# 集合论初步

榆林行署文教局教研室翻印

# 目　　　录

# 前　言

数学是研究客观世界中的空间形式和数量关系的科学，由于研究的对象和方法不同，所以产生各种不同的分支，但是任何一种数学理论的研究对象总是具有某些特定的性质的，例如：在中学里学习的初等代数通常是在有理数或实数范围内研究它们的运算规律，微积分理论的论域可以是实数域；而中学的几何是研究平面或空间（通常是欧氏平面或欧氏空间）中的点、直线等元素组成的图形的性质，我们把所研究的对象的总体称为“集合”，因此集合概念是一个重要的基本概念。许多有关数学基础问题也归结到对集合理论的研究，首先是如何理解无限这个问题，自从十七世纪牛顿、莱布尼兹创立微积分方法后，经过一百多年的时间，这门数学分支逐渐成熟，到了十九世纪初，微积分理论的奠基工作已经基本完成，这就是极限理论和实数理论的建立。但是作为微积分论域的实数域是一个具有无限个实数的集合，怎样来认识这种无限集合呢？一般来说，有限集和无限集有什么本质的区别呢？同样都是无限集，自然数的个数是不是比偶数的个数“多”呢？整条直线上的点是不是比空间中的点“少”呢？这些问题都必须加以澄清，因此，需要不考虑组成集合的那些元素具有什么特性，而仅研究集合本身的性质。

十九世纪晚期，德国数学家康脱（Georg Cantor）首先系统地研究了集合的理论。他的工作一方面是为了解决如何理解无限这个哲学上已经争论了几千年的问题，另一方

面也是产生于对三角级数的收敛性和不连续性函数的积分问题的研究。

今天，关于集合的理论已经成为数学的一门分支，叫“集合论”。集合的思想已经渗透到各个数学分支中，成为现代数学的一个最基本的概念。许多应用广泛的数学分支象微积分、概率论、抽象代数、拓扑学等等的理论体系都是先取定一个集合S，并根据实际需要选定这个集合中的元素和子集的性质以及运算规律，从而建立相应的体系。因此要正确理解和掌握现代数学的方法，必须很好地掌握集合论的基本问题。近年来，集合的思想、语言、符号和图解已在中小学数学课程中广泛运用，所以对中学数学教师来说，掌握和学会运用集合的知识也是十分必要的。

本文从现代数学的观点介绍了集合论的一些基本知识。我们可以把集合概念看作是一件用途很广的工具，当我们开始使用这个工具时，对它的使用方法可能不一定理解得透彻，用起来也不一定很熟练，但是，随着经验的积累，就会逐步加深理解而运用自如了。

在看完这些材料以后，如果想要把集合论作为进一步研究的对象，可以阅读有关的专著。

# § 1　集合的概念

### 1.什么是集合

在我们日常使用的语言中，常常用到集合的概念，例如：初二（1）班的全体同学，太阳系的所有行星，草原上放牧的一群羊，金工车间的全部机床，生存在亚洲的一类珍贵动物，……等，这里谈到的“全体”、“所有”、“一群”、“全部”、“类”都表示了具有某种性质的事物的总体，我们能够明确地断判任何东西是不是属于所指的那个总体。

一般来说，具有某种性质的事物的总体称为“集合”，构成集合的事物称为集合的“元素”。

在数学里也常常遇到各种各样的集合，例如：全体自然数的集合，直线上所有的点的集合，全部几何定理的集合，随机事件的集合等等。在讨论数学问题时，我们首先要明确所涉及的对象是在什么范围，也就是说，必须明确我们的论域是怎样的集合，否则就有可能产生错误，所以，笼统地说，“方程$x^2+1=0$没有解”是不对的，因为如果我们的论域是复数集合，那么这个方程是有两个根：$+i$和$-i$，但可以说：“方程$x^2+1=0$没有实数解”，这时，我们是把实数集作为讨论的范围的。

