北京电視大学

# 数学系講义

## 〔数学分析部分〕

第一册

甲

北京电視大学数学系編

1960年9月

# 目　录

# §6 太乐公式

I、太乐公式：

1. 在自然科学和工程技術中，我們常常都碰到各种各样的函数，这些函数往往都不能直接計算。比如，描述簡諧振动的正弦函数 $\sin t$，我們就不能直接算出当 $t=28^\circ$ 时的函数值。因此我們需尋找能够近似計算函数值的方法。並且要求这种方法的精确程度可以合乎实际問題提出的要求。这一节介紹的太乐公式将給出滿足这种要求的近似計算法。

我們知道在質点运动中，如果知道了質点在某一时刻的位置和运动情形(如知道了速度，加速度等)，就可以大約估計質点在下一时刻的位置。这一自然規律啓發我們得到下面的太乐公式

2. 現在讓我們來看看太乐公式的推導。

在質点运动学中，我們知道質点运动所走的路程是时間的函数：$s=s(t)$，相反，对于任意一个函数 $f(x)$，我們也可以認为它是表示一个質点的运动所走的路程，就是説，我們把自变量 $t$ 的变化看作是时間的变化，把函数值 $f(t)$ 看作是質点运动所走的距离。

現在假設給了我們一个函数 $f(t)$，它是 $n$ 階連續可微的，我們已經知道了在 $t=a$ 时函数值 $f(a)$ 並知道函数在这点的变化率 $f'(a)$ 現在需要考慮 $t=a$ 附近的点 $x$ 的函数值。

由于質点的运动是連續的（也就是説 $f(t)$ 連續），所以当 $x$ 非常接近 $a$ 的时候，質点在 $t=a$ 与 $t=x$ 的这两个时刻的位置之間相差距离 $[f(x)-f(a)]$ 就不会很大，因此粗略地可以把运动看成是匀速的，速度 $f'(t)=f'(a)$，这样就有近似公式

$$f(x)-f(a)\approx\int_a^x f'(a)dt=f'(a)(x-a)$$

但实际情况並不是匀速的，質点在运动过程中每一时刻的速度都有变化，所以上面的公式有誤差 $R_2$，这样

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+R_2 \tag{1}$$

而对于真正的运动情况可以用微积分的基本公式來描述：

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt \tag{2}$$

把式(2)減去式(1)並用分部积分公式就得

$$R_2=\int_a^x f'(t)dt-f'(a)(x-a)=\int_a^x\left\{f'(t)-f(a)\right\}dt$$

$$=t\left[f'(t)-f'(a)\right]_{t=a}^{t=x}-\int_a^x f''(t)t\,dt$$

$$=x\left[f'(x)-f'(a)\right]-\int_a^x f''(t)t\,dt$$

$$= x\int_a^x f''(t)dt - \int_a^x f''(t)t\,dt$$

$$= \int_a^x f''(t)(x-t)dt \tag{3}$$

由此得: $f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)dt$ (4)

由上面对誤差的分析可以知道如果要更進一步似描写运动，那么我們不能僅僅把运动考慮作匀速的，我們要考慮速度的变化率，如果把速度的变化率看作是常量（即把运动看成是匀加速运动，加速度$f''(t)=f''(a)$）那么就有：

$$f(x)-f(a)\approx f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(a)(x-t)dt \tag{5}$$

$$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

但是实际情况並不是匀加速运动，因此有誤差 $R_3$

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+R_3$$

将(5)式減去(4)式卽得

$$R_3=\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2dt \tag{6}$$

所以 $f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2dt$ (7)

但实际上往往加速度也是变化的，如果我們要進一步逼近原來运动，还需考慮加速度的变化率，我們把运动看作是匀加加速运动，卽 $f'''(t)=f'''(a)$，这样由(6)得到

