

量子力学原理

讲述笔记

卷前（一）

院系調整以後的一年中，物理系在同人們的努力下把應開的基本課程和實驗都開出來了，而且也達到一定的標準。接下來的問題，就是一方面要準備教學計劃裏所規定的專門實驗和高年級的課程，另一方面是同人們自己的提高和進修，以逐步達到綜合性大學所規定的科學研究的目標。

我們打算把這兩件工作結合在一起做。所以在這學期之初成立兩個小組。一個是專門實驗小組，負責專門實驗的準備，便能如期開出，以應教學的需要；並通過準備工作，使參加準備的同志們在實驗技術上有所提高。一個是系課小組，負責逐步開出高年級課程及專門化課程，在準備期間，採取講課方式，使參加聽講的同志們在理論上有所提高。

由于量子力學是近代物理學理論方面研究的必要工具，所以我們選定了這門課程為第一開出的系課。同時商請盧鶴紱教授擔任主講。

參加聽講者不下六七十人，除本系同人外，有本校外系同志和很多的外校同志（如交大，軍醫大學，化工學院等校）。他們遠道而來，情緒甚高；他們提了些寶貴意見，對我們幫助不少。由於政府的提倡，科學研究空氣逐漸發揚，我們這次系課在這方面多少是一點貢獻吧。

系課小組認為系課的筆記應該整理出來，將來可供同人或同學們的參考，而且也是一種極有價值的工作。因此商請姚震黃同志就其本人金乾元同志的筆記加以整理，並經盧先生再審閱更正。現各方面要求將這筆記印出，盧先生亦同意。我想它對大家的幫助必定會是很大的。

卷前（二）

這門課程是在開學時臨時決定的，故來不及寫講義，經本系王主任商洽決定由姚震黃，金乾元兩同志整理他們的筆記，經我閱過，並修正重要不安處後付印。除講解及敘述的詞句及部分內容不齊全外，大體上與所講相合，足供參考之用。

盧鶴紱

(1953)

目 錄
 目 錄
 目 錄

卷前(一)		
卷前(二)		
引言		1
章一 量子理論的物理基礎		5
§ 1. 關於量子過程的試驗的討論		5
§ 2. 物質量子化的舊式理論的基礎		9
§ 3. 波包理論		13
§ 4. de Broglie 波		18
§ 5. 幾率函數的建立		25
§ 6. 測不準關係		29
§ 7. 波粒兩性的並協, Bohr 的並協原理, 及量子 理論中過程的不可分, 統計上的因果, 與宇宙 各部分的不可分開看等概念		36
章二 量子理論中利用算符的數學表述		43
§ 1. 波函數, 量子狀態, 與線性 Self-adjoint (Hermitian) 算符	43	43
§ 2. 薛定格方程式的建立		51
§ 3. 統計上的起伏與關聯		55
§ 4. 本徵函數與本徵值		58
§ 5. 量子力學效應與經典極限 (薛定格方程式的 WKB 近似解)		79
§ 6. 角動量		103
§ 7. 多粒問題		112
章三 斷續的能量本徵態問題		117
§ 1. 諧振子		117

— iv — 量子力學

§ 2. 在向心力場中的運動	122
§ 3. 兩粒問題	133
章四 連續的能量本徵態問題	137
§ 1. 一般的敘述	137
§ 2. 具有球式對稱 (有心) 力場所給的散射——分波方法	142
章五 量子理論中利用方陣的數學表述	149
§ 1. 由篩定格表述引見方陣表述的基礎	149
§ 2. 方陣的數學概念與術語	153
§ 3. 利用 Hilbert 空間作量子理論的基本假設	163
§ 4. 線性諧振子	171
§ 5. 電子的自旋	175
章六 篩定格方程式的近似解法	181
§ 1. 不退化態的第一級攝動理論	181
§ 2. 不退化態的第二級攝動理論	186
§ 3. 退化態的攝動理論	187
§ 4. 用方陣表述攝動理論	191
§ 5. Variation 方法	194
總結 (待印)	

從溫習我們已經知道的東西來看量子理論建立的需要，由此可以明確建立量子理論的任務，解決那些原來經典理論所不能解決的問題，換言之，由此可以看出量子理論與原來的經典理論有那些迥乎不同之點。

物理學開始於對地面上可見之物體以及天體等運動狀態的規律的探求，由此開始建立了牛頓定律，從牛頓力學所得到的預言描寫可見物體的運動已相當成功。在一八五〇年以前，有人企圖用牛頓力學來解釋宇宙間一切的現象，這種企圖是一種妄想。對於宏觀上可見之物體，在流體力學，彈性力學，聲的動力理論裏，應用在被看成有連續性結構的物體上，牛頓力學是相當成功的。

但遇到冷熱現象，在宏觀上想用牛頓力學來解釋是不可能的，因此有需要去依靠經驗以建立新的理論，這就是熱力學定律和平衡狀態方程式，這些在宏觀上跟牛頓力學平行，彼此都是基本的，但這並不符合我們的希望，我們希望把冷熱現象的內部本質被掘出來，因此必須研究物質構造。分子運動論，統計力學，就是把牛頓力學應用到分子所組成的體系，也有了成功，所有熱力學定律和狀態方程式都可以在這種理論中得到解釋，這樣把冷熱現象歸根結蒂地包括到牛頓力學中去，但到這裏就完了。