但是集合这个概念在数学中是一个基本概念，很难用更简单的概念来定义它。刚才说：集合是某类元素的总体，也是描述性的，事实上，数学中的基本概念是不加定义的，作为基本概念的往往是最简单，最易理解，最易确定的对象。

例如几何中的点、直线、平面都是基本概念，它们都是从客观世界中的大量物体形状中抽象出来的，同样，“集合”也是从客观世界中各种物体的总体抽象出来的基本概念，因此我们只能通过各种例子来说明它的含义。下面是数学中常见的一些数的集合：

N：全体自然数的集合，即$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$。

Z：全体整数的集合，即$0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm n, \cdots\cdots$。

Q：全体有理数的集合，即形如$\frac{P}{q}$的数的总体，这里的P、q是整数并且$q \neq 0$。

R：全体实数的集合。

C：全体复数的集合。

这几个数集所用的符号：N，Z，Q，R，C，是习惯使用的，今后我们将直接使用而不再加以说明。

**2.集合和它的元素**

通常我们用大写拉丁字母来表示集合，用小写拉丁字母表示集合的元素。

当e是集合M的元素时，用符号

$$e \in M$$

表示，念作：“e属于M”，如果e不是集合M的元素，则表示为：

$$e \overline{\in} M$$

念则：“e不属于M”。

所以：

$$2 \in N;\ -3 \in Z;\ \frac{7}{11} \in Q;\ \sqrt{2} \in R;\ -2i \in C。$$

但是$0 \overline{\in} N$。

（自然数集N是不包含0的，但是有时为了方便起见，也有把0当作是自然数的，把0加进集N后所得的集合叫扩大的自然数集）。

$-3\ \overline{\in}\ N$； $\frac{7}{11}\ \overline{\in}\ Z$； $\pi\ \overline{\in}\ Q$； $-2i\ \overline{\in}\ R$；

$(1+2i+5j-3k)\ \overline{\in}\ C$。（$1+2i+5j-3k$是一个四元数）

为了说明集合中的元素应具备什么性质，可以用下列方法：

（1）直接把集合中的元素列举出来。

例1、$M_1=\{1, 2, 3\}$

例2、$M_2=\{a, b, c, d, e, x, y, z\}$

这种表示方法尤其适用于只包含有限个元素的集合，但是也可以用来表示某些包含无限个元素的集合。

例3、$N=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$

例4、$Z=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \pm n, \cdots\cdots\}$

例5、$M_3=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\}$

这里的n是指自然数。

（2）通过说明所包含的元素具有性质P来表示集合，我们用符号：

$$\{*\mid P\}$$

来表示，意思是："所有具有性质P的元素*的集合"。

例6、$M_4=\{x \mid x^2-7x+12=0 \text{ 并且 } x\in R\}$

表示二次方程$x^2-7x+12=0$的实数解组成的集合。

例7、$E=\{x \mid x=2y, \text{ 并且 } y\in N\}$

表示全体偶数的集合。

例8、$M_5 = \{x \mid x = 2n - 1，并且 n \in N\}$
表示全体奇数的集合。

例9、$M_6 = \{x \mid -2 < x 并且 x \in Z\}$
表示大于$-2$的所有整数的集合（即$M_6 = \{-1, 0, 1, 2, \cdots\}$）。

例10、$M_7 = \{(x,y) \mid 2x + 3y = 1 并且 x、y \in R\}$
表示满足一次方程$2x + 3y = 1$的实数对$(x, y)$，从几何的观点说，这就是在直线$2x + 3y = 1$上的全部点$P(x,y)$的集合（图1.1）。

例11、$M_8 = \{(x, y) \mid (x - 3)^2 + y^2 < 4 并且 x, y \in R\}$ 表示了圆：$(x - 3)^2 + y^2 = 4$内部的点$P(x, y)$的集合。（图1.2）

