



邵基昌

環迴數 (Revolving Numbers) 的發見，遠在十三世紀時，發見的人叫做 Ibn-el-Banna。牠的確具有一種很奇特的性質，引起了不少學者的注意，直到如今，差不多已成為一種專門的研究。現在很簡單地介紹給中學生讀者諸君；如果感到興趣的話，不妨自己再作更進的研究。

一

什麼叫做環迴數？先舉個例來說明：譬如 142857 是一個六位數，將 2 乘牠，得 285714 —— 也是一個六位數。這數的數字，和原數完全一樣，但開端是個 2 字，以下根據着原數中數字的順序排列下去，直到 7 字為止，再將原數開端的 14 兩字，接着排下。又將 3 乘原數，得 428571，將 4 乘原數得 571428。細心觀察，兩積都具有與第一積同樣的特性。照樣乘 5 乘 6，我們可以得到一組數字間有環迴性的六個數來，換句話說，我們可以得到六個六位數來，牠們各以 1, 2, 3, 4, 5, 7 和 8 做首位，而且各數的數字完全相同，數字間的順序一定不變。凡含有這種特性的數，如 142857 都叫做環迴數。

試看 076923 將 3, 4, 9, 10 或 12 乘牠，也可得到一組有環迴性的六位數來。再看一個十六位數

0588235294117647將2到16的各數乘牠，也能得到一組有環迴性的十六位數來。現在把所得的結果列表於后，希望讀者細看牠們間的環迴性：

乘 數	乘 積			
2	1176	4705	8823	5294
3	1761	7058	8235	2941
4	2352	9411	7647	0588
5	2941	1764	7058	8235
6	3529	4117	6470	5882
7	4117	6470	5882	3529
8	4705	8823	5294	1176
9	5294	1176	4705	8823
10	5882	3529	4117	6470
11	6470	5882	3529	4117
12	7058	8235	2941	1764
13	7647	0588	2352	9411
14	8235	2941	1764	7058
15	8823	5294	1176	4705
16	9411	7647	0588	2352

明白了什麼是環迴數，我們試想怎樣找出這種數來？要找一個六位的環迴數，如果將每個六位數來一一試驗，恐怕終身不得其一。何況像上述的十六位數呢？諸位不用着急，現在告訴你們一個很簡易的方法吧。要知道所謂環迴數者，其實就是某循環小數的整個循環部份。例如 $1\overline{7}$ 等於 $0.142857142857\cdots$ 就是上述的第一個環迴數。 $1\overline{13}$ 等於 0.076923 ，就是第二個環迴數。 $1\overline{17}$

等於 0.58823529417647 ，就是第三個環迴數。所以要找環迴數，只須將循環數的循環部份截下；要找循環小數，只須以任何質數除一。這裏有兩個例外，就是 2 或 5 兩質數除一，不能產生循環小數。因為牠們是底數 10 的因子。（我們普通所用的數，都是十進的，所以 10 叫做底數。）根據這個方法，讀者可以立刻找出許多環迴數來。例如 $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{29}$ ……這些分數都能產生出環迴數來。又如 $\frac{1}{3}$ ($0.333\cdots$) 和 $\frac{1}{11}$ ($0.090909\cdots$) 兩個分數，牠們雖然能夠產生循環小數，可是循環的部份太短了，所以所得環迴數的環迴性，也不及以上所述的幾個來得顯著。由此可知，環迴數是平淡無奇的，我們可以找出幾千個來，因為質數的數量真是無窮呢！

環迴性是怎樣得來的？也是一個很值得研究的問題，現在將牠略談一下。例如 142857 ，牠的分數是 $\frac{1}{7}$ 。現在把除式列在下面：

$$7 \overline{) 1.000000000} .142857142 \cdots$$

$$\begin{array}{r} 7(- \\ \underline{30} \cdots (1) \\ 28(- \\ \underline{20} \cdots (2) \\ 14(- \\ \underline{60} \cdots (3) \\ 56(- \\ \underline{40} \\ 35(- \\ \underline{50} \\ 49(- \\ \underline{10} \\ 7(- \\ \underline{30} \\ 28(- \\ \underline{20} \\ 14 \\ \underline{6} \end{array}$$