再下去，考察電磁振動和光的現象即無法用牛頓力學解釋，光是什麼，電是什麼，不能解答了。假如把光當作質粒，就不能用牛頓力學的質粒來描寫，假如說光是電磁波，而認為電磁波是一種以太之振動，用牛頓力學得出的結果得到荒謬的理論，得出以太的剛性比鋼還強幾百萬倍，但是任何物體可以在以太中自由穿過。

目前祇能說電磁波是具有某些物理性質的數學波，具有能量，動量，遇物體能施以壓力。

Maxwell 認為光是電磁波，是 E 和 H 的波動，用這理論圓滿地解釋了光的干涉、衍射等許多物理現象。

說到這兒，我們有兩種互不相干的基本原理，即牛頓力學與 Maxwell 電磁理論，平常稱為二種平行的經典理論。在一八五〇年前，有人企圖用這二個理論去解釋一切現象。這二理論所組成的經典理論具有三個特點：

1. 現象的過程是連續的。用這理論可把過程無限止地分成前後部分，因此所用的物理數量都是連續的。

2. 沒有任何事實原則上可以阻礙宏觀的量度之準確度，只要把量度技術以及儀器無限止地改善，物理數量可以沒有限止地準確地顯示出來。原則上物理數量可無限止地被量得非常準確，這因為測量的儀器與被測量客體由於相互作用所引起的差別原則上可以由建立的理論計算而去除。

3. 可以完全確定每一變數在先後時間前後數值的關係，換言之，一個過程前後部分有確定的因果律把他們關連起來，每一個起始數字在知道相互作用以後即可把將來的數值完全確定起來。

在原子理論裏的微觀實際以及從原子裏面分出來的微觀客體，很明顯地不能用具有這三種特點的理論來描述，因此必須建立新的理論，這就是量子理論。

這種經典理論用以去解釋光的現象遇到不可思議的困難。在一九〇〇年，Planck 因為要解釋黑體輻射的強度與頻率的分佈，不能不放棄這經典理論的第一個特點而創設量子假說。在經典電動力學裏面，可以看出電磁波場（即輻射場）的性質如同簡諧振子

1-2 量子力學

(引言)

一個英國，黑體輻射是電磁波場與它周圍的物質在熱力學平衡時的輻射，他的假說在此情況下等於說輻射場的能暈如同簡諧振子的能暈不像牛頓力學裏所說的可以連續地變化，

$$E = nh\nu, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

只能在這個數值上變換。上式中

$$h = 6.6 \times 10^{-27} \quad \text{爾格一秒}$$

稱為 Planck 常數。利用了這個假說，再利用那個時候的電動力學很容易地得到頻率分佈與事實符合，以後發現這種數暈不連續的所謂一個體系的“能暈的量子化”(energy quantized)的假說很普遍地所有物體(bound system)都受這種限制。因 h 的數值很小，當兩個能暈的數值差別比原能暈很小暈不出來時，能暈可以當作連續，經典理論才有效。

從這假說可以看出，頻率為 ν 的電磁波的能暈可以產生或消滅，但產生或消滅是有一定的單位 $h\nu$ 的。Einstein 在一九〇五年為了解釋光電效應，發現電子被光子打出的動能不與光的強度有關，但與光的頻率成正比。這些學用波動不能解釋。解釋這種現象，Einstein 建立了他的方程式，光的能暈有一單位，而且集中在一個小小的範圍裏，光打在電子上，可以假定是一個碰撞過程，

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W, \quad (W \text{ 是從金屬裏跑出時電子所需的能暈。})$$

這樣要求光的能暈是集中在一個小體積內，所以 Einstein 假設光是一種粒子，叫做光子(或光量子)。Einstein 又指出光量子的動暈是：

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}, \quad (\vec{u} \text{ 是光子傳播方向的單位向量，稱傳播向量。})$$

這樣才符合電磁場裏的能暈。以後用這樣的一個符號

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u},$$

若令 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ，則光子的動暈可以這樣簡單地寫成

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},$$

光子能暈： $E = h\nu$ ，

二式合併，得 $\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{u}$ ，

這就是電磁理論裏電磁場每單位體積所帶動暈能暈的關係。從相對論中，

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad E = mc^2, \quad \text{其中 } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

從二式可得 $\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p^2$ ，

由此可知光子似乎是沒有靜止質量的粒子。

利用光子的這些數暈可以解釋許多現象，例如 Compton 效應，自由電子被散射後頻率的改變，用光子很易計算出來。由這些事實我們可以說光是粒子，是輻射能暈的個暈，不能再分了，是不連續的東西，用它來解釋的過程自然也是不能再分了，例如光子被吸收

的過程不能被更小的過程去代替。

有人企圖把光子打成兩半，最出名的是 Lawrence and Beams, 用 Nicol 稜鏡證明不能把光子分成兩部分。因此光子是基本粒子，它與物質交換之過程如吸收，轉移等等，也是不可再分的過程，叫做基本過程 (elementary process)，這與經典理論第一個特點不同。