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(a)(x-t)^2dt+R_4$$

$$=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+R_4 \tag{8}$$

(8)式減去(7)式卽得：

$$R_4=\int_a^x \frac{1}{3!}f^{(4)}(t)(x-t)^3dt$$

如此繼續下去，我們就得到太乐公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+R_n$$

其中$R_n=\int_a^x \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$

这样我們就用运动的观点証明了太乐公式。

3. 为了便于近似計算时估計誤差和便于对太乐公式的研究，我們來把积分形式的余項$R_n$化为另一种所謂拉格朗日余項形式。

对于积分

$$R_n=\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

我們不能直接把它积分來，但我們知道$\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$在$[a,x]$是不变符号的，而且它很容易积分。問題僅在于因子$f^{(n)}(t)$，可是$f^{(n)}(t)$是連續的，所以在闭区間$[a,x]$上能达到最大値$M$和最小値$m$而$m\leqslant f^{(n)}(t)\leqslant M$，这样就有$m\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt\leqslant\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$ $\leqslant M\int\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$

$$\text{即}\quad m\leqslant\frac{\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt}{\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt}\leqslant M$$

由中間値定理，在$a$与$x$之間存在一点$\xi$，使$\frac{\int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt}{\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt}=f^{(n)}(\xi)$，

$$\text{即}\quad \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt=f^{(n)}(\xi)\int\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

令$x-a=h$，　$\xi=a+\theta h$　$0<\theta<1$

$$\text{即得}\quad \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt=f^{(n)}(a+\theta h)\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \qquad \text{〔註〕} \quad (10)$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}(x-a)^n \qquad (11)$$

这样太乐公式有下面形式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$
$$+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}(x-a)^n$$

特别当 $n=1$ 时就得 $f(x)-f(a)=f'(a+\theta h)(x-a)$

这公式称为微分中值公式

由(11)可以看出只要 $f^{(n)}(t)$ 有界 $|f^{(n)}(a+\theta h)|\leqslant M$,

$$R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}(x-a)^n\leqslant M\frac{(x-a)^n}{n!}$$

顯然当 $n\to\infty$ 时 $\frac{(x-a)^n}{n!}\to 0$。所以 $R_n\to 0$

事实上很多函数对 $n$ 說來 $f^{(n)}(t)$ 是一致有界的(就是不論对怎样的 $n$, $f^{(n)}(t)$ 的值总是有同一个界的)如 $\sin x,\cos x,e^x,ln(1+x)$ 等等,所以对这些函数說來随着 $n$ 的增大,誤差 $R$ 就是越來越小,这就說明了当越來越大时,太乐公式的右端減去 $R$ 就越來越逼近函数 $f(x)$。

〔註〕事实上若把 $f^{(n)}(t)=g(t)$ $\varphi(t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ 上面証明附帶了証明一个积分中值定理:

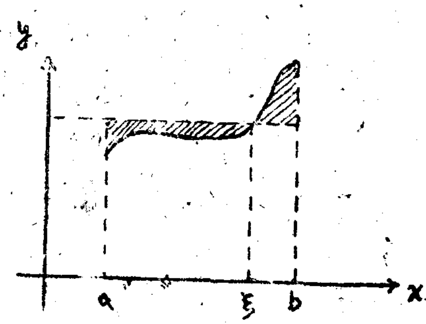
若 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上不变号,及 $\varphi(t)$, $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上連續,則 $\int_a^b g(t)\varphi(t)dt$

$$=g(\xi)\int_a^b \varphi(t)dt$$

其中 $\xi$ 是 $[a,b]$ 上的一个值

若 $\varphi(t)=1$ 便得积分矩形公式 $\int_a^b g(t)=g(\xi)(b-a)$

它的观圖形如下:




(圖 1)

## Ⅱ 太乐级数

1. 現在讓我們來看一些初等函数的太乐公式

若 $f(x)=\sin x$ 則 $f'(x)=\cos x$ $f''(x)=-\sin x$ $f'''(x)=-\cos x$

$f^{(4)}(x)=\sin x$ $f^{(5)}(x)=\cos x$ $f^{(6)}(x)=-\sin x$ $f^{(7)}(x)=-\cos x$

这样 $f(0)=0$ $f'(0)=1$ $f''(0)=0$ $f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(0)=0$ $f^{(5)}(0)=1$ $f^{(6)}(0)=0$ $f^{(7)}(0)=-1$

一般地 $f^{(2n)}(0)=0$ $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$

于是 $\sin x$ 在 $x=0$ 点的太乐公式是：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\theta x$$

$$(0<\theta<1)$$

同样类似地（讀者自証）

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x(0<\theta<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\quad(0<\theta<1)$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\cdots\cdots+\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}\quad(0<\theta<1)$$

2. 我們在前面已指出，若 $f^{(n)}(x)$ 对 $n$ 一致有界則 $R_n\longrightarrow 0(n\longrightarrow\infty)$ 从而 $f(x)$ 可用一个多項式逼近，即：

