GAO

DENG

SHU

XUE

山东省五所师范院校《高等数学》教材编写组

山东省出版总社
临 沂 办 事 处

高等数学

·上·

前　　言

本书是根据三年制师范专科学校物理专业《高等数学》教学大纲与我省教学需要而编写的。编写中兼顾到除可作高师二年制物理专业、三年制化学专业以及函授、进修同类专业的教材外、还可作电大、夜大同类专业的教学参考书。

本书是《高等数学》的基础部分，分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何、行列式和矩阵等。下册包括多元函数微积分学、常微分方程、矢量分析与场论初步、无穷级数等。书中带 *号内容，可供选用。各章配有习题，并另有附印的习题解答。

参加本书编写工作的有临沂师专吴大坤、泰安师专赵兴乐、烟台师范学院秦祥保、魏远、山东煤矿教育学院张润庠、青岛师专陈殿宣、临沂教育学院王端中等同志。

本书的审定以魏远付教授为主，还有吴大坤、张润庠、赵兴乐。参加审稿会的单位有济宁师专、山东省教育学院、济宁教育学院、青岛教育学院、潍坊教育学院、聊城教育学院、德州教育学院、济南教育学院、济南师专。

参加审稿的同志都认真审阅了部分原稿，提出了许多改进意见。在本书编印过程中，山东省教育厅以及临沂师专、泰安师专、山东煤矿教育学院等各院校的领导同志给予大力支持，对此我们表示衷心感谢。

限于编者水平，[illegible]不妥之[illegible]定然不少，恳切希望[illegible]

者

[illegible]五年六月

目　录

第一章　变量与函数

我们以前所学的初等数学大都是研究常量的数学，它只能反映相对地不变的现象，而现实世界则是普遍存在着矛盾，运动和变化的量，初等数学无法反映变量的变化规律，而高等数学是以变量为研究对象的一门数学。

§1—1　予备知识

一、实数与数轴

实数的全体组成的集合，称为实数集。在一直线上确定一点为原点，指定一个方向为正方向，并规定了一个长度单位，称这样的直线为数轴。实数集和数轴上的所有点有一一对应关系。这就是说：任一实数都对应数轴上唯一的一点，反过来，数轴上每一点也都唯一的代表一个实数。正由于此，在今后的叙述中，我们将对数与点不加区别，常常把"数a"说成"点a"，反之亦然。

二、绝对值不等式

设a为一实数，a的绝对值表示为

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geqslant 0 \\ -a & \text{当 } a < 0 \end{cases}$$

由此可知$|a|$总是正数或零，且有

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

就几何意义来说，$|a|$在数轴上表示点a与原点0之间的距离。根据绝对值的定义，容易知道下面关系式成立：

$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

由此性质可以推出不等式$|a|\leqslant k(k\geqslant 0)$与$-k\leqslant a\leqslant k$是等价的。

$|x-x_0|$在数轴上表示点x与点x_0的距离。那末不等式$|x-x_0|\leqslant k(k\geqslant 0)$表示在数轴上的点$x$与点$x_0$的距离小于或等于$k$。由此可推出以下等价不等式：

$-k\leqslant x-x_0\leqslant k$　从而有$x_0-k\leqslant x\leqslant x_0+k$这一等价不等式在数轴上的几何表示如图1—1。

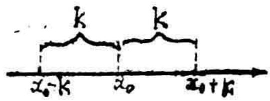

图1—1

从图上可以看出，点x与点x_0的距离不超过k，或动点x介于点x_0-k与点x_0+k之间。反之亦然。

当$x_0=0$时，即x_0点为原点，便得到上述等价不等式的特殊情况。

绝对值不等式的运算

定理1．和的绝对值不大于各项绝对值的和，即

$$|a+b+\cdots+k|\leqslant|a|+|b|+\cdots+|k|$$

证，　因　$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；

$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$；

…………………………

$-|k|\leqslant k\leqslant|k|$；

逐项相加得

$$-(|a|+|b|+\cdots\cdots+|k|)\leqslant a+b+\cdots+k\leqslant|a|+|b|+\cdots+|k|.$$

定理2，差的绝对值不小于各项绝对值的差，

即　$|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

证 因 $|a|=|(a-b)+b|$ 由定理1得

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|$$

于是 $$|a|-|b|\leqslant|a-b|$$

定理3，积的绝对值等于各项绝对值的积，即

$$|abc\cdots k|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots|k|$$

定理4，商的绝对值当除数的绝对值不为零时等于被除数及除数的绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \qquad (b\neq 0)$$