一九一二年 Bohr 因為要解釋原子發射光的頻率符合 Ritz's 的組合規則不能不用 Planck 的量子假說把它推廣到微觀客體，不能不假設原子能量是量子化的，由此解釋了 Ritz's 組合規則。Bohr 的頻率規則：

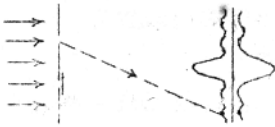
$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h},$$

$$E_n - E_m = h\nu_{nm}, \quad (\text{光子能量}).$$

Franck & Hertz 第一個用實驗證明了原子能量的量子化。

由以上所講似乎得到一個矛盾，光有兩種本質。當它被發射，吸收，產生或消滅時，光表現為一種粒子，但在中間傳播過程裏表現為一種波，要不是波，干涉衍射就不能解釋，這個兩重性是互不相容的。

此項二元性可舉一例說明它是互不相容的。一個雙縫如圖所示，得到干涉圖樣：



如將一縫關住，所得圖樣不同，這證明波的疊加原理。有人企圖說光不是波而是光子，說光子之間有相互作用，這相互作用可得出干涉圖樣，但實驗證明這企圖是失敗了。

光的強度可以弄得非常弱，祇允許有一二個光子進去，便沒有相互作用的機會，延長觀察一個長的時間，觀察得到的圖樣仍還是干涉圖樣，這說明干涉圖樣並不由於相互作用，因此波還是它的本質。若在此將光看做光子，還有一件令人不可思議的事，從二個縫與一個縫所得圖樣不一樣，一個縫時光子可以到達某地，但當二縫時，光子可能不到這裏，這證明了單用光子概念不能解釋，因此又一定是波。

類似的實驗證明了所有的基本質粒都有波性，波長是

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

就是所謂 de Broglie 波的性質。

波性和粒子性在這裏可以說是同樣重要。蘇聯科學家用電子做相似的實驗，每一電子慢慢進來，假定是自由到達各處的，延長觀察時間，所得二縫與一縫的圖樣不同，證明電子也有波性。這就告訴我們，微觀世界裏的粒子不像宏觀理論中的粒子，而是粒子跟波相結合的那種性質的連繫。

這種二象性又打破了經典理論的第二個特點。

因為粒子有二象性，我們就得到一個關係，即 Heisenberg 測不準關係，在第一章裏要詳細談到。假想一個實驗對於量一微觀客體的物理量，這實驗用宏觀儀器來測量微觀客體的數量；在這假想的實驗中，Heisenberg 發現了沒有一個數量不服從一個關係，任何數量都是成對的準確性不會超過某一限度，例如

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar,$$

$$\Delta p_p \Delta \varphi \geq \hbar,$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

同時測量成對的數量的天然誤差的乘積不能小於此，這是假想的實驗而不是實際的，沒有一個假想的實驗違背這個理論。這種原理可得一結論，我們所要建立的量子理論中包

括這個特點，就是原則上物理數量不能成對地同時無限制地準確地測量，原因是所有的粒子都具有二象性，這粒子與測量儀器間的相互關係就不能知道，換言之，儀器與客體間的相互作用所生的誤差無法計算。這個特點與經典理論的第二個特點是衝突的。

量子理論的另一個特點，微觀理論之客體的過程與經典理論不同，即量子過程準確地在什麼時候什麼地方發生在實驗裏沒有一定的規律，好像個別地有自由意志，綜合起來當然是有規律的，物質波的強度與那時那地該質粒被發現的機率成正比（Born 對物質波意義的解釋）。目前祇能這樣說，波祇能決定同樣客體的統計行為，而不能決定任一客體的確定行為。

量子理論的特徵：

1. 量子過程是不連續的，不可再分的過程。
2. 每一客體的本質是波和粒子的二象性，使物理的特性在原則上不能成對地無限止同時準確地量得。
3. 波祇可決定同樣客體的統計行為而不決定任一單獨客體的確定行為，也就是沒有確定的因果關係，祇是統計性的。（這個特點我們以後要加以批判。）

除此三特點，量子理論尚有：

4. Bohr's 相應原理 (correspondence principle)：經典理論是量子理論極限的近似。

在第一章裏我們要從這四個要求得到現在完全的量子力學。在量子理論建立的過程當中，引起哲學上兩種相反的看法：

1. 唯心的主觀的看法：發明量子力學的部分科學家有這種看法，認為微觀客體是波還是粒子是沒有什麼意義的，微觀客體既不是波又不是粒子，並且反動地說微觀客體不具有什麼性質，而祇具有幾種可能性 (potentiality)，這就是這種客體只是通過某個宏觀體系的儀器表現出來是波或是粒子，祇與宏觀的儀器有關，而把儀器分成兩大類，只是藉這二大類儀器的作用表現出來，而這兩大類的儀器是互相排斥的，因為不能同時用這二大類的儀器同時觀察到一種性質，二者是互補的 (complementary)，不能同時完全地表現出來。這是由 Heisenberg 關係的發展而得（例如 $\Delta p \Delta q$ 中 p, q 為互補），叫做 Bohr 互補原理。這種說法符合於哲學上的馬赫的現實主義，只承認事實而不承認本質。這種看法是哥本哈根派，領導者是 Bohr，附從者是 Heisenberg, Pauli, Jordan，幾乎所有資本主義國家的科學家都是唯心的看法，蘇聯的 Фок，以及 Ланнэу，也或多或少地維護這種看法。

