

初等几何

上册

杭州大学数学系

初 等 几 何

上 册

(平面几何部分)

一九七三年八月

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。

要把精力集中在培养分析问题和解决问题的能力上，……

目 录

第一章	基本概念	(1)
§1.1	线段和角	(2)
	一、线段及其度量 (2) 二、角及其度量 (5)	【附录】游标卡尺和千分尺的构造原理和使用方法 (10) 习题一 (15)
§1.2	平行线	(17)
	一、平行线及其判定法 (17) 二、平行线的性质 (21)	
§1.3	定义、公理、定理	(24)
	一、定义 (24) 二、公理、定理 (26)	习题二 (28)
第二章	多边形	(32)
§2.1	三角形	(33)
	一、三角形的内角和 (35) 二、等腰三角形 (38)	习题三 (44) 三、全等三角形 (48)
	习题四 (60) 四、三角形的作图 (62)	习题五 (77)
§2.2	四边形	(78)
	一、平行四边形 (78) 二、几种特殊的平行四边形——矩形、菱形和正方形 (81)	
	三、平行线等分线段定理 (83) 四、梯形 (87)	习题六 (90)
§2.3	对称	(93)

	一、轴对称(93) 二、中心对称(99)	
	习题七(102) 第二章复习题(103)	
第三章	相似形	(108)
§3.1	线段的测量、线段的比和成比例的线段.....	(108)
	一、线段的测量(108) 二、线段的比	
	(113) 三、成比例的线段(114)	
	习题八(116)	
§3.2	平行线截得比例线段定理.....	(118)
	习题九(125)	
§3.3	相似多边形.....	(127)
	一、相似多边形的概念(127) 二、相	
	似三角形(129) 三、相似多边形的性	
	质(138) 四、直角三角形中比例线段	
	定理及勾股定理(139) 习题十(145)	
§3.4	位似.....	(148)
	一、多边形的位似形(148) 二、一般	
	图形的位似形(151) 三、位似的应用	
	(153) 习题十一(159) 第三章复	
	习题(160)	
第四章	圆	(164)
§4.1	圆的基本性质.....	(164)
	一、直径、弦和弧的关系(164) 二、	
	圆心角、弧、弦、弦心距的关系(168)	
	三、圆周角(173) 习题十二(179)	
§4.2	圆和直线的位置关系.....	(183)
	一、圆和直线的位置关系(183) 二、	
	圆的切线(184) 三、与圆有关的角	

	(188)	四、有关圆的比例尺(197)	
		习题十三(201)	
§4.3	两圆的位置关系		(204)
	一、两圆的位置关系(204)	二、两圆的公切线(207)	习题十四(211)
§4.4	轨迹和轨迹法作图		(213)
	一、四种命题和它们之间的关系(213)	二、点的轨迹(216)	三、轨迹法作图(220)
	四、连接(222)	习题十五(227)	
§4.5	用代数方法解作图题		(228)
	习题十六(234)		
§4.6	等分圆周及作正多边形		(235)
	一、等分圆周和作正多边的关系(235)	二、等分圆周及作正多边形的方法(238)	习题十七(252)
§4.7	圆周长及圆弧长		(253)
	习题十八(261)	第四章复习题(263)	
第五章	面积		(267)
§5.1	多边形的面积		(267)
	一、面积、多边形的面积(267)	二、相似形面积的比(282)	习题十九(288)
§5.2	圆、扇形和弓形的面积		(290)
	一、圆的面积(290)	二、扇形及弓形的面积(294)	习题二十(300)
§5.3	面积公式在实际中的应用		(302)
	习题二十一(309)	第五章复习题(310)	

第一章 基本概念

恩格斯指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”。几何学就是研究现实世界的空间形式的科学。

劳动人民在长期的生产活动中，根据实践的需要，对客观事物的一个方面，即物体的“形”进行分析、概括、判断、推理，得到了几何图形的概念及其一系列性质，从而形成了几何学这门学科。因此，和其他一切科学一样，几何学是人们为了认识客观世界的规律性并用来改造客观世界而产生和发展起来的；几何学的内容是反映现实世界的空间形式的几何图形及其相互联系，它一方面来源于“非常现实的材料”，同时又是脱离具体事物的科学的抽象。例如，几何中的基本图形，点、直线和平面，就是在实践基础上的数学抽象。我们从平静的水面、墙面和黑板面可以得到平面的概念；从拉紧的线、两个墙面的交线和黑板的边缘可以得到直线的概念；从地图上表示城镇位置的点和黑板的四个角顶可以得到点的概念。但是，点、直线和平面作为概念，却与具体事物相脱离：点只表示位置，没有大小；直线是向两个方向无限伸展的，它没有端点，没有粗细；平面是向四周无限伸展的，它没有边界，也没有厚度。

