函授自学丛书

数的概念

辽宁教育学院函授部编

说　　明

为了解决中学数学教学的急需，我们试编了一套数学函授自学丛书，它包括初等数学的主要内容及某些高等数学的初步知识。本书就是这套丛书中的一册。

这套丛书的初稿曾经有关市、地教育学院的同志审阅，并提出了宝贵的修改意见，在此表示感谢。

但由于我们的水平所限，加之时间仓促，书中难免仍有不妥之处，切望读者批评指正。

辽宁教育学院函授部数学教研室

一九七八年七月

目　　录

数的概念

数 的 概 念

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的一门科学。学习数学，特别是代数学，必须对数的概念有所了解。在中学数学里介绍了有理数、实数和复数概念以及它们的四则运算。为使读者更好地掌握中学数学中的有关科学内容，本章对数的发生发展和数的一些重要性质作一简单介绍，结合中学教学需要，着重介绍有理数、实数和复数三部分内容。

“数学是从人的需要中产生的。”数产生于数（音sǔ）数和度量。在没有数的概念以前，人们对量的认识只有“多”、“少”之分。随着生产的发展，数也随之产生了，开始出现诸如：“二个人”、“五只羊”……等具体的数。人们在长期的生产实践中，经过千百万次量的运算，才把数逐渐地与具体事物分离开。正如恩格斯所说：“为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容。”脱离了具体内容而引进符号，就产生了抽象的数。这种抽象的数不再是专指某种特殊的量了。列宁说：“一切科学的抽象（正确的、郑重的、不是荒唐的）都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。”因而，从具体的量中抽象出来的数，应用起来既广泛又方便。

为了清楚地了解数的概念之间的关系，我们把数的概念归纳成如下系统。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{自然数（正整数）}\\ \text{零}\end{array}\right\}\text{非负整数}\\ \text{（正）分数}\end{array}\right\}\text{非负有理数}\\ \text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{array}\right\}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{array}\right\}\text{复数}$$

数的发生发展过程是长期的、复杂的，并非完全按着上述程序发生发展的。如人们在没有完全认识有理数之前无理数的概念就产生了，复数概念的产生也先于实数理论的建立。为了学习研究的方便。我们仍按上述系统讨论，只是对非负有理数不再讨论，并把非负有理数作为已知的，在它的基础上逐步增添新数，使旧数集逐步扩张。

数的扩张应遵循下列的原则：在旧有数集的基础上逐步增添新数而构成新数集，而新数集应保留旧数集的基本性质和运算规律，并能解决旧数集不能解决的某些问题。

第一节　正数与负数

§1.1　负数的引进

在三大革命运动和日常生活中，经常遇到这样一些量：如某天的最高温度是零上5°C，最低温度是零下2°C；某水库水位在零水位上 4 厘米或在零水位下 3 厘米；又如中午12点前两小时或中午12点后两小时；火车在车站南20公里或在车站北30公里等等。这些都是具有相反意义的量，它们既有数量上的大小之分，又有意义上的反正之别。这种具有相反意义的量，在客观世界中大量存在着，如产量的增加与减

少，时间的未来与过去，财政的收入与支出，……等等。小学算术里学过的数只能表达它们数量多少的一面，而不足以表示它们的相反意义一面，因而只有这样的数是不够的，必须引进新数。

为使方程 $x+2=0$ 有解，也需要引进新数。

应当引进什么样的新数呢？如果能规定一个符号加到旧数上，这个问题就解决了。符号可以随意选定，如零上5°可写成“上5°”，零下2°可写成“下2°”。也可用其他符号。究竟选取什么样的符号好，人们在长期实践中发现，用加法与减法的运算符号“+”与“—”是最好的。我们规定：在区别具有相反意义的量时，把其中一种量（如上升、增加、收入等）规定为正的，把与其意义相反的量（如下降、减少、支出等）规定为负。对正量，在其前面加一个“+”号（读作正），对负量，在其前面加一个“—”号（读作负）。带有“+”的数叫做**正数**，带有“−”的数叫做**负数**。如零上5°记作+5°，零下2°记作−2°，零水线上4厘米记作+4厘米，零水线下3厘米记作−3厘米。+5、+4等为正数，−2、−3这些带负号的数为负数。