2. 唯物的客觀的看法：在 de Broglie 原有此看法，後來受 Pauli 批評就不敢再談了；說微觀客體又是波又是粒子，同樣遵守此二元性。目前的量子理論是極不完全的，個體的客體規律還沒有發現。這和統計力學的方法不同：統計力學研究平均的性質，個別粒子的規律符合於牛頓力學，在量子力學裏個別客體的規律不曉得，只曉得平均的統計性質，整個處於統計性質的理論中。這種看法與唯心的看法不同，唯心的看法是到此為止了，不必再研究了；現在唯物的看法是無限止地可以鑽研下去，任務是要發現個別微觀客體本身的規律，尋找它的本質。布洛亨采夫，Frenkel, David Bohm，都已走向唯物的看法，這個任務現在雖成功還遠，希望中國不久就有人擔當起這個任務去發現它的規律。

§ 1. 關於量子過程的試驗的討論。

在這裏要討論幾個基本的實驗。

微觀過程包括光被吸收發射的過程。光在空間傳播的時候，有許多事實指明它是波；但在吸收發射的過程裏，也有實驗指明它的能量集中在一個小體積裏，是一個粒子。

在這裏我們要從已知的實驗結果，要用兩種說法，波和粒子的說法，去解釋它，可知波的理论失败了，並且證明這過程是量子過程，不能把它分成前後部分來看，是一個突變過程。

[1] 光電效應及其反效應與 Meyer-Gerlach 試驗。

這個實驗詳細步驟怎麼做，這裏不講。

光電效應：——光射到物質上，使其中的電子離開表面而出來，也就是光電子。光打在原子或分子上都可以打出光電子，光射在原子上，全部能量全部被原子吸收，電子克服必需的功而跑出來。

在實驗裏，有五個主要的事實：

1. 一定波長的光，打出來的電子的能量（可用實驗測定，如阻擋電位法），分佈有一個最高速度，即最大的動能，這個動能不與光的強度有關係，但光的頻率改變時，這能量也改變了。

2. 光打在某一物質表面上，光的頻率若小於某一頻率， $\nu < \nu_0$ ，這時不管光的強度怎樣大，沒有光電子產生。

3. 光電子發射的數目與光的強度有關，但光電子能出來不能出來，光的強度不能決定。

4. 光打在物質表面上，絕大部分被物質吸收，僅一小部分放出光電子，換言之，光電效應效率很低。

5. 光不管怎樣的弱，不論打在任何物質或金屬表面上，好像光電子馬上就產生，用精確儀器測定這個時間不超過 10^{-9} 秒（Lawrence and Beams）。

以上的 1、2、5 三條顯然不能用電磁波經典理論解釋，若用光子解釋，那這些事實都是迎刃而解了。

譬如第一個事實吧，前面講過 Einstein 的公式：

$$\frac{1}{2} m v_{\text{最大}}^2 = h\nu - W$$

Einstein 把 Planck 假說推廣，說 $h\nu$ 是光的能量的單位，把它看成光子。光子打在金屬表面上，被金屬裏面的電子全部吸收，電子跑出物質要做一部分功， W 是最小的功，平常叫做功函數。光子一次能授與電子這麼些能量，這能量集中在一個小體積，電子能一次接受此能量，不像在經典理論裏，電磁波能量是在空間的，連續接受能量，時間較慢。

第二個事實， $W = h\nu_0$ ，沒有小於它的能量，假如 $\nu < \nu_0$ ，就沒有剩餘的能量足夠使電子出來，所以沒有光電子發射。

第五個事實，既然光的能量集中在小體積裏，這是微觀客體的過程，是突然的（instantaneous），不可分的過程。

第三個事實，光電子出來的數目當然與光子的數目成比例。第四個事實，光電效

— 6. — 量子力學

效率很低，幾百個光子僅與一個電子相遇而出來。

以上五個事實，用光子理論很易解釋，用波的理论解釋非常困難。

依照電磁波理論，能量分佈在電磁場裏面，這東西經過物質的時候，電子吸收能量是一個連續的過程，不斷可以吸收，由此可以得一預言，不管波長多少，只要打在物質表面上的時間够長，可以繼續吸收，是連續的過程，就可打出光電子，但這與事實不符合。頻率比 λ 還小的光，不管時間多長，不能產生光電效應。假如光打在金屬上很弱，電子吸收能量很慢，連續吸收能量，因此光電子出來需要時間長，光強需要時間短，但事實上光不論強弱，光電子都一下子出來。

最出名的實驗是 Meyer-Gerlach 試驗，打破了用波理論的解釋。用很微小的金屬質粒，在電場裏懸浮着，用光打在此質粒上，使吸收足夠能量打出一個電子，依照經典理論，當光相當弱時，他計算至少要幾秒鐘才能便電子出來，但實驗中，不論光如何的弱，只要一射到金屬粒子上，就立刻打出光電子，放光電子的質粒帶正電，在電場內有加速度質粒就跳動。這與 Lawrence & Beams 實驗相符合，比 λ 小的不論怎樣強的光，沒有金屬粒子跳動。

