lambda}$ 时, 永远有 $|a|^n > M$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \quad |a| > 1$$

9. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$,

但反之不真。(本定理称为柯西定理)。

[证] $\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

$\therefore$ 任给 $\varepsilon > 0$, 可找到 N , 当 $n > N$ 时

$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, 都成立。即有

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < x_{N+1} < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < x_{N+2} < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

.....

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$$