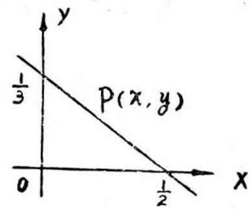


图 1.1

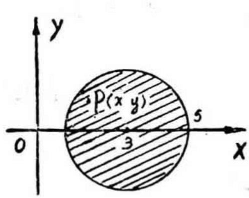


图 1.2

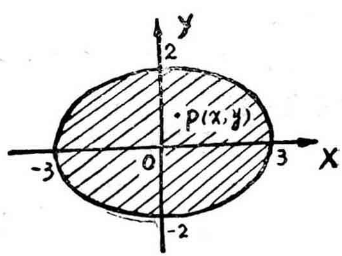


图 1.3

例12、$M_9 = \{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 < 36 并且 x, y \in R\}$ 表示了椭圆：

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

内部的点P（x，y）的集合（图1.3）。

### 3.要注意的问题

从上面举出的例子可以知道，当我们谈及某个集合的时候，对于一个对象来说，它或者属于这个集合，或者不属于这个集合，二者必居其一，不能有半点含糊，只有这样，才算是给定了一个集合。

因此，如果说：给出一个“充分大于1的正实数集合”，实际上是不符合上面指出的对集合概念的要求的。因为所谓“充分大于1”这个概念十分模糊，我们无法确定5算不算得上“充分大于1”？！也无法确定10、100…等等是不是属于这个集合？！因此在康脱创始的古典集合论，也就是现在我们通称的集合论中，这样来给出对象的总体不能算是构成一个集合。

最后，让我们再看一个例子：

某校初二（1）班的李明是一位擅长戏剧化妆的同学。在学校举办的一次文艺晚会中，全班同学都参加演出，为了取得良好的效果，节省准备时间，老师事先规定凡是能够自己为自己化妆的同学都要自己动手干，而李明应该替（而且只替）那些不会为自己化妆的同学化妆，如果用M表示由李明化妆的全部同学的集合，那么，请问李明是不是属于集M呢？——无论说李明是属于M或不属于M都会得出矛盾，所以这样来给出集合M是不符合要求的。（请读者仔细想一想，为什么说会出现矛盾？应该如何规定M才能避免出现矛盾？）

因此，虽然集合是一个不加定义的基本概念，但是必须正确理解和表达才能准确地使用这个概念。

# §2 逻辑符号

为了简化我们的叙述，下面介绍几个常用的逻辑符号。

**1．** $\wedge$（**“与”**、**“合取”**）

$$“S_1 \wedge S_2”$$

表示“$S_1$及$S_2$同时成立”。

例1、$M_{10}=\{(x,y)\mid(x-3)^2+y^2<4\wedge 4x^2+9y^2<36\}$

表示了同时属于圆$(x-3)^2+y^2=4$内部和椭圆$4x^2+9y^2=36$内部的全部点的集合，即图2.1中斜线部分。

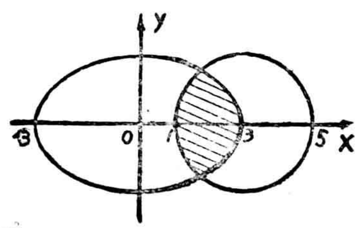


图2.1

例2、$M_{11}=\{x\mid x>3\wedge x<10\wedge x\in N\}$

表示在3和10之间的全部自然数，即

$$M_{11}=\{4,5,6,7,8,9\}$$

例3、$M_{12}=\{x\mid 1<x\wedge x\in R\}$

表示大于1的全部实数的集合。$M_{10}$中的x，y也应该在“x，y∈R”的条件下讨论，但通常，在不引起误会的情况下，往往把“x，y∈R”“x∈R”等省略不写。