用来表示正量的正数前面的正号可以省略，例如，把+4和4看成是相同的。这样做，用起来方便。用来表示正负数的符号“+”、“—”叫做性质符号。

除零以外，在算术里学过的整数、分数分别叫做**正整数**、**正分数**又统称为**正有理数**。

与每个正有理数a相对应的数−a，叫做**负有理数**。负有理数又分为负整数和负分数。

零既不是正数也不是负数，是介于正负数之间的中性

数，也叫做正负数的分界数。

正负整数、正负分数和零统叫做**有理数**。全体有理数构成的集合叫做**有理数集**。

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

显然，任一有理数都可以表示为两个整数之比。

相反数的概念：

我们规定相互对应的数 a 与 $-a$ 互为相反数（简称反数），零的反数还是零。

例如 1 是 -1 的反数，-1 也是 1 的反数，1 与 -1 互为反数。正数的反数为负数，负数的反数为正数。

关于置符号的一般规定：

在正数前面置负号“－”，这个正数就变为它的反数（即负数）。在负数前面置负号“－”，这个负数也变为它的反数（即正数）。在正数或负数前面置正号“＋”，还表示它自身（即不变）。

如 $-(+4)=-4$，$-(-2)=+2$

$+(+4)=+4$，$+(-2)=-2$。

一般规定：对任何数 a，$+a$ 表示 a；$-a$ 表示 a 的相反数。

这里要注意，$+a$ 不一定是正数，$-a$ 也不一定是负数。

符号“－”的双重意义：

由于负数的引进，符号“－”就具有双重意义了，它既

是运算符号，又是性质符号。作为运算符号，它仍然表示减法运算；作为性质符号，它是作为转化为相反数的符号，$-a$表示a的相反数。

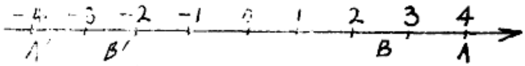
“－”双重意义在理论上不仅不会出现任何矛盾，反而会带来更大的方便（这将在以后说明）。如果在同一式子里有必要区分符号“－”的不同意义，可用括号加以区别，通常把a的相反数写成$(-a)$。

§1.2　有理数的比较

引进负数后，在研究数的大小时，通常要借助于数轴。为此，首先介绍数轴和绝对值的概念。

数轴

作一条直线，在直线上任取一点作为原点，选定一个方向作为正方向（一般规定向右为正向），适当选取一段线段作为量度单位。这样对于任何有理数a，就可以用直线上对应的点A来表示（见图1）。这种规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴。



（图1）

每个有理数都可在数轴上找到与其相对应的点。数零对应着原点；正数a（设为4）和b（设为$2\frac{1}{2}$）分别对应数轴上的点A和B；$-a$、$-b$分别对应数轴上的点A′、B′。

有了数轴，有理数都可以用数轴上的点表示，而且每一个有理数与数轴上的唯一确定的点相对应。（但数轴上的点

并非都与有理数相对应，要建立点与数的一一对应关系，必须在引进无理数之后）对于互为反数的两有理数在数轴上是关于原点对称的。

绝对值

数轴上的点到原点的距离只是考虑数值大小，而不论其方向的量。我们把数轴上的点到原点的距离叫做这个点所对应的数的绝对值，并用在这个数两旁各画一条竖线来表示。

数 a 的绝对值记作 $|a|$。

一般地，非负数的绝对值是这个数本身；负数的绝对值是它的相反数：

$$|a|=\begin{cases} a & （a是正数时）, \\ o & （a为零数时）, \\ -a & （a是负数时）。\end{cases}$$

例如：

$$|2|=2，|0|=0，\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}，\cdots\cdots。$$

有理数的比较：

在算术中已知非负有理数的大小关系满足以下顺序律：

（1）数的三分律：对于任意两个数 a 和 b，下列三种关系中有且仅有一种成立：

$a=b$，$a>b$，$a<b$。

（2）不等的对逆律：

若 $a>b$，则 $b<a$；

若 $a<b$，则 $b>a$。

（3）不等的传递律：

若　$a>b$，$b>c$，则　$a>c$。

（4）相等的传递律：

若　$a=b$，$b=c$，则　$a=c$。

（5）相等的反身律：$a=a$。

由于非负有理数满足顺序律，因而研究有理数的比较只需研究负数与负数，非负数与负数的关系。对此我们作以下规定（以下设 a、b 为正有理数）。

相等的规定：如果两负数的绝对值相等，则这两个负数相等：

$$若\quad a=b，则 -a=-b。$$

例如：$-\frac{1}{2}$与$-\frac{3}{6}$　因为　$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$，所以$-\frac{1}{2}=-\frac{3}{6}$