在電動力學中可知，當光的頻率與原子裏電子的頻率接近的時候，吸收的速度特別大，這就應該預告電子出來特別多，光電效應要特別快，但事實不然。電磁波理論終于失敗了。

光電效應的反效應：——一個^有動能的電子打到物質的鉍上產生 α 光，出來的頻率是連續分佈的，叫做 *Bremsstrahlung*，雖是連續的，但不是無限度的，它有一個最大的頻率，經 Duane-Hunt 證明，

$$\nu_{\text{最大}} = \frac{ve}{h}$$

這個事實要是用光子學說來講那是簡單得很，在 *Bremsstrahlung* 裏面，最大頻率的光恰好是最大動能全部被消滅所變成，這說明是一個不可分的量子過程，但這是極少數的，絕大部分中動能 沒有全部變掉。

用電磁波理論解釋，電子打在物質上，速度變慢，電子在物質裏有負加速度，而有輻射，放出電磁波，電磁波理論中輻射能量與加速度有關，但不能解釋這個最大動能的事實。依電磁波理論，一電子打入物質中有一定的運動狀態，則

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left| \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|^2$$

便是高速電子打在物質上，每秒所放的輻射能量，一個帶電質粒當它放電磁波時，帶這些能量。放出的波長是，依電磁波理論可知，一個振動的帶電質粒發出的電磁波頻率是它振動的頻率，電子打在金屬內，它的運動不是週期運動，是一般的運動：

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

不能用 Fourier 級數來解決，但可用 Fourier 積分，把這過程分成週期部分，連續部分從 0 到 ∞ 都有，因此經典理論完全不可能解釋 *Bremsstrahlung* 有一個最高的限度。

電子一次變過程產生光子，量子理論可以由此得到：減少的動能產生多少的頻率，但有最高值。

目前的量子理論說 *Bremsstrahlung* 是電子在原子核附近的力場裏面可以突變，變成光子。

這便我們信服了用電磁理論來解釋是不可能的，在這些事實裏，光顯示出來是一個粒子。

[2] Compton效應與 Compton-Simon 試驗。

一個光子打到物質上，可以被原子電子全部吸收而變成其他的能量，這是一種過程。Compton效應則是另外一種過程，也是突變，不可分為前後部分來看。

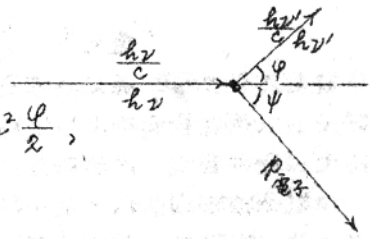
光打在物質上（如某種氣體），有一部分光被散射，散射過來的光有一部分光的頻率變小，波長較長，這就是Compton效應。散射光的頻率並不連續的，而有一定數目，又是量子過程。假設原來波長 λ_0 ，散射光波長 λ ，波長的增加 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 。只與散射的角度有關，而與原來光的強弱無關，經實驗證明：

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\varphi) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_c \text{ 是常數。}$$

這個 Compton 用光子來解釋，認為這是光子與物質裏自由電子的彈性碰撞所引起來的現象，光子打到電子上作前後總能量不變守恆，前後總動量不變守恆，利用這個來解釋，光子打到一個原來靜止的電子上，一部分能量給了電子，電子跑開了，有一個動量 p_e ，光子的能量和動量：

$$\begin{cases} E = h\nu \\ \vec{p} = \vec{u} \frac{E}{c} = \vec{u} \frac{h\nu}{c} = \vec{u} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \vec{u} \frac{2\pi}{\lambda} = h\vec{k} \end{cases} \quad (\text{在傳播的方向})$$

光子原來的能量是 $h\nu$ ，後來是 $h\nu'$ ，原來的動量是 $\frac{h\nu}{c}$ ，後來是 $\frac{h\nu'}{c}$ 。這個過程我們假設它是彈性的，利用這個導出來就可以得到：



$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\varphi) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

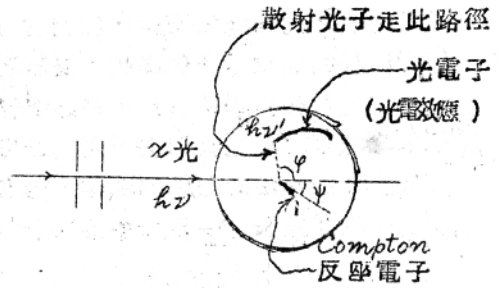
其中 $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0.0242 \text{ \AA}$ 稱為 Compton 波長， m_0 是電子的靜止質量。

在這效應裏，我們要討論的是能量守恆動量守恆原封不動地用上了是什麼緣故。在引言裏我們已經講過，經典理論須經根本改造才能描寫量子過程。假如一個過程在經典理論裏需要用連續性的數量來描寫的，那種過程的定律，在量子理論裏自然不能存在，但假如在經典理論裏有一個定律不需要用連續數量來描寫，這個定律就不一定要把它取消。例如能量守恆以及動量守恆可以用，在經典理論裏，這也是不連續的突變過程，很可能在量子理論裏也適用，這樣表明這種定律更是一般化，那要試試看了，在做觀客體的實驗裏證明了這種定律是依然無恙的。