列宁说过：“一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。”几何学的内容也是这样，因此它能够广泛地应用于生产实践。

§1.1 线段和角

一、线段及其度量

1. 直线、射线和线段 前面已经讲过，直线是基本的几何图形。

木工同志在锯木板时，常常先在木板两头的两点间弹出一条直线，然后沿这条直线锯开木板。我们还可用直尺画出经过两点的直线。这就是说，经过两点可以作一条直线。另外，我们还看到，经过一点可以作无数条直线，但是经过两点就只能作一条直线。这说明了直线有如下的性质：

经过两点可以作一条直线，并且只可以作一条直线。

直线常用表示其上任何两点的两个大写字母来表示，如“直线 AB ”（图1—1（1））；也可用一个小写字母来表示，如“直线 l ”（图1—1（2））。



图 1—1

直线上一点把直线分成两部分，每一部分都叫做射线。射线是向一方无限伸展着的，它有一个端点。如探照灯射出的光线可以看作是射线。射线可以用表示它的端点和其上另外任何一点的大写字母来表示，表示端点的字母写在前面，如图1—2中的“射线 OC ”。



图 1—2

直线上任意两点间的部分叫做线段，如黑板的边缘，就概念来说，是一个线段。线段有两个端点，通常就用表示两个端点的大写字母来表示线段，也可用一个小写字母来表示，如图1—3中的“线段 AB ”和“线段 a ”。画线段时，它的两个端点要明确地表示出来。



图 1—3

2. 线段的度量

毛主席教导我们：“任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量。”在生产实践中，经常需要度量线段的长短。度量线段的长短，要选定某一线段作为标准，这个标准就是长度单位。我国规定采用公制作为基本计量制度，它的长度计量单位是：

单位名称	微米	忽米	丝米	毫米	厘米	分米	米(公尺)	公里(千米)
代 号	μ	cmm	dmm	mm	cm	dm	m	km
等 量		10 μ	10cmm	10dmm	10mm	10cm	10dm	1000m

在工厂里，“毫米”也叫做“米厘”，“忽米”也叫做“丝”。

除公制外，我国人民还应用市制，它的长度计量单位是：

单 位 名 称	毫	厘	分	寸	尺	丈	里
等 量		10毫	10厘	10分	10寸	10尺	150丈

公制和市制长度单位的换算关系是：

$$1 \text{ 公里} = 2 \text{ 里}, \quad 1 \text{ 米} = 3 \text{ 尺}.$$

有了长度单位，线段的长就可以通过长度单位来表示。例如，如果线段 AB 的长等于长度单位“厘米”的15倍，那末它

的长就是15厘米，记作 $AB = 15$ 厘米。

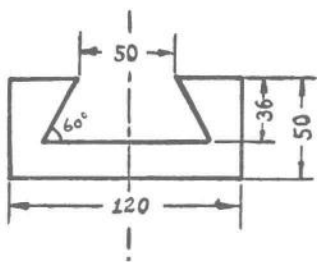


图 1—4

在机械图纸上所写的尺寸规定用毫米做单位，图纸上一般只写数字，不写单位，如图 1—4。如果用其他长度单位，则必须加以说明。

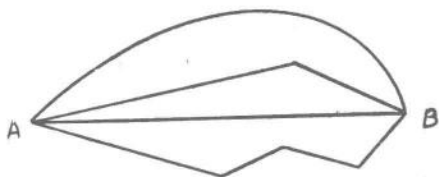


图 1—5

已知两点 A 、 B ，用不同形状的线把它们连结起来，如图 1—5。由图可见，在所有连结这两点的线中，以线段为最短。我们把连结两点的线段的长叫做这两点间的距离。

度量线段的长或两点间的距离时，根据要求的精确度不同，需要采用不同的度量工具。

在农村，测量渠道、丈量土地等一般用皮尺、测绳、弓（一弓等于五市尺）（图 1—6）。木工同志量木料常用折尺和角尺。

在工厂，度量工件尺寸时，一般用钢尺和卡钳。卡钳分内卡钳和外卡钳两种（图 1—7），它和钢尺配合使用。精确度要求较高时，用游标卡尺和千分尺（它们的构造原理和使用方法见附录）。用游标卡尺量工件时，精确度一般可达 0.1mm ， 0.05mm 和 0.02mm （即可达 10 丝，5 丝和 2 丝），千分尺的精确度可达 0.01mm （即 1 丝）。