根据乘法与除法的定义，上面两个定理显然成立。

三、区间和邻域

区间是指介于两个实数之间的全体实数，两个实数叫区间的端点。

1. 有限区间

设a与b为两个实数，且$a<b$，满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数x的全体叫做开区间，用记号(a, b)表示。

满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切实数x的全体叫做闭区间，用记号$[a, b]$表示。

满足不等式

$$a<x\leqslant b \text{或} a\leqslant x<b$$

的一切实数的全体，叫做半开区间。用记号$(a, b]$或$[a, b)$表示。

上面三种区间的长度都是$b-a$。它们在数轴上的几何表示如图1—2（a），（b），（c），（d）。

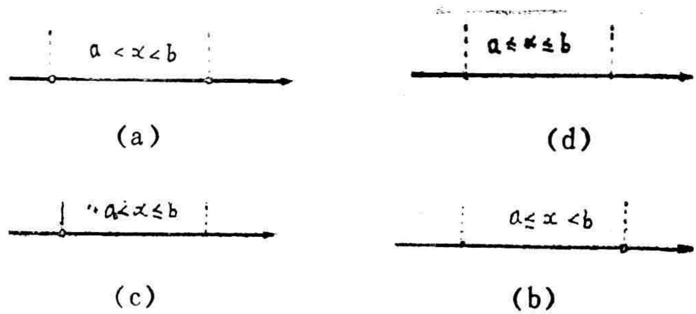

图1—2

2. 无限区间

满足不等式$a \leqslant x < \infty$的全体实数，用记号$[a, \infty)$表示。

满足不等式$-\infty < x \leqslant b$的全体实数，用记号$(-\infty, b]$表示。

满足不等式$-\infty < x < \infty$的全体实数，用记号$(-\infty, +\infty)$表示。

这里引用的“∞”和“$-\infty$”是记号，不是数。

3. 邻域

设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$，以点a为中心，长度等于2δ的开区间，称为点a的δ邻域，点a称为邻域的中心，δ称为邻域的半径。

点a的δ邻域用不等式表示为

$$|x - a| < \delta.$$

用记号表示为$(a - \delta, a + \delta)$，其几何表示如图1－3。

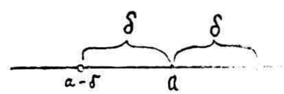

图1—3

习 题

解下列不等式

1. $0 < (x-2)^2 \leqslant 4$

2. $|x|>x$

3. $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$

4. $|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

5. $|\sin x|=\sin x+2$

6. $|2x+3|=x^2$

§1—2 函数

一、常量与变量

在物理学及其他各种自然科学中，我们常遇到两种量，一种量是在事物的运动或变化过程中数值保持不变的量，另一种是在事物运动或变化的过程中可取不同数值的量，如自由落体的下降速度和与地面的距离就不断改变，而落体的质量在这一过程中则保持不变。又如将一个密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数是不变的，而气体的温度和压力则不断地变化。

定义1. 在某一过程中，数值保持不变的量称为常量；数值不断变化的量称为变量。

一个量是常量还是变量，应根据具体问题具体分析。有些量在某一过程中是常量，而在另一过程中又可能是变量。

如汽车在两车站间行驶时，乘客的数目是常量，汽车与车站间的距离是变量；当汽车停靠车站时乘客的数目可能成了变量，而汽车与车站间的距离成了常量。

二、函数概念

在同一自然现象或技术过程中，往往同时存在几个变量，通常彼此间并不是孤立的，而是相互联系相互依赖并遵

循着一定规律变化的。从以下几例可以看到这种关系。

例1．质量一定的气体，在一定温度下，它的压力P与体积V的关系是

$$P=\frac{k}{V} \qquad (k\text{为常数})$$

例2．在初速为零的落体运动中，路程S和时间t是两个变量，当时间t变化时，所经历的路程也跟着改变，它们之间有下列关系

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (t\geqslant 0，g\text{是重力加速度、常量})．$$