這裏“7”是除數，那末可能的餘數就不外1,2,3,4,5,6（參看上面的除式，可知1,2,3,4,5,6,的確都是餘數。）在除法進行中，只要六數中的某數在餘數裏重現時（上面的除式裏1字是在餘數中重現），那末以下的商就照原有的商回復一周，這就所謂循環。所以照上式看來，牠的循環位數就等於6了。總結上述，我們可以得到一個結論：凡質數除一之商，必為一循環小數（2及5除外），其循環位數，不得超過該質數減一之值。像上述的例裏，循環位數是6，就是(7-1)的意思。下面還要講幾個例子，可以證明上面的結論，現在暫且不表。究竟142857的環迴性怎樣得來？就是所要解答的問題；例如2乘142857就是 $(2 \times \frac{1}{7})$ 也就是 $(2 \div 7)$ 把上面的除式觀察一下，可知只須省去減式(2)以上的各部份，所剩下的各部份，可不就代表 $(2 \div 7)$ 麼？牠的商當然就是原商裏省去開端的“14”兩位，換句話說就是285714了。再看 (3×142857) 就是 $(3 \div 7)$ 了，在除式裏只須省去減式(1)以上的各部份，所剩下的各部份，就是 $(3 \div 7)$ 了；牠的商就是428571（原商中省去“1”字）再看 6×142857 ，就是 $(6 \div 7)$ 了。在除式裏只須省去減式(3)以上的各部份，所剩下的各部份，就是 $(6 \div 7)$ 了；牠的商就是857142（就是原商中省去“142”三位）從這裏我們可知：如果上面的原商不是循環小數，那末環迴性也無從產生。所以一切循環小數，都有這種環迴性，這就是環迴性的來源。

II

上面已經約略談過環迴數的特性，尋找的方法，以及何以有環迴性的原理。現在將和牠有關的幾條規則歸納地說一說。

1. 一切質數除一，必得一循環小數；牠的循環部份，具有環週性。（質數中的2及5是例外。）

2. 環週數的位數（即循環小數循環部份的位數），等於產生此數的質數減一之值，或與此值成一簡單的關係。例如 $\frac{1}{7}$ 的環週數有6位，即 $(7-1)$ 。 $\frac{1}{17}$ 的有16位，即 $(17-1)$ 。 $\frac{1}{13}$ 的有1位，即 $\frac{1}{2} (3-1)$ 。 $\frac{1}{103}$ 的環週數（.0097087378640776699029126213592238）有34位，即 $\frac{1}{3} (103-1)$ 。

3. 如果環週數的位數等於質數減一之值，那末這是一個「完全環週數」。例如 $\frac{1}{142857}$ 將1到6各數乘之，可得一組同數字組成的六位數，而且數字間具有環週性。

4. 如果環週數的位數不等於質數減一之值，那末這是一個「有限環週數」。例如 $\frac{1}{13}$ 的環週數 .076923 就是有限環週數。因為將1, 3, 4, 9, 10 或12乘之，可得一組同數字組成的六位數，而且數字間保持着環週性。但將2, 5, 6, 7, 8 或11乘之，可得一組以1, 5, 3, 8, 4, 6 六個數字組成的數來，而且數字間也具有環週性。

5. 有限環週數必同時附生一個或幾個不同的有限環週數；牠們位數的總和，等於完全環週數的位數。（即產生此環週數的質數減一之值。）例如 $\frac{1}{13}$ 產生了一個有限環週數 (.076923)，但同時也可產生另一有限環週數 153846（試參看上節）。牠們位數的總和，等於 $(6+6) = 12 = (13-1)$ 。同樣， $\frac{1}{103}$ 產生了一個34位的有限環週數，由此我們可以預知另外還有兩個34位的有限環週數。牠們位數的總和，等於 $(103-1)$ 。

環週數並不限於以“10”做底數的數中，在任何數做底的數中，也可找得出來。這些還留有興趣的讀者諸君，繼續着研究。

二十四年九月於交通大學