图 1—6



图 1—7

二、角及其度量

1. 角的概念 在日常生活和生产实际中，我们经常遇到许多角的形象。例如时钟的两针所夹的角，角尺的弯角等等。在实践中反复地接触到角的形象之后，就产生了角的概念。从一点引出两条射线所组成的图形叫做角，这个点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边。如图1—8所示， O 点是角的顶点，射线 OA 、 OB 是角的边。角用记号“ \angle ”

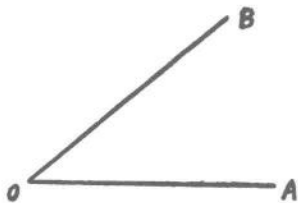


图 1—8

表示，图1—8中的角可以写作 $\angle AOB$ 或 $\angle BOA$ ，也可写作 $\angle O$ 。有时角也用一个数字或一个小写希腊字母来表示，如 $\angle 1$ ， $\angle 2$ ， $\angle \alpha$ ， $\angle \beta$ （图1—9）。



图 1—9

角也可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的。设射线从初始位置 OA 绕着端点 O 旋转到某一位置 OB ，则 OA 、 OB 就构成一个角。当 OB 和 OA 成一条直线时，所成的角叫做平角。若把射线从初始位置 OA 绕 O 点旋转一周，使它和初始位置重合，这样得到的角叫做周角。（图1—10）

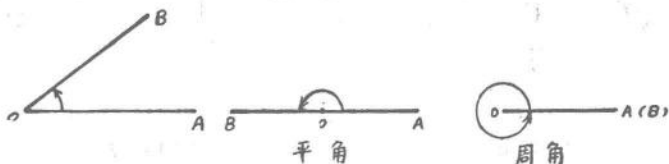


图1—10

平角的一半叫做直角，小于直角的角叫做锐角，大于直角而又小于平角的角叫做钝角（图1—11）。

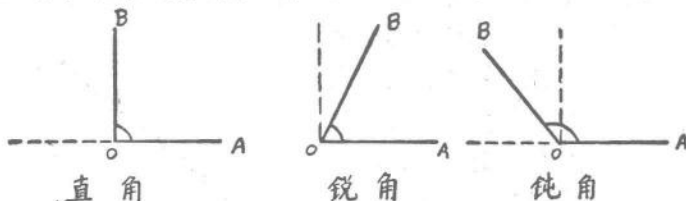


图1—11

“有比较才能鉴别。”角有大小，比较两个角的大小，可以把一个角重迭在另一个角上，使它们的顶点和一条边各相重合。如果另一条边也重合，那末这两个角相等，如图1—12的

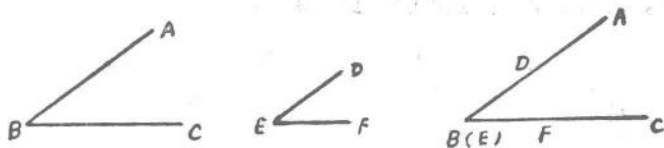


图1—12

$\angle ABC = \angle DEF$ 。如果另一条边不能重合，那末这两个角就不相等，如图 1—13 的 $\angle AOB > \angle A'O'B'$ ，或者 $\angle A'O'B' < \angle AOB$ 。

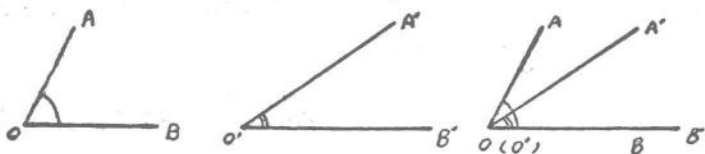


图 1—13

2. 角的度量 度量角的大小，一般采用角度制。角度制是把周角分成360等份，每一份作为角的度量单位，叫做1度；把1度分成60等份，每一份叫做1分；再把1分分成60等份，每一份叫做1秒。“度”、“分”、“秒”分别用记号“°”、“′”、“″”表示。例如36度50分24秒可以写作 $36^{\circ}50'24''$ 。