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

所以，若函数 $f(x)$ 是可微无穷次的，而且所有階導数 $f^{(n)}(x)$ 对 $n$ 均一致有界，則 $R_n\to 0(n\longrightarrow\infty)$ 从而由太乐公式得：

$$f(x)=\lim\left[f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]=\lim_{n\to 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

或記作：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{K!}(x-a)^k$$

上式右端是一个无穷級数，称为 $f(x)$ 的太乐級数，由上面我們知道一个函数能展成太乐級数的条件是 $R_n\to 0$

例如对于上面引举过的初等函数的來說它的太乐展开式的余項

$$|R_{2n+3}|=\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}(-1)^{n+1}\sin\theta x\right|<\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\to 0(\text{对一切}x)$$

同样

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

而对于 $(1+x)^a$ 來說，它的余項

$$R_n=\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n+1)}{n!}x^n=\frac{a}{1}\cdot\frac{a-1}{2}\cdots\cdots\frac{a-n+2}{n-1}\frac{a-n+1}{n}x^n$$

顯然 若 $|x|<1$ 則 $x^n\to0(n\to\infty)$，而 $\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n+1)}{n!}$ 有界，

从而 $R_n\to0$

$$\therefore\ (1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots(|x|<1)$$

对于函数 $ln(1+x)$ 來說 当 $-1<x\leqslant1$ 时

余項 $R_n\to0(n\to\infty)$。在这里不証明了

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots \qquad (-1<x\leqslant1)$$

Ⅲ函数值的近似計算:

太乐公式是計算函数似近値有力工具，这点我們在上面已看得很清楚了，下面举几个例子來說明

例 1 求用多項式來逼近 $e^x$ 使得在区間(0.1)上的誤差不超过$10^{-4}$

将 $e^x$ 展成太乐公式

$$e^x=1+x+\frac{x^n}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}$$

为了使精确度不超过$10^{-4}$，利用拉格朗日余項公式來估計級数，要取到第 $n$ 項

$$\left|R_{n+1}\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{1}{10^4} \qquad (0<\theta<1)$$

即

$$\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{1}{10^4} \qquad (0<\theta<1)$$

因为 $e^{\theta x}<e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots=3$$

所以 $\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}\leqslant\frac{3}{(n+1)!}$

这样，只要 $\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{10^4}$， 即 $n\geqslant6$，就能使誤差小于 $\frac{1}{10^4}$

$e^x$ 就可以用多項式

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^7}{7!}$$

来逼近、並且在区間 $(0,1)$ 上誤差不超过 $10^{-4}$

作为特例 令 $x=1$，則

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{7!}$$

由于近似公式产生下面的誤差

$$R_8=\frac{4}{8!}+\frac{1}{9!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{8!}\left(+ + \frac{1}{109}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!(n-1)\cdots\cdots 109}+\cdots\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{8!}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{e}{8!}<\frac{3}{8!}=\frac{1}{320}<\frac{3}{4}10^{-4}=0.75\times10^{-4}$$

題目要求誤差不超 $10^{-4}$，而公式誤差就有 $0.76\times10^{-4}$ 那么数値計算过程中所产生的誤差（捨入誤差）就不能超过

$$10^{-4}-0.76\times10^{-4}=0.25\times10^{-4}$$

在計算 $e$ 的过程中，只有在后五項，才会产生捨入誤差，根据捨入誤差不能超过 $0.26\times10^{-4}$，就要求后五項每項誤差不超过

$$\frac{1}{5}\times0.25\times10=0.5\times10^{-5}$$

也就是在数値計算时，要精确到小数后六位，再四捨五入才行。分別計算各項：

$$\frac{1}{3!}=0.1666666\cdots\cdots\approx0.16667$$

$$\frac{1}{4!}=0.0416666\cdots\cdots\approx0.04167$$

$$\frac{1}{5!}=0.00833\cdots\cdots\approx0.00833$$

$$\frac{1}{6!}=0.001388\cdots\cdots=0.00139$$

$$\frac{1}{7!}=0.0001984\cdots\cdots=0.00020.$$

則得

$$e\approx1+1+\frac{1}{2}+0.16667+0.04169$$

$$=0.00833+0.00139+0.00020$$

$$=2.71826$$

例2　計算$\sqrt[3]{3}$，使其誤差不超过 $10^{-4}$

我們利用$(1+x)^a$的太乐公式來近似計算，首先要把$\sqrt[3]{3}$写成$(1+x)^a$的形式，自然我們不能把 $x$ 取得过大先找$\sqrt[3]{3}$的一个大致近似值 1.4 于是

$$\sqrt[3]{3}=1.4\sqrt[3]{\frac{3}{(1.4)}}=1.4\left(1+\frac{32}{343}\right)^{1/3}$$