不等的规定：

（1）每个负数小于零，并小于任何正数：

$$-a<0 \qquad -a<b。$$

例如：$-2<0$，$-2<1$；

（2）每个正数和零大于负数：

$$b>-a，\ 0>-a$$

例如：$3>-1$，$0>-12$；

（3）两负数中，绝对值较大的数较小，绝对值较小的数较大：

若　$a>b$，则$-a<-b$；

若　$a<b$，则　$-a>-b$。

例如：$-2>-3$，$-5<-2$。

根据上面的规定，就可以对有理数进行比较，并能证明顺序律在有理数集合中仍然成立。这里以不等的传递性为例

加以证明。

不等的传递律：若 $a>b$，$b>c$（a、b、c 为有理数）则 $a>c$。

证明：如果 a、b、c 中没有一个是负数，则传递律成立（这是算术里的问题）。因而只要证明 a、b、c 中至少有一个负数的情况即可。

1° 若 a、b、c 中有一个为负数，则一定是 c（因为每个正数和零都大于负数），这时 b 为非负数，由于 $a>b$，所以 a 为正数，根据规定（2）它大于负数，故 $a>c$。

2° 若 a、b、c 中有两个负数，这两个负数一定是 b、c，a 必然是非负数。根据规定（2）有 $a>c$。

3° 若 a、b、c 都是负数，则 $-a$，$-b$，$-c$ 为正数。因为 $a>b$，$b>c$，根据规定（3）则有 $-a<-b$，$-b<-c$，由于非负数的传递律成立，所以有 $-a<-c$。根据规定（3）则有 $a>c$。

其他顺序律都是可以证明的，读者自证。

规定了有理数大小之后，正负数就可以用下面不等式表达：

不等式 $a>0$　　表示 a 为正数；

不等式 $a<0$　　表示 a 为负数。

有理数的大小比较借助于数轴就更为直观，数轴上右面的点所对应的数比左面的点所对应的数大；左面的点所对应的数比右面的点所对应的数小。同一点所对应的数相等。

§1.3 四则运算

根据数的扩张原则，引进负数后数的运算应当满足基本运算规律并能解决旧数集不能解决的一些问题。下面我们研

究怎样规定有理数的四则运算的法则。

加 法

首先分析一下在基本运算规律有效的前题下，应如何规定加法的运算法则。

我们约定任何有理数与它的相反数的和为零。设 a 、 b 为两正有理数，于是有

$$a+(-a)=0,$$
$$b+(-b)=0。$$

等号两边相加得

$$[a+(-a)]+[b+(-b)]=0。$$

根据交换律和结合律有

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

则 $(-a)+(-b)$ 是 $(a+b)$ 的反数，而 $(a+b)$ 的反数是 $-(a+b)$ 所以有

$$(-a)+(-b)=-(a+b)。$$

这就说明，两负有理数的和应规定为他们绝对值的和的反数。下面式子

$$b+(-b)=0$$

的两边同加 a 得

$$[b+(-b)]+a=0+a,$$

即 $b+[a+(-b)]=a$。

（1）若 $a\geqslant b$　两边同减去 b

则 $b+[a+(-b)]-b=a-b,$

即 $a+(-b)=a-b$。

（2）若 $a<b$　两边同减去 a

则 $b+[a+(-b)]-a=a-a,$

$$(b-a)+[a+(-b)]=0。$$

这说明$[a+(-b)]$是$(b-a)$的反数。

根据以上分析，我们规定以下加法运算法则：在规定中，设 a、b为正有理数）

1、同号两数相加，绝对值相加，符号不变：

$$a+b=a+b,$$

$$(-a)+(-b)=-(a+b);$$

2、异号两数相加，绝对值相减（绝对值较大的减去绝对值较小的），符号与绝对值较大的数的符号相同；两互反数的和是零：

$$a+(-b)=\begin{cases} a-b & (a>b), \\ -(b-a) & (a<b), \\ 0 & (a=b); \end{cases}$$