**2．** $\vee$（**“或”**、**“析取”**）

$$“S_1 \vee S_2”$$

表示“$S_1$或$S_2$至少有一个成立”。

例4. $M_{13}=\{(x,y)\mid(x-3)^2+y^2<4\vee 4x^2+9y^2<36\}$ 表示了属于圆 $(x-3)^2+y^2=4$ 内部或椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 内部的全部点的集合，即图2.2中斜线部分。

例5、$M_{14}=\{x\mid x-2=0\vee x+3=0\}$ 表示了方程 $(x-2)(x+3)=0$ 的解集，即

$$M_{14}=\{2,-3\}。$$

**3. $\neg$（“否定”）**

$$“\neg S”$$

表示“对S的否定”。

例6. 设S代表“$x^2+y^2\leq 1$”，那么“$\neg(x^2+y^2\leq 1)$”表示了：$x^2+y^2>1$，所以

$$M_{15}=\{(x,y)\mid\neg(x^2+y^2\leq 1)\}$$

表示了在圆 $x^2+y^2=1$ 外部的全体点的集合。

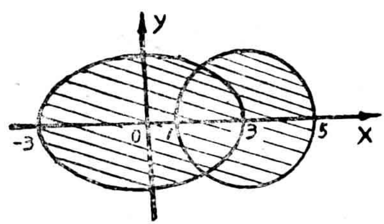


图 2.2

**4. $\Rightarrow$（“蕴涵”、“当…则…”）**

$$“S_1\Rightarrow S_2”$$

表示“有$S_1$就有$S_2$”（“当$S_1$成立则$S_2$成立”）

*例7.* $S_1$和$S_2$分别代表两个语句：

$S_1$：“n是不小于4的偶数”，

$S_2$：“n可以表示为两个素数的和”。

那么

$$S_1\Rightarrow S_2$$

就是数论中著名的哥德巴赫猜想："一个不小于4的偶数必可以表示为两个素数的和"。

**5.** $\Longleftrightarrow$（**"等价"**）

$$\text{“}S_1 \Longleftrightarrow S_2\text{”}$$

表示"$S_1$和$S_2$是等价的"，即

$$\text{“}(S_1 \Rightarrow S_2) \wedge (S_2 \Rightarrow S_1)\text{”}$$

应该说明，在本文中我们只把上面介绍的逻辑符号：

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \Longleftrightarrow$$

当作是简写的记号来使用，严格来说，要说明它们的准确含义，还要根据数理逻辑的观点，即详细讨论它们的真伪值，这里我们不再作进一步的论述了。

# §3　子　　集

## 1.集合的相等

如果两个集合A、B是由同样的元素组成，也就是说，对于元素e

$$e\in A \Longleftrightarrow e\in B$$

则称这两个集合是相等的，记为

$$“A = B”$$

因此，对于集合：

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{3,\ 2,\ 1\}。$$

它们包含着相同的元素，所以这两个集合是相等的：

$$A = B$$

也可以说，$\{1,\ 2,\ 3\}$和$\{3,\ 2,\ 1\}$不过是同一集合的不同写法，至于它们所包含的元素的排列次序是无关紧要的。

又如：

$$A=\{s,\ e,\ t,\ s\},\ B=\{s,\ e,\ t\}$$

也是相等的集合。在集A中，元素s出现了两次，这是不符合惯例的，通常应写成B的形式。

## 2.子集

在数学理论中，我们常常遇到某个集合的一部分元素组成的一个集合，例如整数集Z中的正整数组成了自然数集N。这是集合之间的关系。

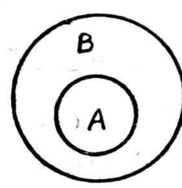

图3.1

一般来说，如果集合A的所有元素都是集合B中的元素时，即

$$e \in A \Rightarrow e \in B$$

则称A是B的“子集”（或“部分集合”），也可以说：“A含于B”或“B包含A”，记为

$$A \subseteq B$$

图3.1表示了集合B和A的内含关系，这里我们用一个圆来表示一个集合，圆所含的点表示集合的元素。这种解释集合概念的直观图形称为维恩氏图解。

对于自然数集N，整数集Z，有理数集Q，实数集R，复数集C，显然有

$$N \subseteq Z,\ Z \subseteq Q,\ Q \subseteq R,\ R \subseteq C. \quad (3.1)$$