故在$(1+x)^a$的太乐公式

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\cdots\cdots+\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{a(a-1)\cdots\cdots(a-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n-1}$$

中令　$a=\frac{1}{3}$　$x=\frac{32}{343}$要使　$|R_n|<10^{-5}$　只要取 $n=2$就够了事实上

$$|R_3|<\left|\frac{1}{3!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\right|\left(\frac{32}{343}\right)^3<\frac{5}{8}\times10^{-4}$$

于是得到在所允許精确度內的近似公式

$$\left(1+\frac{32}{343}\right)^{1/3}\approx1+\frac{1}{3}\left(\frac{32}{343}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{32}{343}\right)^2$$

与上面計算 $e$ 的情形一样考慮到捨入誤差，我們取小数五位，由于

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{32}{343}=0.03110$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{32}{343}\right)^2=(0.03110)^2 0.00097$$

因此　$\left(1+\frac{32}{243}\right)^{1/3}=1+0.03110-0.00097$

$$=1.03013$$

最后即得　$\sqrt[3]{3}$的近似值为

$$1.4\times1.03013=1.44218$$

Ⅳ. 例　題

例1.　証明近似公式$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{1}{na^{n-1}}$　並求　$\sqrt[5]{34}$

証：$\sqrt[n]{a^n+x}=a\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}\approx a\left(1+\frac{x}{na^n}\right)=a+\frac{x}{na^{n-1}}$

$$\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{2^5+2}\simeq 2+\frac{2}{5\times 2^4}=2.025$$

例2. 将 $e^{2x-x^2}$ 按 $x$ 正整数幂展开到 $x^6$ 的项

解：

$f(x)=e^{2x-x^2}$ $\qquad f(0)=1$

$f'(x)=2(1-x)e^{2x-x^2}$ $\qquad f'(0)=2$

$f''(x)=[4(1-x)^2-2]e^{2x-x^2}$ $\qquad f''(0)=2$

$f'''(x)=[8(1-x)^3-12(1-x)]e^{2x-x^2}$ $\qquad f'''(0)=-4$

$f^{(4)}(x)=[16(1-x)^4-48(1-x)^2+12]e^{2x-x^2}$ $\qquad f^{(4)}(0)=-20$

$f^{(5)}(x)=[16(1-x)^5-112(1-x)3+108(1-x)]e^{2x-x^2}$ $\qquad f^{(5)}(0)=8$

$$\therefore\quad f(x)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4+\frac{1}{15}x^5+\frac{f^{(6)}(\theta x)}{6!}x^6$$

例3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

解：令 $\frac{1}{x}=y$ $\qquad \ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3(1+\theta y)^3}$

$$\therefore\quad x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3\left(1+\frac{\theta}{x}\right)^3}\right]x^2$$

$$=x-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{3(x+\theta)^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{x^2}{3(x+\theta)^3}\right]=\frac{1}{2}$$

例4. 求 $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$ 的简单近似公式

解：令 $f(x)=\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=\frac{2}{(R+x)^3}$ $\qquad f'(0)=\frac{2}{R^3}$

$f''(x)=\frac{-6}{(R+x)^4}$

$$\therefore\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 \qquad f(x)\simeq\frac{2x}{R^3}$$

其中誤差 $R=\frac{1}{2!}\frac{-6x^2}{(R+\theta x)^4}=\frac{3x^2}{(R+\theta x)^4}$ $(0<\theta<1)$

由此可见，当 $x$ 取值較小时，誤差是非常小的

小、結

本节从函数 $f(x)$ 表示，質点运动的观点出發，运用逐步迫近的方法，經过分部积分，得出了太乐公式，並对公式的余項進行了化简最后得：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}(x-a)^k \quad (h=x-a)$$

若 $f(x)$ 在等区域上的点满足，$R_n\to 0$，則 $f(x)$ 可以在这个区域上展成太乐級数。最常见的五个初等函数 $\sin x$，$\cos x$，$e^x$，$ln(1+x)$，$(1+x)^2$ 的太乐級数是該熟記的

太乐公式的最重要用途是進行近似計算。在近似計算中，应該先根据問題要的精确度來决定取多少項，然后再考慮捨入誤差，决定計算过程中应取几位小数.