Compton-Simon 試驗，一次解決了兩個現象。用的是雲霧室，光線打進來，在原來光子走過的區域裏，光子碰到電子，可能做 Compton 效應，部分能量被吸收，這個光子就被散射。光子不帶電，不起游離作用，照相看不見，可是 Compton-Simon 試驗能得到相片，相片上的條紋類似於 β 射綫，可以說明它是電子。電子依 ψ 方向出來，這

是 Compton 反擊電子，散射光子依 φ 方向，打出來光電子的軌跡比較長，這是一個相片上照的兩件事情，利用彈性碰撞得到 φ 和 ψ 的關係：

$$\tan \psi = \frac{\cot \frac{\varphi}{2}}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}}$$

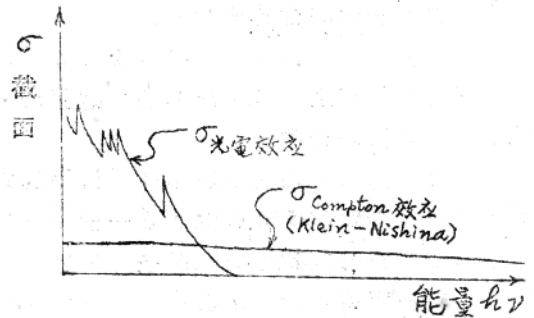


因此 $h\nu'$ 就可以算了，光電子軌跡的長度也可以計算了，計算所得的結果雖不完全符合，但是合理的，這就令人信服是量子過程。

有人用波解釋，利用 Doppler 效應 以及連續的介質，導出公式也很準確，但無法找出 φ 和 ψ 的關係來。

光子打在物質上，有兩個可能的過程，被吸收或被散射，光子在何時何地被吸收或散射，這個別的規律在目前的量子理論裏沒有，但可以計算它的機會。如已知原子排列，量子理論就可預言幾分之幾作光電效應，幾分之幾作 Compton 散射，這個過程的碰撞截面是多少，這截面就是機會。

在圖中， σ 是截面，與光的能量有關，與物質有關。一個光子打來了，作光電發射的截面是這個樣子，做 Compton 散射的截面又是這個樣子，這兩個截面之比就是單考慮這兩個過程的機會之比。Klein-Nishina 導出這個關係，是一個大成就。



目前量子理論裏，個別過程的定律沒有一定，只有統計上的因果關係，這跟經典理論不同。在經典理論裏有決定性的個別因果律，但在微觀容體就沒有決定性的個別因果律，目前的事實或者可說是不夠，不能引起我們作這個結果。前面說過，微觀粒子都有個別的意志，這是唯心的看法，而目前的看法是有個別的規律，但目前的事實沒有可能引導我們去發現，所以我們的任務是去發現這個規律，目前由于統計性的因果律。

由這二種實驗以及 Planck 輻射理論，我們不能不說必然有許多事實，干涉，衍射等，說明光在空間傳播時是波，但它在被吸收或發射的過程裏邊，顯然是粒子。

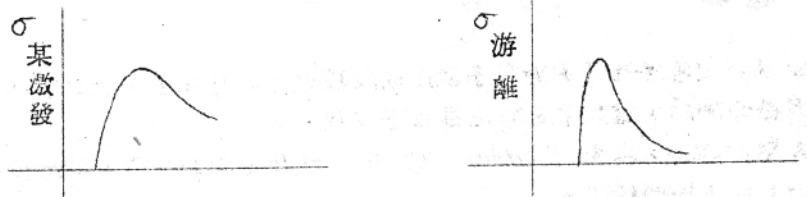
[3] Franck-Hertz 試驗。

這個試驗斷定了一個問題的答案。量子理論開始于黑體輻射問題，輻射振子的能量量子化，光子打到它上它的能量被吸收，簡諧振子的能量一次增加。

這個試驗以物質打物質而不以光子打物質。用一定能量的電子打到氣體裏邊，然後把這能量改變，看它有什麼變化。Franck-Hertz 用這種實驗發現有一種突變，電子能量到達某個能量時，電子的能量突然被吸收了，電子有足够的能量才能引起物質的能量產生突變，假使它的能量不升高一步，原子的能量就不能提高一步，這個量子化的台階，與氣體發射的電子所吸收的光子的能量一樣。

從這實驗可以導到四個結論：

1. 物質之間的能量交換，即物質微觀客體之間的能量交換，與物質輻射^的能量交換，遭受同樣的能量量子化限制，換言之，物質能量的量子化是真實的。
2. 在這種交換過程裏邊，是非彈性碰撞。祇看個別的質粒的能量，不^等恆，假如把原子本身能^量增加也算進去，仍然是^守恆的。
3. 這種過程沒有個別的規律，祇有機會性的規律，與前面相彷彿的，沒有事實可以區別電子打在原子上一定產生游離或激發。



4. 這過程是個突變，不能把它分成前後部分來看。

§ 2. 物質量子化的舊式理論 (Bohr-Sommerfeld 理論) 的基礎。

Bohr-Sommerfeld 第一次建立了物質量子化的近似理論 (關於光的發射吸收)，這理論的基礎主要是依靠它的相應原理。他發明量子條件，好像是懸空的假定，其實可以從相應原理得到。