按照角度制，周角 = 360° ，平角 = 180° ，直角 = 90° 。

若两角之和等于 90° ，则称这两个角互为余角；若两角之和等于 180° ，则称这两个角互为补角。

量角用的工具，最常见的是量角器。利用量角器还可以画一个角等于已知大小的角。例如要画一个等于 50° 的角，先画射线 OA ，再把量角器的零度线重合到射线 OA 上，使量角器的

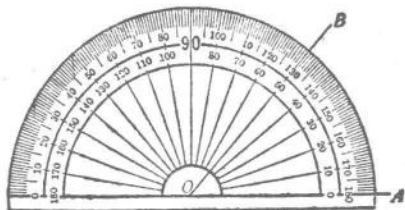


图 1—14

的圆心与 O 点重合，在纸上紧靠量角器的 50° 线的端点画一个点 B ，拿去量角器，作射线 OB ，就得到 $\angle AOB = 50^{\circ}$ （图 1—14）。

例 1 一个齿轮有

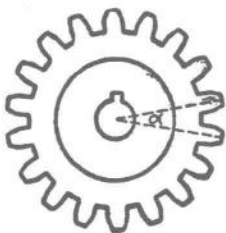


图 1—15

18个齿，求相邻两个齿间的角 α 的大小（图 1—15）。

解：齿轮有 18 个齿，因此一个周角包含 18 个角 α ，而一个周角等于 360° ，所以

$$\angle \alpha = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ.$$

例 2 (1) 68.5° 合多少度、多少分？

(2) 25.28° 合多少度、多少分、多少秒？

(3) $102^\circ 15'$ 合多少度？

解：(1) $\because 1^\circ = 60'$,

$$\therefore 0.5^\circ = 60' \times 0.5 = 30',$$

$$\therefore 68.5^\circ = 68^\circ 30'.$$

(2) $\because 0.28^\circ = 60' \times 0.28 = 16.8'$,

$$0.8' = 60'' \times 0.8 = 48'',$$

$$\therefore 25.28^\circ = 25^\circ 16' 48''.$$

(3) $\because 1^\circ = 60'$,

$$\therefore 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ,$$

$$\therefore 15' = \left(\frac{15}{60}\right)^\circ = 0.25^\circ,$$

$$\therefore 102^\circ 15' = 102.25^\circ.$$

3. 对顶角、垂线 若两直线 AB 和 CD 相交于一点 O ，则得到四个角： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ （图 1—16）。在这四个角中， $\angle 3$ 的两边分别

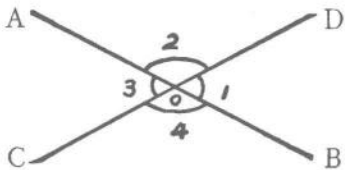


图 1—16

是 $\angle 1$ 两边的反向延长线，这样的两个角叫做对顶角。同样， $\angle 2$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角。

因为 AOB 是一条直线，故 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互为补角。同样， $\angle 3$ 和 $\angle 2$ 也互为补角。即

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \quad \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\text{或 } \angle 1 = 180^\circ - \angle 2, \quad \angle 3 = 180^\circ - \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

同理可得 $\angle 2 = \angle 4$ 。

从上述推理，我们得到：

对顶角是相等的。

在工厂中有一种度量工件角度用的对顶量角器，就是利用“对顶角相等”这个性质做成的。例如要量工件的角（ $\angle AOB$ ），只要看指针在量角器上所指的 $\angle COD$ 的度数就可以了（图1—17）。

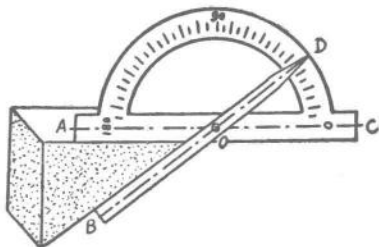


图 1—17

如图1—18，设两直线 AB 和 CD 相交于一点 O ，且 $\angle AOC$ 是直角，那末它的对顶角 $\angle BOD$ 、它的补角 $\angle BOC$ 和 $\angle AOD$ 都是直角。这就是说，两条直线相交成四个角，如果有一个角是直角，那末其余三个角都是直角。我们把两条

