大學叢書

投資數學

上

本館編[illegible]部著

商務印書館發行

大學叢書

投資數學

上册

本館編審部著

（增訂本）

商務印書館發行

四版序

本版內容,頗有增訂,玆就重要各點,列舉如下:

一. 本版中公式分a, b, c三組, a組公式爲必須記憶之公式;b組公式記憶較難而演化較易,故學者可不必記憶,考試時可改用a組公式;c組公式演化較難,若學者有相當數學程度,則須記憶公式之演化.反之,若學者之數學程度過低,則考試時可將應用公式附書於試題之中.經此訂正後,計有a組公式一百六十三個,b組公式五十七個,c組公式二十八個,共二百四十八個,較初版中公式多七個,若僅記憶a組公式,則與初版中公式相較,約已減少三分之一.

二. 初版中年金公式,均以一年爲單位時期,本版則改以計息期間爲單位時期,如是則公式可較簡,而演算亦可較易.

三. 本版中習題,增補本國應用問題甚多,若中國銀行之整存整付儲蓄存款、整存零付儲蓄存款、零存整付儲蓄存款、存本付息儲蓄存款,交通銀行之教育儲蓄存款,財政部發行之統一公債與復興公債,均多列試題,以求純熟.

四. 初版中關於零存整付儲蓄存款之計算, 須應用三表, 計算甚繁, 故本版添製「期初付複雜年金至第一期末終值表」, 以便計算.

五. 本版書末添列英文譯名, 以便閱讀英文參考書之學者.

以上五點爲本版中重要增訂之點. 其他如債券與折舊亦略有增訂, 而對數表亦稍稍擴大, 以便應用.

本版蒙同學朱君愛廬, 胡君珍楷, 奚君紹濂, 先後襄助, 至爲感謝, 特書數語, 以誌不忘.

中華民國二十七年八日五日 編者

序

儲蓄爲積聚資金之母,然僅知儲蓄而未諳運用之道,則死藏現金不能利用者有之,用於不健全之企業,因而喪失其資金者有之,不能充分利用複利之作用,以加速其資金之積聚者,更比比皆是.故不知儲蓄,無以積聚資金,不知運用儲儲,亦無以加速資金之積聚,而投資之道尙焉.

近世經濟組織,漸形複雜,投資之範圍,亦迥非昔比.或存款於銀行,或購買債劵以生息,或投資於工商業,以圖股利之收穫,或投保人壽保險,以防生命之不測.存款於銀行,則須明利息與年金之計算.購買債劵,則債劵市價之高下,影響於利息之多寡.投資於工商業,則償債方式與折舊方法,俱與公司之理財有關.投保人壽保險,則保險費隨投保者之死亡機率而異.凡此均有賴數理之研究,研究投資之數理,名曰投資數學.

投資數學之名稱甚多,若財政數學,政治數學,會計數學,高等商業數學,均先後爲各國學者所採用.投資數學研究之範圍,若利息,若年金,若債劵,若折舊,若人壽保險.無一不與利率有關,而利率爲投資之要素,故本書採用投資數學之名.

投資數學爲我國商學院必修科目,而坊間猶無完備之書,故各校多採用美國教本,以爲之代.夫一國教育,常須借重他國教本,此種方策,是否合理,姑置不論,然卽就坊間得購之外版投資數學而一探其內容,亦尙未見一完備之書.本書之編,未敢謂已盡完備之事,然拋磚引玉,願於短時期內,因此而得更完備之中國投資數學.

本書於重要投資數理,均有論列,而於利息確實年金與債券三編,討論尤詳.貼現與價值方程式二章,他書論者甚略,學者每多未能深切了解,故本書於第二編(利息)中,將此二章詳加擴充,以求數理之透穿,他書於確實年金一編,均未論及變額年金,然變額年金對於償債之方式與債券之發行,均有密切之關係,而於儲蓄銀行之零存整付儲蓄存款,尤可有極大之應用,蓋儲蓄當適應存款者之儲蓄能力,而我國銀行,海關,郵政,鹽務等處職員之儲蓄能力,均隨每年加薪而增大,故變額存款更適宜於彼等之儲蓄,此本書之所以詳論變額年金也.他書於債券之發行,或略而不論,或論而不詳,然債券發行之方式影響於政府或公司之理財甚大,而於市價與投資利率之推算,亦有密切之關係,故本書論列較詳.

本書於年金與債券論列較詳,故應用計算表,亦較他書爲多,附錄中之倒數表,累積倒數表,等差變額年金終值表與等差變額年金現值表,皆爲他書所無者也.

本書之編,參考美德法日四國出版之投資數學十餘種,其書名與著作者,詳列於目次之末,以備學者之參考.書中數理證明,均甚簡易,其稍複雜者,另置附錄甲,以便教學.

本書蒙同學周君頌康,湯君芝第,蔣君家淼,盛君克中,潘君光潤,陶君嫩珠,與吾妹明馨,或助編計算表,或代任抄寫之勞,使編者心感,特誌數語,以示謝忱.