3、任何数与零相加，结果不变：

$$a+0=a,$$

$$-a+0=-a,$$

$$0+0=0。$$

用上面的定义可以证明，加法运算有以下性质：

（1）结合律和交换律成立；（a、b、c可以是正的，也可以是负的或零）

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

$$a+b=b+a;$$

（2）几个数之和的反数等于它们的反数之和：

$$-(a+b)=(-a)+(-b)。$$

证明性质 2 如下，性质 1 请读者自己证明。

$\because\ (a+b)+[(-a)+(-b)]=[(a+b)$
$+(-a)]+(-b)$(结合律)

$=[a+(-a)+b]+(-b)$（交换律）

$=[a+(-a)]+[b+(-b)]$(结合律)

$=0+0=0$

$\therefore\ -(a+b)=(-a)+(-b)$。

减　法

数的减法是加法的逆运算，即已知两个数的和（被减数）以及两加数中的一个（减数），求另一个加数（差）的运算。就是说、任意两数a和b的差$a-b$，就是满足$b+x=a$的数x。

现在来证明数x是存在的，并且是唯一的。

取$x=a+(-b)$　（b的相反数$-b$是存在的），则

$$
\begin{aligned}
b+x&=b+[a+(-b)]\\
&=b+[(-b)+a]\\
&=[b+(-b)]+a\\
&=0+a=a。
\end{aligned}
$$

这说明数x的确存在，至少它可以是$a+(-b)$

如果取$x=c$则

$$b+c=a,$$

两边加上$-b$得

$$b+c+(-b)=a+(-b),$$

即
$$c=a+(-b)。$$

这说明x是唯一的，等于且仅等于$a+(-b)$。

综上所述，我们得到减法法则如下：

$$a-b=a+(-b)。$$

即两数的差等于被减数与减数的相反数的和。这是一条定理。

对中学生讲授减法法则，可从实际导出。

例如，$2-(-3)$这一算式，就是求出一个数，使它与(-3)的和是2。

由于$(-3)+5=2$，所以$2-(-3)=5$。而$2+3=5$根据相等的传递性得

$$2-(-3)=2+3。$$

3是-3的相反数，从这个实例中归纳得出有理数减法法则。

"在一定条件下，矛盾的东西能够统一起来，又能互相转化"，加法和减法是一对矛盾，引进负数之后，它们既能统一，又能转化。$a-b$是减法，它可以转化为$a+(-b)$的形式而成加法。由于这种转化的存在，有理数的加法和减法运算，就都能统一为和的形式。

例如：$5-7+(-2)-3$，

可写成　$5+(-7)+(-2)+(-3)$；

$a+b-c-d+e$，

可写成　$a+b+(-c)+(-d)+e$。

由于差可以写成和的形式，因而符号"—"既作为运算符号又作为性质符号是合理的，也是方便的。

代数和

用加减运算符号连结起来的式子叫做代数和。从前面例子可知任何代数和都可以写成和的形式（这就是叫代数和的原因）。代数和中每个数叫作代数和的项。这些项就是原代数和中的加数的本身和减数的相反数。

例如：$5+(-7)-(-8)-9$ 的项是：5、-7、8、-9。

根据加法结合律、交换律和减法法则，一个数加上或减去一个代数和，可以如下进行。

$$a+(b+c-d)=a+b+c-d,$$

$$a-(b+c-d)=a-b-c+d。$$

这就是去据号。去括号的法则如下：

如果括号前是"十"号，把括号和它前面的"十"号去掉，括号里的各项不变；

如果括号前是"一"号，把括号和它前面的"一"号去掉，括号里的各项都变为它们的相反数。

这里只证明 $a-(b+c-d)=a-b-c+d$

证明：$\because\ (a-b-c+d)+(b+c-d)$

$$=[a+(-b)+(-c)+d)]+[b+c+(-d)]$$

$$=a+[(-b)+b]+[(-c)+c]+[d+(-d)]$$

$$=a$$

$$\therefore\quad a-(b+c-d)=a-b-c+d。$$

注意：在没有化成和的形式之前，不能随意加括号和交换位置。若变动某项的位置应连同它的符号一同交换。

例如：$2-3-4+8-7$ 不等于 $2-(3-4)+8-7$，

$2-3-4+8-7$ 不等于 $2-8-4+3-7$，

如果将代数和写成和的形式，就可以任意加括号和交换各项的位置了。（这是运用加法结合律和交换律的结果）。

例如：$2-3-4+8-7$

$$=2+(-3)+(-4)+8+(-7)$$

$$=2+[(-3)+(-4)]+8+(-7)$$