师专函授学习资料

《初等数学复习及研究》

（平面几何）

学习参考资料

第二分册

邯郸地区教师进修学校

保定地区教师进修学校

说　明

继《初等数学复习及研究》（平面几何）学习参考资料第一分册，我们又编写了主要内容为第三、四、五章有关证题术、轨迹和作图的参考资料。其中增加了一些集合的初步知识，供师专函授学员学习参考。

这本《学习参考资料》是由邯郸地区教师进修学校雷国铭、梁美玲和保定地区教师进修学校王爱俊、王德如、李子年几位同志负责编写的。另外，邯郸地区武安进修学校的蔡则会老师也参加了第五章的编写工作。

由于时间仓促，水平所限，缺点错误在所难免，望批评指正。

编　者

一九七九年十二月

目　录

第三章　证题术

对证题术应有的认识：证明几何题首先应该仔细审题，明确题设，题断，绘出正确图形，再有条不紊地去思考解决这一问题的途径。但是怎样才能使自己的思维符合规律而不是胡思乱想的呢？证题术在这方面提供了可能性。

证题术把几何命题按照一定的规律分成若干类（相等、不等、垂直平行……）分别指出该类问题的思路，这就清楚地显示出来证题术在证题中所起的作用。当然证题术绝不是什么“法术”好象学了证题术就对一切难题都能顺利解决似的。实则证题术仅给了我们在思考问题时的理路，真正解决问题还靠自己反复的思考，另外证题的顺利与否还和以前证题经验的多少有直接关系，所以掌握了证题术只是在一定程度上提高了证题的能力，真正彻底的提高，还在于我们熟练运用证题术去多作练习。

证题术的分类标准：我们知道几何学是系统地研究几何图形（初等的限于直线形和圆）性质（位置大小，形状）的科学，而每一个证明题都不外是要证在某种条件（题设）下的某种图形有什么性质（题断）。我们可把几何命题（证明题）按下列方法分成两大类：

一、研究几何量的大小：

几何量
- 线段和角（弧）
  - 线段和角的相等
  - 线段和角的不等
    - 线段和角的和差倍分
    - 线段乘积的和差关系
    - 线段和角的不等
- 面积的相等和不等（和、差、倍、分）

