数 学 分 析

第二卷　第一分册

2004 年 8 月

数 学 分 析

第二卷　　第一分册

2004 年 8 月

序　言

在第一卷的序言中，对全书的特点已经作了足够详细的介绍，因此，我们在这里只限于评述它的第二卷内容．

作为这一卷的基本内容一方面有重积分，曲线积分和曲面积分，一直到一般的斯托克斯公式及其应用例子；另一方面又有级数和含参变量积分的全部材料，其中包括傅立叶级数，傅立叶变换和渐近展开的概念．

因此，这一卷基本上符合综合大学数学系二年级的教学大纲．

为了不致使上述两大题材的前后顺序生硬地按学期固定下来，我实际上是把它们独立叙述的．

第九章和第十章，即这本书开头的两章，实质上用一般形式简要地重写了第一卷中关于连续函数和可微函数的几乎全部最重要的内容．它们都标以星号*，并且是作为第一卷的补充写的．但是，其中的许多概念已经是当今向数学系学生叙述分析时必须提到的．在这两章，叙述了形式化抽象理论之后常给出大量例子和启发性注释，在第一卷中，它们是摆在形式化抽象理论叙述之前的．如果读者有足够的训练，在读这两章时跳过些例子和启发性注释，那么，这第二卷在形式上就几乎与第一卷无关．

这本书中关于多变量函数积分学的主要的新内容是从第十一章开始的．其实，在读过本教程第一卷之后可以从这一章开始读第二卷，并不影响对内容的理解．

在叙述曲线和曲面积分理论时，讲述并使用了微分形式的语言．首先，基于初等的材料引进全部基本几何概念和分析结构，然后，由它们构成通往一般斯托克斯公式的抽象定义阶梯．

第十五章是流形上微分形式积分法的一个综合性叙述．我认

为它是必须学习的第十一至十四章中，就具体对象叙述和阐明的那些材料的非常合适、非常系统的补充.

在有关级数和含参变量积分部分，除给出传统材料外，还给出(第十九章)了初等的渐近级数和积分的渐近式理论，因为它们无疑是有益的分析工具.

为了理解的方便，补充材料或第一次阅读可以跳过去的部分，都用星号标了出来.

本书各章和插图是继已经出版的第一卷(卓里奇：数学分析，第一卷，莫斯科，科学出版社，1981 年)的编号的.

关于参考资料，这里只给出那些在第一卷中没有提到的学术文献.

为了读者的方便和简化书写，同过去一样，证明的开始和结尾分别以记号◀和▶表示，而只要方便，定义的引进都使用专门符号:＝或＝:(据定义相等)，其中双点放在被定义的对象一边.

这本书继续保持了第一卷的风格，无论对数学结构本身的简洁性和逻辑的严密性，还是对如何展示发展起来的理论在自然科学中内容丰富的应用，都给予了很大重视.

B. A. 卓里奇

1982 年

补　序

得知我写的数学分析教科书译成了中文，我感到非常高兴.

在序言中已经说明了该书的一般特点，指出了其叙述的基本原则和目标. 这里，在讨论可以想到的一些问题之前，我想就如何在教学过程中使用这本书作一些实际的说明.

任何一本教科书，通常都是学生用，教师也用，各有自己的目的. 首先，彼此都关心有这样的书，其中除了正式规定必需的最低限度的理论内容以外，根据可能，书中还有应用这些理论的各种内容丰富的例子、说明、历史评述和科学注释，书中还展示相互联系，指出发展前景. 但是，到期末准备考试时，学生希望看到所有要考的材料. 同样地，为了备课，教师只挑选那些在课堂上应当讲授且能够讲授的材料.

由于这个缘故，应当注意这本教科书的内容明显多于讲稿的内容，尽管教科书是在讲稿的基础上写成的. 区别在哪里呢？首先，对讲稿内容本身补充了一个完整的习题集，它不仅由练习，而且还有一些问题组成，这些问题有的来源于自然科学，有的来源于相应章节的数学理论本身，而有的是这些章节内容的重要推广. 第二，书中所分析的展示理论作用的例子，当然，比课堂上更多. 最后，第三点，一些章节或个别段落是有意作为对课堂讲授内容的补充的. 这些在第一卷序言的“引言”部分、“辅助材料”部分、以及第二卷序言中都说过. 我想把注意力转向这个方面，并把那里所说的东西具体化一些.