Ⅳ中的例題也是相当重要，它介紹了太乐級数的一些較重要的应用。

# 太乐公式习题

一、按的正整数乘幂，写出下列函数的展开式，取到 $x^4$ 的项：

$$\frac{1+x+x}{1-x-x^2},\quad \frac{x}{e^x-1}$$

二、在 $x=0$ 附近，用二階抛物綫近似地代替函数 $y=a\,ch\,\frac{x}{a}\,(a>0)$ $\quad ch\,x=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$

三、估計下列近似公式的最大誤差

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}\qquad 当\quad |x|\leqslant\frac{1}{2}$$

$$tg\,x\approx x+\frac{x^3}{3}\qquad 当\quad |x|\leqslant 0.1$$

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\qquad 当\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

四、計算近似値並估計誤差

$$\sqrt{e},\quad arc\,tg\,0.8,\quad (1.1)^{1.2},\quad ln1.2$$

五、求极限 $\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\left[\left(x^3+x^2-\frac{x}{2}\right)e^{x}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

六、当很小时，推出下列各式的近似公式：

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\qquad \frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$$

$$\frac{ln\,2}{ln\left(1+\frac{2}{100}\right)}$$

从我們了解的一些情況，知道級数在科技術和生产建設中是很有用的，如近似計算，解微分方程，数理方程等等都需要用到。

我們認为級数是一个解决实际問題的有力工具，因此本着有用就講，无用就不講的原則安排了我們級数的体系。我們着重講实际中应用最多的冪級数和三角級数。冪級数接在太乐公式近似計算后面，三角級数准备在数理方程中講。

我們正处在徹底教学改革的过程之中，虽然取得很大成績，但还有很多不足，級数这部分就是这样，对于級数究竟如何因为生产实踐的需要而产生后來又怎样不断应用它到生产实踐中去使級数理論不断發展，級数的应用范圍究竟怎样等等，这些問題，都还沒有完全搞清楚，因此这部分講議中貫徹实踐—理論—实踐等辯証唯物主义观点还很不够，希望讀者注意！並希望联系自己的工作共同参加改造級数理論的工作。

## I．冪級数的概念

### 1°．冪級数的來源

从上面太乐公式和太乐級数一节中，我們看到，为了研究一个复雜的运动，我們可以用一連串簡单的运动（匀速、匀加速、匀“加加”速等等）的叠加去近似的刻划这个复雜的运动，为了更精确地描述这一运动就要求有更多簡单的运动叠加起來，而且我們所要求的精确程度愈高，則簡单运动的个数愈多，假如要求真正正确的描述这个复雜运动的話，就要求有无穷多个簡单运动叠加起來才行。

这些話的数学意义，就是，一个函数，如 $\log(1+x)$ 可近似的用 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=$

$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 來逼近。

$$\text{即}\quad \log(1+x)\approx\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

而且要逼近得愈精确，則要求 $n$ 愈大（我們知道 $n$ 愈大时，誤差，即余項 $R_n$ 愈小），若要求真正正确的表达函数 $\log(1+x)$ 則要求 $n\to\infty$ 即变成太乐級数。

$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

一般來講，一个函数，$y=f(x)$，若各級導数都存在，且余項 $R_n\to 0(n\to\infty)$。

$$\text{則：}\quad y=f(x)\overset{\text{近似}}{\approx}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$y=f(x)\overset{\text{精确}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

一般地，我們称无穷級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 为冪級数，因为它的每一項都是 $x$ 的冪函数，其中 $a_k$ 为任意常数。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ 就是冪級数 其中 } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

是函数 $f(x)$ 的另一种表达形式，当然也是函数。

我們过去所学习的函数都是初等函数，像多項式，$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，三角函数，$y = \sin x$，对数函数 $y = \log x$ 等等，这里我們又遇到了一种新的函数表达形式，即表示成冪級数形式的函数