二、研究几何量的相互位置：

1、直线和直线的位置关系
- 垂直
- 平行

2、点和直线的位置
- 共点线
- 共线点

3、点和园的位置
- 共点园
- 共园点

4、直线和园的位置
- 二个公共点
- 一个公共点
- 无公共点

5、园和园的相互位置
- 外离
- 外切
- 相交
- 内切
- 内含
- 同心园

第一节、关于几何命题的证明和计算

一、证明两线段相等，主要有以下诸方法：

1、证明它们为全等形（多是三角形）的对应线段。

如无现成的全等形可添辅助线造成之。

关于两个三角形的全等可根据全等的五个判定定理证明之，再利用其为对应边（等角的对边）相等，得出二线段相等的结论。

另外由于二全等形的对应线段（对应边上的高、中线、分角线等等）相等，亦可证明二线段相等。

2、同一三角形中两等角的对边。

3、证明它们为平行四边形的一双对边。另外还可利用平行四边形的对角线互相平分的性质证明二线段相等。

4、证明它们为矩形的对角线。

5、证明它们为等腰梯形的对角线。

6、利用中垂线的性质：线段中垂线上的点到两端等距离。

8、利用斜线定理：由一直线外的一点到这条直线的垂线及诸斜线，斜线足与垂线足等距离者（或斜线与垂线夹等角者）斜线便等长。

9、证明它们同等于另一线段或分别等于某二相等的线段。

10、过三角形一边中点且平行于第三边的直线分第二边为两等分。

11、两前项（或两后项）相等的比例式中的两后项（或两前项）相等。

12、证明二线段比值为1。

13、证明它们为同底（或等底）两等积三角形的高或等高等积三角形的底。

14、如两线段为同园或等园内两线段可证明它们为：

(1)两半径或两直径。

(2)等弧所对的弦。

(3)等园周（心）角所对的弦。

(4)与园心等距离的二弦。

(5)从园外一点至园所引二切线。

15、利用两园公共弦定理：即连心线平分公共弦。

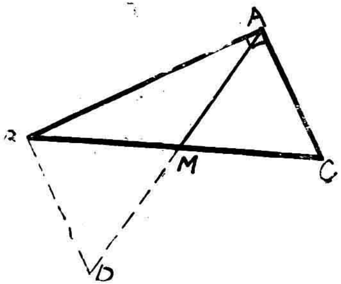
16、利用垂径平分弦定理：由园心引弦的垂线必平分这个弦。

17、利用等腰三角形的性质。

现举例说明如下：

例1、证明直角三角形斜边中点与三顶点等距离。

《注》本例应用极广宜熟记。



已知 M为Rt△ABC斜边BC的中点

求证 MA＝MB＝MC

证法1见图 ∵ M是BC的中点

∴ BM＝MC

延长AM至D 使MD＝AM 连BD

∠BMD＝∠CMA（对顶角相等）

∴ △BMD≌△AMC ∴ AC＝BD ∠CAM＝∠D

∴ AC∥BD

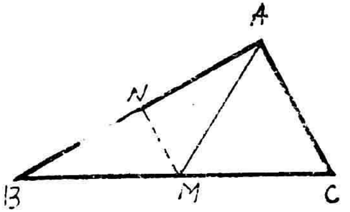
又∵ CA⊥AB ∴BD⊥AB

∴ Rt△ABD≌Rt△BAC ∴ AD＝BC

∴ $\frac{1}{2}$AD＝$\frac{1}{2}$BC

即AM＝BM＝CM。

证法2 （见图） 引$MN\perp AB$ 连AM

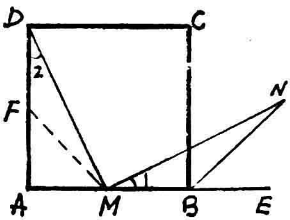


$\because$ $AC\perp AB$

$\therefore MN\parallel AC$ $\because M$是BC的中点 $\therefore$ N亦为AB的中点 即MN为AB的中垂线

$\therefore$ $AM=BM=CM$

例2 （如图）在正方形$ABCD$中M是AB的中点



$MN\perp MD$ BN平分$\angle CBE$

则$MD=MN$

已知
求证 } 从略

证明 取AD的中点F 连FM

$\angle 1=\angle 2$ （$\angle 1$和$\angle 2$均为$\angle AMD$的余角）

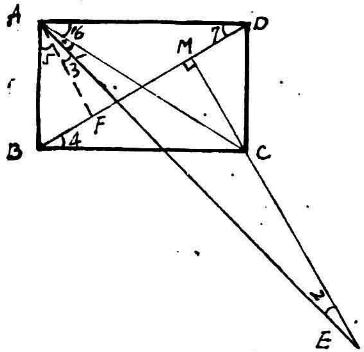
又$\because$ $AB=AD$ $BM=DF$亦即$AM=AF$

$\therefore\triangle AMF$为等腰直角三角形 $\therefore\angle MFD=135°$

又BN为$\angle CBE$的分角线 $\therefore MBN=135°$

$\therefore\triangle MBN\cong\triangle DFM$ $\therefore MD=MN$

例3 自矩形$ABCD$的顶点C作对角线BD的垂线延长交$\angle A$的平分线于E点，则$AC=EC$



已知
} 从略
求证

［思考］ 要想证明AC = CE 需设法证明 $\angle 1 = \angle 2$

由于AF和EM均垂直于BD故AF ∥ EM

$\therefore \angle 3 = \angle 2$ 若能证明 $\angle 1 = \angle 3$ 即可

又∵AE为∠A的分角线，若能证 $\angle 5 = \angle 6$ 即可

证明 （见图）作AF⊥BD ∵CM⊥BD

$\therefore$ AF ∥ CE $\therefore \angle 3 = \angle 2$（内错角相等）

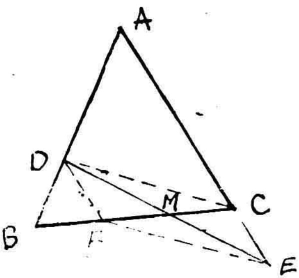
又∵AE是∠A的分角线 $\therefore \angle BAE = \angle DAE$