在全部与分析的形式化基础有关并在头两章详细罗列的导论材料中，在课堂上通常只讲第一章 §3，第二章 §1 的第 1、2 两部分，§2 的第3部分，或许还能讲第 4 部分；最后是 §3，通常还要讲

§4. 这样一个篇幅不大且条理清楚的引论大约需要三讲. 在课堂上试图逐字逐句地讲述课本中的全部引论材料，把讲述分析本身的内容甩在了一边，将严重干扰突出重点.

如果考虑头两章中所讲的整个内容，可能除第八章 §6 的第2、4、5 部分(那里，作为隐函数定理的应用讲了关于秩、关于微分同胚展开的定理和 Morsc 引理)外，第一卷的全部理论材料，直至它选用的证明和应用例子，都是传统的和必须的.

第二卷用于第二年的学习，显然其中有大量附加的、不完全被认为是经典的材料，为了阅读方便，这些材料都标了*号. 从科学内容方面看，当然，第二卷是丰富多了. 在这里，分析与数学的其他领域相互作用，其思想和典型方法都以它们的现代水平为准. 顺便指出，对它们的现代水平的这种关注，第一卷内容叙述的原则，就已经受到它的影响. 例如，古典微分学的叙述尽量不变，为的是使往后边的部分(多变量以及其后的部分)的过渡不涉及出现新的微分运算法则的问题，这些法则与以前是一样的，而是涉及如何充实过去的记号和与新的具体内容的关系.

关于第二卷材料的一些说明，除了第十七章 §5 和第十九章 §2 这些部分可能例外，通常，没有打*号的部分，在做了这样那样的局部变动后，都直接纳入课堂讲授. 如果听众有足够的数学训练，常可代替第七章讲第九章. 这时，第十章或者全讲、或者不讲其中的 §5、§6，但需要予以补充并用第八章的经典材料举例说明. 对于这样的听众，可代替第十二章、第十三章讲第十五章，而第十二、十三章的材料这时就成了一般理论的具体说明.

最后，传统分析教程中的渐近展开，比较地说，譬如与收敛级数理论比较，还只占有一个非常平常的位置，虽然它们提供了一种在除了关心度量的绝对误差还关心相对误差时，应用中需要的方法. 无论如何，渐近级数的初等知识(第十九章 §1)，分出 Laplace 积分渐近主项的 Laplace 方法的思想以及有关应用实例(见同一章 §2)，通常还是列入数学系和物理系的分析课中的，并在尔后的

复分析课中得到进一步发展(鞍点法,平稳位相法).

B. A. 卓里奇

莫斯科,1989年5月1日

目　录

*第　九　章

连续映射(一般理论)

我们对于数值函数和形如 $f:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ 的映射已经建立的连续映射的性质，在这一章中将以统一的观点推广和叙述。同时将引进一系列简单的但是适用于一般数学的重要概念。

§1　度量空间

1. 定义和例子

定义 1　称集合 X 被赋予度量或度量空间的结构，或称 X 是度量空间，如果指定了函数

$$d: X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

满足条件:

a) $d(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$,

b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (对称性),

c) $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$, (三角不等式),其中 x_1, x_2, x_3 是 X 中的任意元素.

这时,称函数(1)为 X 中的度量或距离.

因此，度量空间是由集合 X 和在 X 上给定的度量组成的序对 $(X;d)$.　　X:底空间

按照几何术语,经常把集合 X 的元素称为点.

我们看到，在三角不等式 c) 中如果假设 $x_3 = x_1$，那么考虑到度量公理 a) 和 b)，便得到

$$0 \leqslant d(x_1, x_2),$$

也就是说,满足公理 a),b),c) 的度量是非负的.

我们来看几个例子.

例 1 实数集 R 成为度量空间,如果对于数 x_1, x_2 规定 $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

例 2 在 R 上还可以引进许多其它的度量. 例如,平凡度量是指在这种度量下任何不同两点间的距离等于 1.

R 上的下列度量包含丰富的内容. 假设 $x \longmapsto f(x)$ 是对 $x \geqslant 0$ 定义的非负函数,而且仅当 $x = 0$ 时它等于 0. 如果这个函数严格上凸,那么对于 $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$, 规定

$$d(x_1, x_2) = f(|x_1 - x_2|), \tag{2}$$

便得到 R 上的度量.