上面講過，在微觀客體能量轉移的過程裏，能量守恆定律仍然有效。一個原子每次所發光的能量是不可分的，是一個 $h\nu$ 單位那麼多，能量守恆定律就要求原子發光時原子本身損失的能量也是那麼些，反之，原子吸收能量也要吸收那麼些，這樣看來，原子的能量一定要量子化，這由 Franck-Hertz 實驗可得，這也符合原子所發光譜線的頻率關係，即 Rydberg-Ritz 組合原則。假如一條光線的頻率是 ν_1 ，另一條光線的頻率是 ν_2 ，則頻率為

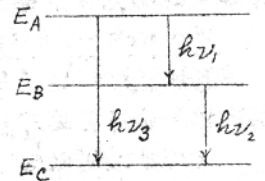
$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_3, \quad \nu_1 - \nu_2 = \nu_4$$

的光線也可存在。這用原子的量子化的能階很容易解釋：當原子能量突變時，它就發出一個光子，原子的能量可以從 E_A 突變到 E_B ，從 E_B 突變到 E_C ，也可以從 E_A 變到 E_C ，就得到：

$$h\nu_1 = E_A - E_B,$$

$$h\nu_2 = E_B - E_C,$$

$$h\nu_3 = E_A - E_C,$$



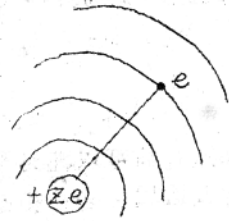
顯然 $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$ 。

原子的能量就是這樣的量子化，它的能量究竟怎麼計算，可由理論計算，Bohr 首先根據他的相應原理計算這量子化的能量，下面是計算的基本原理。

在這裏祇是爲了說明，所以爲簡便計，祇考慮電子在原子裏作圓周運動，這是由於核與電子之間的吸力。Bohr 理論主要依靠相應原理，而另外經典理論仍然照樣用以整個理論是一個混合的理論。電子所受的力：

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{ze^2}{r^2}$$

故電子速度： $v = e\sqrt{\frac{z}{mr}}$ ，
 所以電子離原子核愈遠，速度愈小。電
 子在原子核附近運動的頻率，依經典理論，



$$\nu_c = \frac{v}{2\pi r} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{z}{mr^3}}, \quad \nu_c \sim 1/r^{3/2}$$

所以離原子核愈遠，這經典的頻率愈小。依照經典電動力學來看，電子以頻率 ν_c 作圓周運動所發出的電磁波的_{頻率}也是 ν_c 。發出電磁波後，電子能量損失，軌道要改變，現在假想電子保持那個軌道。像無線電波那樣的波吸收或發射現象，不用考慮量子過程，因為 ν 小，每次輻射已包括幾個量子，電動力學已足夠近似了，但在光的現象及 γ -射綫，那就不能不考慮量子過程，因為個別的光子起了效應， ν 够大了。在光的現象中首先發現量子化現象，所以頻率小的時候，是經典理論的範圍。這樣一看可以應用相應原理。假如電子以頻率 ν_c 運動，則所放電磁波的頻率也是 ν_c ，這運動頻率愈小，換言之，電子離原子核愈遠，經典理論愈有效。依照相應原理，原子所發的光的頻率 $\nu \approx \nu_c$ （軌道大時），無論什麼量子理論，在經典理論有效的區域裏，可所這樣說。

電子在原子內運動的總能量：

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{ze^2}{r} = -\frac{ze^2}{2r}$$

這是祇考慮圓周運動，軌道離核愈遠，運動能量愈大，

$$E = (\text{常數}) \times \nu_c^{2/3}$$

換言之，電子在原子裏作經典運動的頻率是能量的函數，

$$\nu_c = \nu_c(E).$$

原子能量量子化，兩個相鄰能階的差別是

$$\Delta E = h\nu$$

ν 是放出光子的頻率。相應原理告訴我們當 ν_c 愈來愈小的時候，光子發射的頻率就趨向于經典的運動頻率，即

$$\nu \rightarrow \nu_c,$$

$$\text{當 } \nu_c \rightarrow 0,$$

因此我們可以寫：

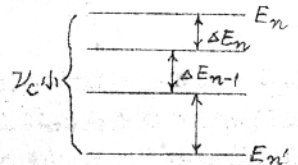
$$\Delta E \rightarrow h\nu_c(E),$$

$$\text{當 } \nu_c \rightarrow 0.$$

我們的目的是要看那些運動能量是可以當作連續的。現在我們考慮許許多多的能階，都是在離核很遠的軌道上，

$$\Delta E \approx h\nu_c(E), \quad (\nu_c \text{ 很小})$$

顯然， $E_n = \sum_{n'=0}^n \Delta E_{n'} = \sum_{n'=n}^n \Delta E_{n'} + E_{n'}$ ，
 這就是第 n 個能階的能量 E_n 可以把 n 個能量差別



ΔE 加起來。第 n' 個能階以下的能階，是在量子境域裏面，不能用相應原理，在第 n' 個

以上的能階， ν_c 很小，是在經典有效境域， ν_c 是 E_n 的函數，

$$\Delta E_n \approx h \nu_c(E_n),$$

故得 $E_n \approx \sum_{n'=0}^n h \nu_c(E_n) + E_{n'}$

只要知道 ν_c 就可以經典有效範圍內的能階差別。但問題來了，究竟選用那一個 ν ，這在經典有效區域，即在相應原理有效的境域裏，沒有多大關係，換言之， n 的數字很大，即