从图中可知 $\angle 4 = \angle 5$ 又 $\angle 4 = \angle 7$ $\angle 6 = \angle 7$

$\therefore \angle 5 = \angle 6$ $\therefore \angle 1 = \angle 3$ $\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\therefore$ AC = CE。

例4 于等腰△ABC的一腰AB上取一点D，再在他腰AC的延长线上取一点E，令BD = CE。则DE必被底边BC平分。



已知 D为等腰△ABC AB边上的一点，E为AC延长线上的一点且BD = CE又DE交BC于M

求证 DM = EM

［思考］ 作DF ∥ AC，设法证明CDFE为一平行

边形，若能证明$DF=CE$即可得以上结论。

要证$DF=CE$，只要证$DF=BD$。即证$\angle B=\angle D$即可。由作图可知$\angle ACB=\angle DFB$（同位角相等）

又$\because \triangle ABC$为等腰三角形 $\therefore \angle B=\angle ACB$
$\therefore \angle DFB=\angle B$ $\therefore DF=BD=CE$，于是得出$CDFE$为一平行四边形。

再由对角线互相平分 得出$DM=EM$

证明 （见上图）作$DF \parallel AC$ $\therefore \angle ACB=\angle DFB$

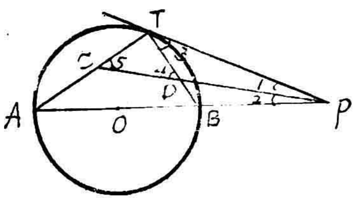
$\because \triangle ABC$为一等腰三角形 $\therefore \angle B=\angle ACB$

$\therefore \angle B=\angle DFB$ $\therefore DF=BD=CE$

$\therefore CDFE$为一平行四边形。

$\therefore DM=EM$（平行四边形的对角线互相平分）。

例5 如果在直径AB的延长线上任取一点P，从P向园引切线切点为T，$\angle APT$的平分线交AT于C，交BT于D 则$TC=TD$



已知
} 从略
求证

证明 （见图） $\because CP$是$\angle APT$的分角线

$\therefore \angle 1=\angle 2$ 又$\because PT$是$\odot O$的切线，T为切点

$\therefore \angle 3=\angle A$（弦切角等于同弧上的园周角）

据三角形的外角定理知 $\angle 4=\angle 3+\angle 1$

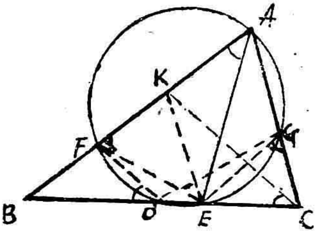
$\angle 5=\angle A+\angle 2$ $\therefore \angle 4=\angle 5$