例1．对于集合

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$C = \{2, 3, 4\}.$$

可有

$$A \subseteq B,\ C \subseteq B$$

对于两个相等的集合来说，由于

$$A = B$$

意味着

$$e \in A \Longleftrightarrow e \in B$$

当然应有

$$e \in A \Rightarrow e \in B$$

及

$$e \in B \Rightarrow e \in A$$

成立。所以这时既可认为A是B的子集，又可认为B是A的子集，即

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

再进一步说，每个集合都可以说成是它自己的子集：

$$A \subseteq A$$

为了把这种“不正常”的情况排除掉，我们把“含于B同时又不等于B的集合A”称为B的“真子集”，记作

$$A \subset B$$

（读者可以把符号⊆、⊂和符号≤、<对比，就可以体会到⊆和⊂之间的差别，我们可以写成：$2 \leq 2$，但不能写成$2 < 2$，同样，可以写成$A \subseteq A$，但不能写成$A \subset A$）。

例2．对于

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \{2, 4, 3, 1\}$$

可以写成

$$A \subset B \qquad （或 A \subset C）$$

但是C和B的关系只能写成$C \subseteq B$，因为，A是B的真子集，而C并非是B的真子集，（也可以写成$B \subseteq C$，事实上，$B = C$）

例3．对于

$$M = \{3 的所有整倍数\}$$

$$N = \{6 的所有整倍数\}$$

N是M的一个真子集，因为$N \subseteq M$但是$N \neq M$（符号≠表示"不相等"）。

例4．通常把方程的全体解称为方程的解集。如果我们是在实数集R上讨论，那么方程$x+3=2x-5$的解集：

$$A = \{x \mid x+3=2x-5\}$$

和方程$x-5=3$的解集：

$$B = \{x \mid x-5=3\}$$

是相同的，它们都是：$\{8\}$

但是方程$\frac{x}{x-1} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$的解集$A_1$和方程$x(x-2)=2x-3$的解集$B_1$是不同的：

$$A_1 = \{3\}, B_1 = \{1, 3\}$$

即 $$A_1 \subset B_1$$

所以在解分式方程时，必须注意：在把方程变形后，解集可能会扩大，这时就出现增根！所以最后还应该验根，把增根剔出来舍掉。

集合之间的内含关系$\subseteq$具有传递性：

$$(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$$

事实上，如果$e\in A$，由$\subseteq$定义可知：$e\in A\Rightarrow e\in B$，再由$e\in B$又可知：$e\in B\Rightarrow e\in C$，所以$e\in A\Rightarrow e\in C$，即$A\subseteq C$，这个性质可用图3.2表示。

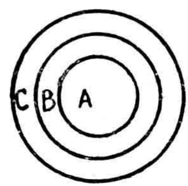

图 3.2

对于常见的那几个数集，由（3.1）可有

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$$

**3.空集**

一个元素也没有的“集合”：

$$\{\quad\}$$

也算是集合，称为“空集”，通常用$\phi$来表示空集，$\phi$是丹麦字母，读作œ。

空集是最重要的集合之一。有了空集的概念，使我们有可能不受限制地谈及所要讨论的集合，虽然我们预先也许并不知道这个集合是否包含有元素。

例5．在实数范围内，方程$x^2-2x-3=0$的解集是$\{-1,\ 3\}$，而方程$x^2-2x+5=0$没有实数解，可以说它的解集是空集$\phi$。

例6．根据哥德巴赫猜想，不小于4同时不能写成两个素数之和的偶数集合应是$\phi$。

**空集还有一个奇怪而又重要的性质，就是：**

**空集是任何集合的子集。**