例3．在电阻两端加直流电压V，电阻中有电流I通过，V改变时，I随之改变．若电阻R＝2(欧)，求I随V变化的规律．

解 由欧姆定律

$$I=\frac{V}{R}$$

当R＝2(欧)时

$$I=\frac{V}{2} \qquad (1)$$

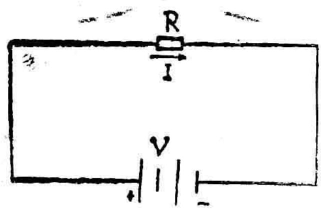

图1—4

当电压V改变时，电流I按(1)式相应改变；并且加反向电压（即电源反接，这时V取负值）电流也反向（即I取负值），它们的数值可按公式(1)算出，列表如下

V（伏）	……	－2	－1	0	1	2	3	4	5	……
I(安)	……	－1	－0.5	1	0.5	1	1.5	2	2.5	……

以V为横坐标，I为纵坐标，在平面直角坐标系中描出

各点，这些点连成一条直线，这条直线也表示I随V变化的规律如图1—5。

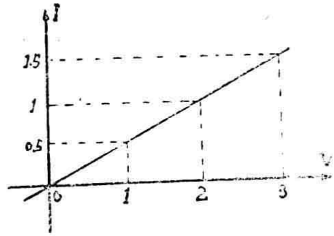

图1—5

抽去上面几个不同例子的实际意义，就给出了函数概念

定义2。设在某一变化过程中有两个变量x和y，若x在其变化范围内任意取定一个值，y按照一定的规律都有唯一确定的值与之对应，则称变量y是变量x的函数。x叫做自变量，函数y又叫因变量，记作

$$y = f(x)$$

变化范围D称为函数f(x)的定义域，f(x)也表示与x值相对应的函数值，全体函数值构成y = f(x)的值域R。记号y = f(x)中的f表示y与x相对应的对应规律。函数可以记作y = f(x)，也可记作y = φ(x)或y = g(x)。但一个函数在讨论中应取定一种记法；同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律。

函数是由定义域及对应规律所确定的，因此研究函数时必须注意它的定义域。

1. 在实际问题中，函数的定义域是由所研究的问题的实际意义来确定的。

2. 若没有指明因变量的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数时，则我们约定这个函数的定义域是使这个解析式有意义的自变量的一切实数值的集合。

3. 若表示一个函数的解析式是由几个式子组合而成的，则这个函数的定义域就必须取这几个式子允许值范围的公共

部分。

下面我们举例说明如何求函数的定义域.

例4. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$

解 (1) 因为二次根式内的代数式的值必须大于等于零；分式的分母不等于零；对数的真数必须大于零.

所以函数的定义域适合下列不等式组的解：

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ x-3\neq 0 \\ 5-x>0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x\geqslant 2 \\ x\neq 3 \\ x<5 \end{cases}$$

得 $2\leqslant x<3$ 或 $3<x<5$ 如图1—6

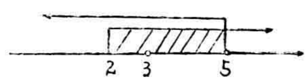

图1—6

(2) 因为 $x^2-x-6\geqslant 0$

即 $(x-3)(x+2)\geqslant 0$ 而这个不等式与下面两个不等式组同解：

$$\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ x+2\geqslant 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x-3\leqslant 0 \\ x+2\leqslant 0 \end{cases} \quad (2)$$

解此两个不等式组得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$. 对于 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$，则要求解不等式 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$.

取解的公共部分，得定义域为〔-3，-2〕或〔3，4〕，如图1—7.

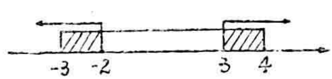

图1—7

例2. 设 $y=f(x)$ 的定义域

是$[0,1]$，

求：(1) $f(x^2)$　(2) $f(\sin x)$　(3) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域。

解　(1)欲使$f(x^2)$有意义，必须使$0\leqslant x^2\leqslant 1$，

即　　$|x|\leqslant 1$亦即$-1\leqslant x\leqslant 1$。

(2) 欲使$f(\sin x)$有意义，必须使$0\leqslant \sin x\leqslant 1$，

即　　$f(\sin x)$的定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi]$，(k为整数)。

(3) 欲使$f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$有意义，必须

$0\leqslant x+a\leqslant 1$与$0\leqslant x-a\leqslant 1$同时成立，

即　　$-a\leqslant x\leqslant 1-a$与$a\leqslant x\leqslant 1+a$同时成立。因为$a>0$，要使两不等式有公共部分，必须$a\leqslant 1-a$。

所以，$a\leqslant \frac{1}{2}$，即当$0<a\leqslant \frac{1}{2}$时，

定义域为$(a,1-a)$。

当$a>\frac{1}{2}$时，定义域不存在。

例3．$y^2=x$表示$y=\sqrt{x}$与$y=-\sqrt{x}$两个函数，它们的定义域都是$x\geqslant 0$。

对于$y^2=x$给定一个正数值x，y有两个值与之对应。今后，一般地，若变量x在其定义域D内任取一值时，变量y有两个或两个以上的值与之对应，则称y为x的多值函数。遇到这种情况时，我们都把它当作多个同时出现的函数来处理。

三、函数的表示法：

函数的表示法常用的有三种：

1．解析法（也叫公式法）

把两个变量之间的函数关系直接用解析式表出，并注明函数的定义域，这种方法叫解析法．数学分析中所涉及的函数大多数用此法表出．如自由落体公式$S=\frac{1}{2}gt^2$，以及压力P与体积V的关系$P=\frac{k}{V}$等，都是用解析法表示的．