$\therefore TC=TD$（在同一三角形中等角的对边相等）。

例6 在△ABC中D为BC的中点，AE为∠A的平分线交BC于E．⊙ADE交AB、AC于F、G

则BF＝CG

已知
} 从略
求证



证法1 （见图）∵AE是∠A的平分线

∴∠BAE＝∠CAE　　∴$\overset{\frown}{FE}=\overset{\frown}{EG}$、连FE和EG

∴FE＝EG（等弧对等弦）∴∠EGC＝∠AFE（园内接四边形的外角等于内对角）再在BA上截取FK＝BF连FD、CK、则FD是△BCK的中位线　　∴DF∥CK．

∴∠BDF∠BCK而∠BDF＝∠BAE（外角等于内对角）。∴∠BCK＝∠KAE ∴A、K、E、C、四点共园

∴∠FKE＝∠ECG　　∴△FEK≌△GEC

∴CG＝FK＝BF。

证法2 （见上图）由AFDG为园内接四边形

∴∠AFD＋∠AGD＝180°

∴∠BFD＋∠DGC＝18)°

据已知　BD＝DC　令△DGC绕D点依顺时针方向旋转，使C点与B点重合　则BFDG构成一四边形

∵对角互补　　∴B、F、D、G四点共园

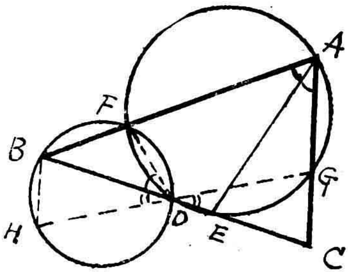
从而可知△BDF和△CDG的外接园相等

但AFDE为园内接四边形

∴∠BDF＝∠FAE＝∠EAG＝∠EDG＝∠CDG

$\therefore BF = CG$（在等园中等园周角对等弦）。

证法3 （见下图）连结GD并延长到H使$DH = DG$



连BH 由于D为BC的中点

$\therefore \triangle BDH \cong \triangle GDC$

$\therefore BH = CG$

$\therefore \angle H = \angle CGD = \angle AFD$

$\therefore$ B、H、D、F四点共园

又$\because \angle FDB = \angle FAE$

$= \angle EAG = \angle BDH$

$\therefore BF = BH = CG$。

证法4 （见证法1图）由割线定理知：

$$BF \cdot BA = BD \cdot BE \cdots\cdots\cdots (1)$$

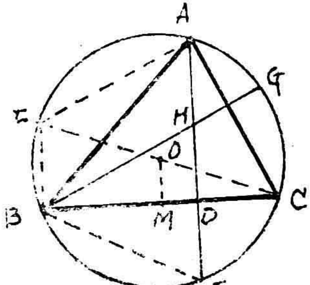
$$CG \cdot CA = CE \cdot CD \cdots\cdots\cdots (2)$$

$\frac{(1)}{(2)}$得：$\frac{BF}{CG} \cdot \frac{BA}{CA} = \frac{BE}{CE}$ （其中$BD = DC$）

再据分角线定理 有：$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$代入上式

得 $\frac{BF}{CG} = 1$ $\therefore BF = CG$。

例7 三角形的垂心到高线（延长线）与外接园交点间的线段被垂直此线的一边所平分。



己知 H为△ABE的垂心，AD为BC边上的高，延长AD与外接园相交于E，O为外心

求证 $HD = DE$

证法1 （见上图）过 B作 BC的垂线与 CO延长线交于 F，在△CFB中，自 BC的中点M作 BC的垂线必通过园心 O，则 OM∥BF ∴O为 CF的中点 CO＝OF

∴ F为⊙ABC上，∴ CF是⊙ABC的直径，连 FA

∴∠FAC＝90° ∴FA⊥AC

∴ FA∥BG

又 BF∥AH ∴ FBHA是一平行四边形

连结 BE 由于 $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{AG}$ ∴ $\overset{\frown}{BFA}=\overset{\frown}{GAF}$