中華民國二十四年四月八日　編者

目　次

本書重要參考書:

W. L. Hart——Mathematics of Investment

E. B. Skinner——The Mathematical Theory of Investment

H. L. Rietz——Mathematics of Finance

Lovitt and Holtzclaw——The Mathematics of Business

G. Wentworth——Commercial Algebra

A. Barriol——Théorie et Pratique des Opérations Financières

H. Fuzet et L. Reclus——Précis de Mathématiques Commerciales et Financières

A. Arnaudeau——Tables des Valeurs Intrinsèques

A. P. Violeine——Tables Pour Faciliter les Calculs des Probabilités Sur la Vie Humaine

A. Schlimbach——Politische Arithmetik

M. Cantor——Politische Arithmetik

和田喜八——商工實務計算

小林行昌——高等商業數學

朱幼庵——最新國庫劵還本付息表

投資數學

第一編 對數

第一章 對數之意義及其性質

同數自乘數次者,在代數學中用指數(Exponent)表之,例如5^3爲三個5連乘之數,a^6爲六個a連乘之數 右上角之3與6卽指數是也. 5^3旣爲三個5連乘之數,故其數值卽爲125,以算式表之則得:

$$5^3=125$$

上式中共有三數,已知此三數中之任何二數,卽可求第三數,故設x爲所求之第三數,卽可得下列三式:

$$5^3=x$$

$$x^3=125$$

$$5^x=125$$

第一式中之x,可將三個5連乘而得,故此係一乘方(Involution)問題 第二式可化爲下式:

$$x=\sqrt[3]{125}$$

式中之x,可將125開立方而得,故此係一開方(Evolution)問題 至於第三式中之x,則與前兩式均異,旣非乘方問題,亦

非開方問題,故式中之x,須應用他法求得,對數(Logarithm)法者,即欲探求此未知之指數而創設之方法也.此未知之指數,在對數法中卽名曰對數,而第三式中之5卽名曰底(Base),其右邊之125則名曰眞數(Number)或反對數(Anti-logarithm),對數之符號爲log,卽英文對數一字中前三個字母也.以此符號表示,則第三式可改作下式:

$$\log_5 125=x$$

上式中之x,卽以5爲底125之對數,或卽3,蓋5之3方等於125故也.同理:

$$\log_2 16=4 \quad \because \quad 16=2^4$$

$$\log_3 27=3 \quad \because \quad 27=3^3$$

$$\log_6 36=2 \quad \because \quad 36=6^2$$

$$\log_{10} 1000=3 \quad \because \quad 1000=10^3$$

$$\log_a a^5=5 \quad \because \quad a^5=a^5$$

對數之意義既明,今請進而討論對數之性質.對數能化乘除爲加減,又能化乘方開方爲乘除,此則對數之特有性質,亦卽對數之效用也.茲將對數之性質分述證明於下:

(一)對數化乘法爲加法.

兩數相乘積之對數,等於兩數對數之和,卽:

$$\log_a AB=\log_a A+\log_a B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a1)$$

(證) 設 $x=\log_a A$

$y=\log_a B$

則依對數之定義,得:

$$A=a^x$$

$$B=a^y$$

$$AB=a^x\times a^y=a^{x+y}$$

$$\therefore\quad \log_a AB=\log_a a^{x+y}=x+y$$

即

$$\log_a AB=\log_a A+\log_a B$$

若乘積由三數四數或n個數連乘而得,則其對數亦等於三數四數或n個數對數之和,其證明與兩數之乘積相似.

(二)對數化除法為減法.

兩數相除,其商數之對數,等於被除數之對數減去除數之對數所餘之數,即:

$$\log_a \frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a2)$$

(證) 設 $x=\log_a A$

$y=\log_a B$

則依對數之定義,得:

$$A=a^x$$

$$B=a^y$$

$$\frac{A}{B}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\therefore\quad \log_a \frac{A}{B}=\log_a a^{x-y}=x-y$$

即

$$\log_a \frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$

(三) 對數化乘方爲乘法,化開方爲除法.

某數n方之對數,等於某數對數之n倍,卽:

$$\log_a A^n = n \log_a A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a3)$$

(證)　設$x = \log_a A$

則依對數之定義,得:

$$A = a^x$$

$$A^n = (a^x)^n = a^{xn}$$

$$\therefore \quad \log_a A^n = \log_a a^{xn} = xn$$

卽　$$\log_a A^n = n \log_a A$$

n得爲整數或分數,正數或負數.*

$$\sqrt[3]{A^4} = A^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^3}} = A^{-\frac{3}{2}}$$

第二章 對數之種類

一數之對數隨其底而異.例如以2爲底,則16之對數爲4;以4爲底,則16之對數爲2;以16爲底,則16之對數爲1,故須先決定對數之底,然後能求對數之值.任何數均可爲對數之底,然爲便於計算起見,數學上通用對數之底,祇有兩種,一爲10,一爲e.(e之數值爲2.71828強,參看附錄甲2)前者名曰常用對數(Common logarithm),後者名曰自然對數(Natural logarithm)或納氏對數(Napierian logarithm).應用數學中通用常用對數,但在高深純正數學中,則以自然對數爲主,本書係應用數學之一種,故除有特別說明外,均指常用對數而言,而常用對數之底,苟無誤解之危險,亦將略而不書,故:

$$\log 10000 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0^{*}$$

---

* $a^0 = 1$

$10^0 = 1$