有时需要用几个式子表示一个函数．如研究空气温度T与高度h的关系就是这样的．

我们知道，离地面越高气温越低，按照地球的中纬度地区平均大气状态，国际上规定了温度T与高度h的变化规律是

$$T=\begin{cases}15-6.5h & h<11\text{千米}\\ -56.5 & 11\leqslant h\leqslant 80\text{千米}\end{cases}$$

式中温度的单位是摄氏温度．随着高度的增加，气温逐渐下降，但高度超过11千米而在80千米以下时，气温保持在$-56.5°C$，这一高度的大气层叫同温层（图1—8）．

这个函数在自变量取值的不同范围内是用不同的式子分段表示的，称这样的函数为“分段函数”．

例1．作分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2} & x<-1\\ \sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$$

的图象，并求$f(-2)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(3)$．

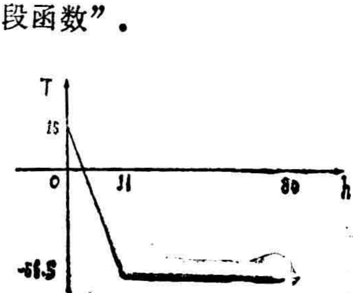

图1—8

解　在三个不同范围内分别作出直线，半园和抛物线的

一段得图象（图1—9）。

$$f(-2)=-2+\frac{1}{2}=-1\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(3)=3^{2}=9$$

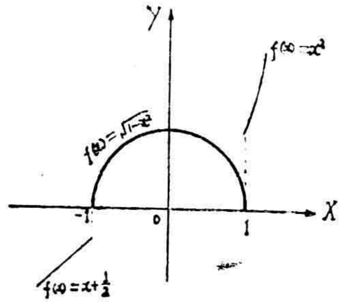

图1—9

2. 列表法　就是把自变量x与因变量y的一些对应值用表格列出来，以表示函数关系，在实际应用中多用此法。如数学用表一平方表、立方表、对数表、三角函数表等。

列表法的优点是用起来方便，缺点是数据有限，不能查出函数的任意值。

3. 图象法　把自变量x和因变量y当作直角坐标平面内的点的坐标，y与x的函数关系就可用这平面内的曲线表示出。

如自动记录温度计，记录了某地区一昼夜气温变化情况，横轴表示时间t，纵轴表示温度T°C，曲线上任一点P(a，b)表示在时刻t＝a时，相应的气温T＝b。

图象法的优点是直观性强，缺点是不便于作理论推导与演算。由图1—10可以看出温气函数的定义域为.

$$0\leqslant t\leqslant 24$$

气温在4时左右最低等。

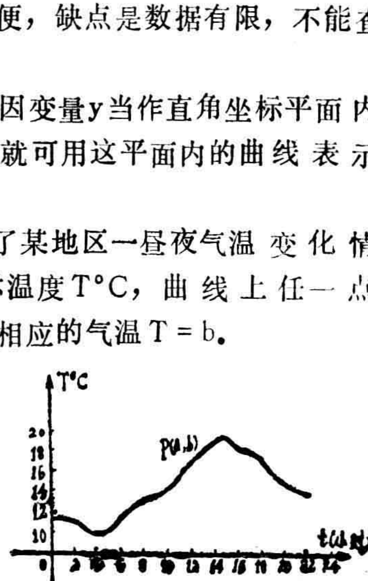

图1—10

习　题

1．求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$　　(4) $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$

(5) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$　　(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$

(7) $y=\arccos\sqrt{2x}$　　(8) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

(9) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$

(10) $y=\lg[\cos(\lg x)]$

(11) $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$

(12) $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$

2．脉冲发生器产生一个三角形波如图1—11写出函数关系式

$u=u(t)$

$(0\leqslant t\leqslant 20)$

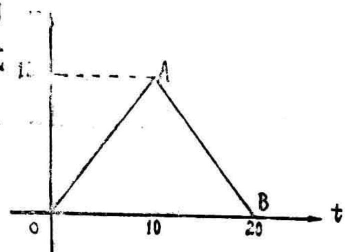

图1—11

3．设函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x & x\leqslant 0\\ 2^x & x>0\end{cases}$$

求：(1) $f(1)$，$f(-3)$，$f(0)$。

(2) $f(\triangle x)-f(0)$，$f(-\triangle x)-f(0)$，$(\triangle x>0)$。

4．试作下列函数的图象

(1) $f(x)=\begin{cases}3x & |x|>1\\ x^2 & |x|<1\\ 3 & |x|=1.\end{cases}$