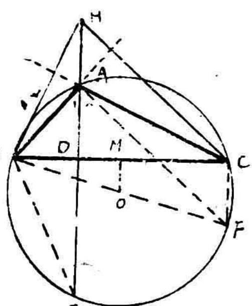
∵ ∠BEA＝∠FBG 而∠FBG＝∠BHE

∴∠BEH＝∠BHE ∴ △BEH是等腰三角形

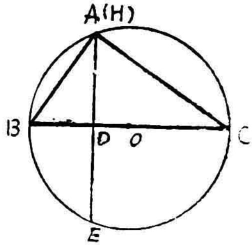
∴ HD＝DE

若△ABC为钝角三角形（如下图）二同样可证得结论

若△ABC为直角三角形（如下图一）直角顶点A为其垂心，很显然HE被BC平分即有HD＝DE

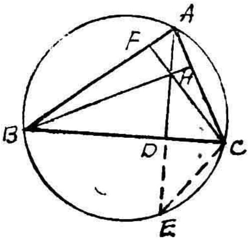


（图一）



（图二）

证法2 （见图）∵ H为△ABC的垂心



$CF\perp AB$ $AD\perp BC$

∴ $\angle FCB=90°-\angle B$

连CE $\angle DCE=90°-\angle E$

∵ A、B、E、C共园

∴ $\angle B=\angle E$ ∴$\angle FCB=\angle DCE$（等角的余角相等）

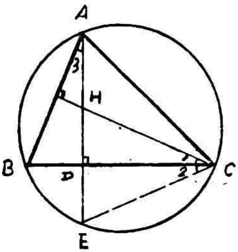
在△CHE中 CD为顶角$\angle HCE$的平分线

且$CD\perp EH$（∵$AD\perp BC$）

∴ CD必平分底边HE

∴ $HD=DE$

证法3 （见图） $\angle 1=\angle 3$（等角的余角相等）



$\angle 2=\angle 3$（同弧上的园周角相等）

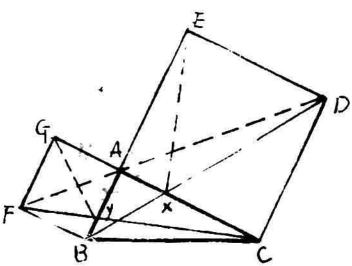
∴ $\angle 1=\angle 2$ CD为公用边

∴ Rt△CHD≌Rt△CED

∴ $HD=DE$

例8 在直角三角形ABC的两直角边AB、AC上向形外作正方形ABFG和ACDE 而BD CF各与AC AB交于X、Y点

求证 $AX=AY$



（利用等底、等积两三角形等高证明之）

（图3.14）

证明 （见上图）连GY EX和FDA（显然为一直线） ∵ $S_{\triangle EAX}=S_{\triangle DAX}$

∴ $S_{\triangle EBX}=S_{\triangle DBA}$

同样 $S_{\triangle GAY}=S_{\triangle FAY}$

∴ $S_{\triangle GCY}=S_{\triangle FCA}$

又 $S_{\triangle DAB}=S_{\triangle ABC}$（同底等高二三角形等积）

同理 $S_{\triangle FAC}=S_{\triangle ABC}$

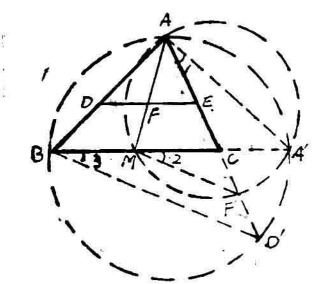
∴ $S_{\triangle DAB}=S_{\triangle FAC}$

∴ $S_{\triangle EBX}=S_{\triangle GCY}$

∵ $AB=AG$ $AE=AC$ ∴ $EB=CG$

∴ $AX=AY$（等底等积两三角形高相等）。

例9 在三角形内作任何平行于底边的直线其夹于两腰间的线段必被底边上的中线所平分。



已知 AM为△ABC，BC边上的中线，$DE\parallel BC$，DE分别交AB、AM、AC于D、F、E。

求证 $DF=FE$

（利用园的有关定理证明之）

证法1 （见图） ∵ $BE\parallel BC$

∴ $\angle DEA=\angle BCA$ 延长BC至A'使$CA'=EA$ 再延长AC至F'又至D'使$CF'=EF$，$F'D'=FD$ 则$\triangle A'CF'\cong\triangle AEF$，和$\triangle A'CD'\cong\triangle AED$（S，a，S）