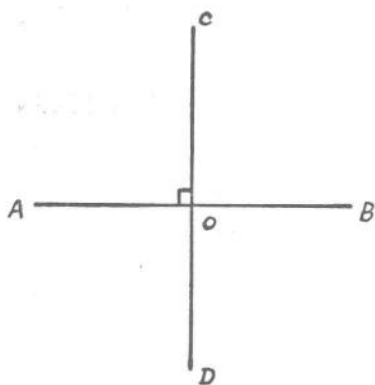


图 1—18

相交成直角的直线叫做互相垂直的直线，其中每一条叫做另一条的垂线，它们的交点叫做垂足。如图1—18中， AB 是 CD 的垂线， CD 也是 AB 的垂线，点 O 是垂足。垂直用记号“ \perp ”表示，读作“垂直于”。 AB 和 CD 互相垂直可以写成 $AB \perp CD$ 或 $CD \perp AB$ 。

三角板的一个角是直角，因此我们常用三角板画垂线（图1—19）。

“在某种意义上来说，最聪明、最有才能的，是最有实践经验的战士。”劳动人民在长期的生产实践中，根据具体情况，创造了各种画垂线的工具和方法。如木工同志常用角尺（它的弯角是直角）画木板边缘的垂线（图1—20）。

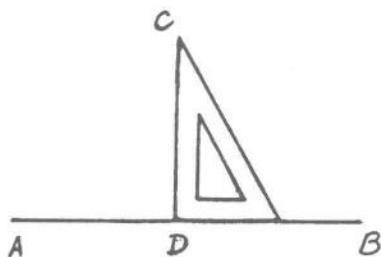


图 1—19

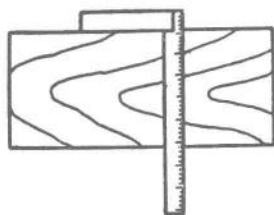


图 1—20

【附录】游标卡尺和千分尺的构造原理和使用方法

1. 游标卡尺 它是一种带有滑动游标的尺，由主尺（连带

一固定卡脚)和副尺(即游标,它连带一滑动卡脚)两部分组成,副尺连同滑动卡脚可在主尺上移动(图1—21)。主尺上的刻度,每格长1毫米。副尺上的刻度根据精确度而定,现在以精确度为0.1毫米的游标卡尺为例,说明副尺的构造原理:

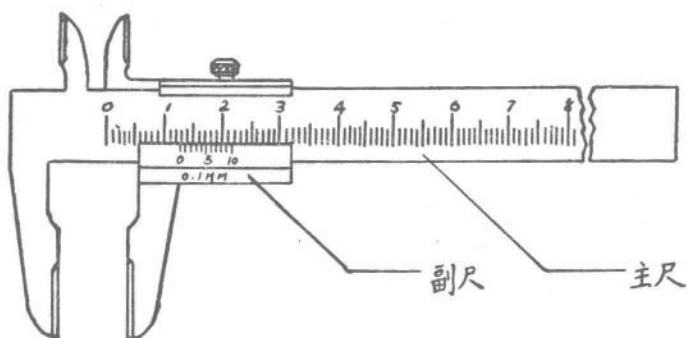


图1—21 游标卡尺

当游标卡尺的两卡脚靠紧时,副尺和主尺上的零线正好对齐,副尺的第10条刻度线(指零线右边第10条刻度线,零线不算在内)与主尺的第九条刻度线对齐(图1—22),因此副尺每格的长为 $\frac{9}{10}$ 毫米=0.9毫米,它与主尺每格长的差为1毫米-0.9毫米=0.1毫米。这个差就决定游标卡尺能测量到0.1毫米。

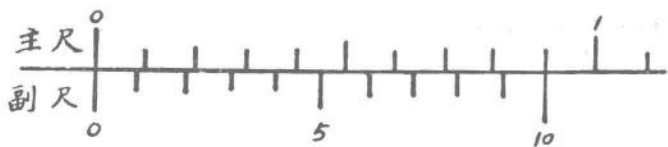


图1—22

移动副尺,使它的第1条刻度线与主尺的第1条刻度线对