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} \ll 1$$

$$\downarrow \rightarrow h\nu \approx h\nu_c$$

是一個很小的分數，這兩個相鄰軌道的頻率相差無幾，二者沒有多大分別。

現在要找一個條件，要把這些能階找出來，這就是量子條件。這條件是從經典區域內找到的，我們也把它外推到量子區域，假設它也有效，實際上是近似的，不是一個完全的量子理論。

從相鄰能階看出，量子條件要乘 h ，在經典域區內，

$$h \approx \frac{\Delta E_n}{\nu_c(E_n)}$$

量子條件必須用它來描寫量子能量。我們也可以把它這樣加起來：

$$J_n = \sum_{n'=0}^n \frac{\Delta E_n}{\nu_n(E_n)} + J_{n'}$$

從 n' 到 n 都是經典性的， n 很大，軌道很遠，總起來叫它 J_n ， J_n 代表什麼，現在暫時不管，它當然是能量的函數，

$$J_n = J(E_n),$$

$$J_{n+1} = \sum_{n'=0}^{n+1} \frac{\Delta E_n}{\nu_n(E_n)} + J_{n'} = \frac{\Delta E_{n+1}}{\nu_c(E_{n+1})} + J_n = h + J_n,$$

$$\therefore J_{n+1} - J_n = h.$$

這樣組合成的函數我們還沒有發現相當於經典理論裏那個函數 J 每相鄰兩個相差 h ，所以得：

$$J_n = nh + \text{常數}.$$

在經典區域裏，也就是在軌道遠的區域裏邊，

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} \ll 1,$$

J_n 可用積分來描寫：

$$J(E) = \int_{E_0}^E \frac{dE}{\nu_c(E)} + J(E_0),$$

這樣得出來， $\frac{1}{\nu_c(E)}$ 一定是 $\frac{dJ}{dE}$ 了，

$$\frac{dJ}{dE} = \frac{1}{\nu_c(E)}, \quad \therefore \nu_c(E) = \frac{dE}{dJ}.$$

所以，假如把能量 E 看作 J 的函數的話，運動的頻率就是 $\frac{dE}{dJ}$ 這個公式我們在經典力學裏很熟悉，等於經典理論裏 Hamilton-Jacobian equation 裏的正則變換。在單週運動中（即單頻率運動），經過正則變換：

$$p, q \rightarrow J, w \quad \text{及} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(p, q) \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}(J)$$

利用正則方程式 (canonical eq.) 就得：

$$\mathcal{V}_c = \frac{d\mathcal{H}}{dJ},$$

這就是

$$\mathcal{V}_c(E) = \frac{dE}{dJ}.$$

所以知道這 J 相當於經典力學裏的 action variable, 或相積分 (phase integral).

在單週運動中, 相積分

$$J = \oint p dq,$$

換言之, 在 p, q 的相空間裏的路綫所包括的面積就是這個東西; 在經典力學裏, 每一個週期運動都有 p, q , 這樣我們把 J 確定了, 在經典理論裏就是相積分

$$\oint p dq = nh + \text{常數}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

這就是說, 經典運動裏, 第 n 個量子化的運動的相積分必須符合這個條件。這就是 Bohr-Sommerfeld 量子條件。

換言之, 根據相應原理, 而沒有根據旁的, 量子條件必須是這個, 這也就是相積分必須量子化。在經典理論有效區域內, 即在 n 很大時有效, 在 $n \gg 0$ 時近似有效。

這樣我們得到了量子條件, 現在假定它可以外推到量子區域。在這區域裏, 經典理論不能應用, 我們希望它仍能有效, 這在單週運動中計算原子能階時有效, 例如在計算氫原子能階有效, 但用來計算氦以及多電子原子能階時就有困難。

剛才為簡便計, 祇考慮單頻率週期運動, 這理論還可以適用於多頻率週期運動, 實際上這運動不是週期運動, 可以分成許多個頻率, 假設有 f 個自由度, 就有 f 個頻率 \mathcal{V}_c , 在經典理論裏邊:

$$(\mathcal{V}_c)_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i},$$

故在多頻率週期運動中:

$$J_i = \oint p_i dq_i = n_i h + \text{常數}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, f.$$

有幾個頻率就有幾個量子條件, 那幾個能量就是量子條件所允許的。

例如圓周運動, r 不變, 僅 ϕ 變, 故得

$$J = \oint p_\phi d\phi = p_\phi \oint d\phi = 2\pi p_\phi, \quad (\text{角動量守恆})$$

故得量子條件為:

$$\begin{aligned} 2\pi p_\phi &= nh + \text{常數}, \\ \therefore p_\phi &= \frac{nh}{2\pi} + \text{常數} = n\hbar + \text{常數}, \\ & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

n 是整數, 正負都可以, 這由於坐標可以任意選擇的。

這樣可以看到角動量是量子化了, 這個常數在這裏沒法確定。由新的量子理論所得結果相同, 並且得出這個常數等於零, 這在以後要講到的。

這方法僅適用於單週期及多週期運動, 對非週期運動即無效。利用這理論對於光譜強度的解釋, 祇能得到近似的結果。