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

我們大家要习惯这种函数（从形式上看它好像是多項式函数的推广）。

将來我們会看到对这些函数也可研究微分，积分連續等性質。大部分初等函数如，$e^x$，$\log(1+x)$，$\sin x$ 等等都可以表达成冪級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的形式：

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ a_k = \frac{1}{k!}; \qquad \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},\ a_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

但是用冪級数形式，所表示的函数不僅僅有初等函数，它代表的函数类型很广泛（如微分方程中常用的貝塞尔函数就是冪級数）

2°. 为什么要研究收歛性？

我們知道，函数都有它的定义域，如 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定域为 $|x| \leq 1$，$x > 1$ 时函数就沒有意义。

冪級数形式的函数也有这个問題，我們用下面的例子來說明：我們在中学課本中知道等比級数有公式

$$1 + q + q^2 + \cdots\cdots + q^n + \cdots\cdots = \frac{1}{1-q},$$

$$\text{即} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

或寫成函数的形式：$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x}$，（对任意 $|x|<1$ 都成立）$\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ 是 $a_k\equiv 1$ 的冪級数。在 $|x|<1$ 时它等于 $\frac{1}{1-x}$ 但是，若取 $x=2$，则失去了意义，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k=1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots=\infty$，我們称之为發散的。而 $x=2$ 代入 $\frac{1}{1-x}$ 时得 $\frac{1}{1-2}=-1$

这时，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\Big|_{x=2}\neq\frac{1}{1-x}\Big|_{x=2}$。其原因就是因为冪級数只在 $|x|<1$ 的点有意义，$|x|\geqslant 1$ 时是發散的。因此我們必須在冪級有意义的点討論問題。

一般講，我們說 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ 在 $x_0$ 有意义就是要求 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x_0{}^k$ 是一个确定的数，而不是∞，我們就說級数在 $x_0$ 是收斂的。冪級数的定义域就是 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ 有意义的区域，或称做收斂区域。

从上面的說明可以知道討論冪級数的收斂区域是很重要的，因为假如在冪級数發散的点去研究冪級数就会導数荒謬的結果（例如上面的例子中，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\Big|_{x=2}=\frac{1}{1-x}\Big|_{x=2}$ 就導出 $\infty=-1$ 的結果）。

为了研究冪級的收斂性，就必須簡单討論一下一般数值級数(註) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k$ 的收斂問題，因为把每一点 $x_0$ 代入 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ 都得一个数值級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x_0{}^k$

註：冪級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ 的每一項 $a_k x^k$ 是一个函数（$x$ 在变），所以叫做函数級数。而冪級，在某一点的值是級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x_0{}^k$，它的每一項是一个常数，所以叫做数值級数。如 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x_0{}^k$，都是数值級数，一般数值級数都是在研究函数級数时出現，很少单独用着它，因此，我們就不像过去那样把它独立出來，化大量的篇幅仔細研究，而只是在講到冪級数收斂性时，把数值級数中最有用的东西講一講。

## Ⅱ. 数值級数的收斂性

1° 收斂的定义。 我們前面已經說过級数 $\sum\limits_{k=0} a_k x^k$ 收斂就是說它要有意义，即应当等于一个确定的数，一般数值級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ 也是这样，說它是收斂級数，即它等于一个确定的数。或者說它收斂到某一个确定的数。

无穷級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$

等于一个确定的数是什么意思呢？我們知道把无穷个数加起來是办不到的，是不好加的。实际上 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ 等于确定的数是指的下述意义的极限：把有限項加起來得和数（我們称为部份和）$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ 这个和数的极限就等于 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$。即

$$\lim_{n\to} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

因此我們得到下面的定义。

定义　数值級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ 的部份和 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = S$$

存在，我們就說級数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ 是收斂的，並且就写做

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S。$$

若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，就說級数时發散的。

这个定义的意思就是：虽然我們的加項愈來愈多（$n\to\infty$）但整个和数却变化不大（极限为 $s$），容易看出，若級数收斂，則 $u_n\to 0$（$n\to\infty$），因假如不 $\to 0$ 就不可能加項愈來愈多而总和基本不变。

$$\because \lim_{n\to\infty} S_n \text{有极限} S \quad \text{即} \lim_{n\to\infty}\left|S_n - S\right| = 0，\text{即}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right| = 0$ 亦即 $\lim\limits_{n\to}\left|\sum\limits_{k=h+1}^{\infty} u_k\right| = 0$，所以可有 另一等价定义：数