这里,公理 a),b) 显然满足, 而三角不等式可以从下列不难验证的事实推出: f 严格单调,并且当 $0 < a < b$ 时满足不等式

$$f(a + b) - f(b) < f(a) - f(0) = f(a).$$

特别地,可以规定

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|}$$

或

$$d(x_1, x_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|}.$$

在后一种情况下, 任意两个不同点之间的距离是小于 1 的正数.

例 3 在 R^n 中,点 $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^n)$, $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \cdots, x_2^n)$ 间除了惯用的距离

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^2} \tag{3}$$

外,还可以引进距离

$$d_p(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^p\right)^{1/p} \tag{4}$$

其中 $p \geqslant 1$. 由闵可夫斯基不等式(见第五章第四节第二段)可以推知函数(4)满足三角不等式.

例 4　如果在印刷文件中遇到印错某些字母的词，假如错误不太大，那么纠正错误以恢复词的原意不会有特别的困难．但是，纠正错误和恢复词意并不总是唯一确定的手续，因此，在其它条件相同的情况下，必须重视那种修改量少而能恢复原意的译解．根据这个道理，在编码理论中，在由 0 和 1 组成的长为 n 的所有序列的集合上采用 $p=1$ 时的度量(4)．

在几何上，这些序列所组成的集合可理解为 $\mathbf{R}^n$ 中单位立方体

$$I=\{x\in\mathbf{R}^n \mid 0\leqslant x^i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$$

的顶点所组成的集合．两个顶点间的距离是从这两个顶点中某一个的坐标得到另一个顶点的坐标时所必须的 0，1 的转换数：每个这样的转换是沿着立方体的某一棱进行的．因此，所研究的距离是立方体的顶点间沿着立方体棱的最短路径．

例 5　在比较两组 n 次测量的结果时，最常用的是 $p=2$ 时的度量(4)．在这个度量下，两点间的距离通常称为它们的二次方根差．

例 6　在(4)中如果对 $p\to+\infty$ 取极限，那么容易得到 $\mathbf{R}^n$ 中的下列度量：

$$d(x_1,x_2)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_1^i-x_2^i|. \tag{5}$$

例 7　在区间上连续函数组成的集合 $C[a,b]$ 成为度量空间，如果对于 $C[a,b]$ 中的函数 f,g，规定

$$d(f,g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|. \tag{6}$$

显然，度量公理 a)，b) 是满足的，而三角不等式从以下事实推出；

$$|f(x)-h(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\leqslant d(f,g)+d(g,h),$$

即

$$d(f,h)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-h(x)|\leqslant d(f,g)+d(g,h).$$

$$\cancel{\geqslant d(g,h).}$$

度量(6)称为 $C[a,b]$ 中的一致度量或切比晓夫度量，当我们希望用别的函数譬如多项式来代替一个函数，并能借助于多项式以所需精度计算原来的函数在每一点 $x\in[a,b]$ 的值时，量 $d(f,g)$ 恰好表征出这个近似计算的精确度.

$C[a,b]$ 中的度量(6)与 $\mathbb{R}^n$ 中的度量(5)是很相似的.

例 8 在 $C[a,b]$ 中可以象度量(4)那样对 $p\geqslant 1$ 引进度量

$$d_p(f,g)=\left(\int_a^b |f-g|^p(x)dx\right)^{1/p}. \tag{7}$$

当 $p\geqslant 1$ 时,从积分的闵可夫斯基不等式推出(7)是度量,积分的闵可夫斯基不等式可从对积分和写出的闵可夫斯基不等式取极限而得.

特别地,度量(7)的重要的特殊情形是: $p=1$ 时的一次平均偏差, $p=2$ 时的二次平均偏差; $p=+\infty$ 时的一致偏差.

被赋予度量(7)的空间 $C[a,b]$ 经常用符号 $C_p[a,b]$ 表示.可以验证, $C_\infty[a,b]$ 是赋予度量(6)的空间 $C[a,b]$.

例 9 也可以把度量(7)用到区间 $[a,b]$ 上黎曼可积的函数集 $\mathscr{R}[a,b]$ 上. 但是,因为两个函数,甚至两个不全重合的函数之差的模之积分可以变为零,这时,公理 a) 将不满足. 然而我们知道,非负函数 $\varphi\in\mathscr{R}[a,b]$ 的积分等于零的充要条件是 $\varphi(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立.

因此,如果把集合 $\mathscr{R}[a,b]$ 分成等价函数类, $\mathscr{R}[a,b]$ 中的函数认为是等价的(或相等),假如它们不相等的点组成的集只在零测度集上才不同,那么在那些等价类组成的集合 $\tilde{\mathscr{R}}[a,b]$ 上,关系式(7)确实给出了度量. 被赋予这个度量的集合 $\tilde{\mathscr{R}}[a,b]$ 用 $\tilde{\mathscr{R}}_p[a,b]$ 表示,有时候简单地表为 $\mathscr{R}_p[a,b]$.

例 10 在定义于 $[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上有 k 阶连续导数的函数集 $C^{(k)}[a,b]$ 中可以定义下列度量:

$$d(f,g)=\max\{M_0,\cdots,M_k\}, \tag{8}$$

其中

$$M_i=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|,\quad i=0,1,\cdots k.$$

利用(6)是度量，容易验证(8)是度量.

例如，我们假设作为时间函数的 f 是动点的坐标. 如果对点在时间间隔 $[a,b]$ 内所能到达的区域加以限制，且不准超过确定的速度，此外，还希望有某种舒适性，就是加速度不应超过一个确定的水准，那么对于函数 $f\in C^{(2)}[a,b]$，自然就要考虑数组

$$\{\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,\quad \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|,\quad \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\},$$

而且就这些特征而言，如果量(8)很小，就认为运动 f、g 是相近的.

所研究的例子表明，同一个集合可以用不同的方法度量化.引用这样或那样的度量通常由所提问题本身决定. 而现在我们关心的是一切度量空间共同具有的最一般的性质.

2. 度量空间中的开集和闭集 设 $(X;\ d)$ 是度量空间、像第七章 §1 中对 $X=\mathbb{R}^n$ 所做的那样，在一般情形下，也可以引进以给定点为中心的球，开集，闭集，点的邻域，集合的极限点等概念.

让我们回忆这些在今后起重要作用的概念.

定义 2 设 $\delta>0$，$a\in X$，集合

$$B(a;\delta)=\{x\in X\,|\,d(a,x)<\delta\}$$

称为以 $a\in X$ 为中心 δ 为半径的球，或者称为点 a 的 δ-邻域.

在一般度量空间的情况，这个名称是方便的，但不应把它等同于我们在 $\mathbb{R}^3$ 中习惯的传统的几何形状.

例 11 $C[a,b]$ 中，以在 $[a,b]$ 上恒等于零的函数为中心的单位球，由在 $[a,b]$ 上连续且在 $[a,b]$ 上的模小于 1 的那些函数组成.

例 12 设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形，X 中两点间的距离，由该两点在 $\mathbb{R}^2$ 中的距离来定义. 那么 X 是度量空间，同时可以把

具有这种度量的正方形X本身看作关于自己中心的有任意半径$\rho \geqslant \sqrt{2}/2$的球.

显然,很离奇的形状可以作成球,因此,球的术语不应过于从字面上去理解.

定义 3 集合$G \subset X$称为度量空间$(X;d)$的开集,如果对于任意点$x \in G$,有球$B(x;\delta)$,使得$B(x;\delta) \subset G$.

显然,从这个定义推出X本身是$(X;d)$中的开集;空集$\varnothing$也是开集.利用$\mathbb{R}^n$中的那些论证,可以证明球$B(a;r)$或者它的外部$\{x \in X \mid d(a,x) > r\}$是开集.(见第七章§1的例3,例4.)

定义 4 集合$\mathscr{F} \subset X$称为$(X;d)$的闭集,如果它的余集$X \backslash \mathscr{F}$是$(X;d)$的开集.

特别地,由此得出闭球

$$\widetilde{B}(a;r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leqslant r\}$$

是度量空间$(X;d)$的闭集.

对于度量空间$(X;d)$的开集和闭集成立

命题 1 a) X中任意多个开集组成的开集族$\{G_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$,这些集合之并集$\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$是$X$中的开集.

b) X中有限个开集之交$\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$是$X$中的开集.

a'). X中任意多个闭集组成的闭集族$\{\mathscr{F}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$这些集合之交集$\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathscr{F}_\alpha$是$X$中的闭集.

b') X中有限个闭集之并$\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathscr{F}_i$是$X$中的闭集.

命题1的证明可以逐字逐句地重复$\mathbb{R}^n$中对于开集和闭集的相应命题的证明,我们把它略去.(见第七章§1命题1.)

定义 5 称X中包含点$x \in X$的开集为这个点在X中的邻域.