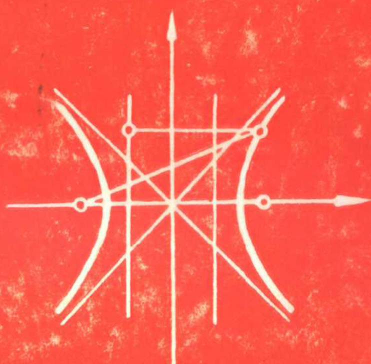
数学教学参考资料之四

# 解析几何题解集



扬州师范学院数学系
教学参考资料编写组

生产的发展，推动了数学的发展。数学来源于实践，反过来又作用于实践。当前为了实现我国工业、农业、国防和科学技术的现代化，提高全民族的科学文化水平，学好数学基础知识、掌握好基本技能技巧，已成为大家迫切的愿望和自觉的要求了，广大数学教学工作者也正在积极地为搞好教学工作作出贡献。

我系部分教师正是应各方面的需要，在讲授相应课程的基础上，将积累的资料汇编成数学教学参考资料，互相交流学习，如能给使用者有所帮助，则不胜幸甚。

数学教学参考资料以中学数学题解为主，适当辅以基础知识，适用于中学数学教师和中学高年级学生参考。全书暂分《初等代数题解集》、《初等几何证题集》、《平面三角题解集》、《解析几何题解集》、《中学数学综合题解》五册，分别即出，供内部参考。

这本《解析几何题解集》是几何教研组部分老师积累的资料，由左铨如、毛其吉老师汇集整理而成的。内容包括平面解析几何和空间解析几何初步。考虑到解题的灵活、简便，我们把极坐标和参数方程与直角坐标和普通方程的内容合并编排。

在编写过程中，由于时间匆促，仅就现有资料汇集而成，内容和类型自然不够全面，方法也不尽完美，请同志们批评指正。

数学教学参考资料编写组

一九七九年五月

# 目　　录

## 第一篇　平面解析几何



## 第二篇　空间解析几何

# 第一篇 平面解析几何

## 第一章 “形”与“数”对应关系的建立

### 内 容 提 要

解析几何是通过坐标系的建立，把构成几何图形的点与有序实数组(称为点的坐标)联系起来，进而把图形（曲线、曲面）与方程联系起来，使“形”与“数”能够互相转化，从而用代数方法来研究几何问题.

一、有向线段——规定了起点和终点的线段. 起点是$A$，终点是$B$的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$，又称为向量. 注意，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. 有向线段既有方向（从起点到终点的方向）又有长度，有向线段$\overrightarrow{AB}$的长度记作$|AB|$，也表示$A$、$B$两点之间的距离. 位于轴（规定了正方向的直线）上的有向线段$\overrightarrow{AB}$习惯上记作$\overline{AB}$或$AB$. 它与轴或者同向，或者反向.

有向线段$\overline{AB}$的数量：

$$AB=\begin{cases}+|AB|，当\overline{AB}与轴同向时,\\ -|AB|，当\overline{AB}与轴反向时.\end{cases}$$

数轴——在规定了正方向的直线上，取一定点$O$作为原点，取一定长的线段作为长度单位，这样就在直线上建立了直线坐标系，这样的直线叫做坐标轴，也叫做数轴. 轴上任意一点$P$所对应的有向线段$\overline{OP}$的数量$x$叫做轴上点$P$的

坐标，用$P(x)$表示。

数轴上以$A(a)$为起点，$B(b)$为终点的有向线段的数量

$$AB=b-a,\qquad |AB|=|b-a|.$$

轴上任意三点$A$、$B$、$C$不论它们的位置如何，恒有

$$AB+BC=AC,\text{（沙尔定理）}$$

向量$\overrightarrow{AB}$在轴$u$上的射影$A'B'$：射影$_u\overrightarrow{AB}=|AB|\cos\theta$，其中$\theta$是轴的正向与$\overrightarrow{AB}$的夹角。

**二、平面直角坐标系——由两条互相垂直、具有公共原点$O$和相同长度单位的数轴，即$X$轴和$Y$轴构成的。设坐标平面上任意一点$M$在$X$轴和$Y$轴上的射影分别是点$P(x)$和点$Q(y)$，则一对有序实数$(x,y)$称为点$M$的坐标，记作$M(x,y)$。**

两点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$之间的距离

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

点$M(x,y)$分有向线段$\overline{P_1P_2}$所成的分比$\lambda=\dfrac{P_1M}{MP_2}$，有

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

当$\lambda=1$时，$M$是$P_1P_2$的中点。

以$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$为顶点的三角形的面积$=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$的绝对值

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$

三、极坐标系——由平面内一定点$O$（称为极点）引一条射线$OX$（称为极轴），并规定长度单位和计算角度的正方向

(通常取逆时针方向为正方向)而构成。设平面内任意一点$M$到极点$O$的距离$|OP|=\rho$(称为极半径),$\angle XOM=\theta$,则一对有序实数$(\rho,\ \theta)$叫做点$M$的极坐标。为了研究的方便,也允许$\rho$取负值,这时极坐标为$(\rho,\theta)$的点$M$位于$\angle XOP=\theta$的终边$OP$的反向延长线上,且$|OM|=-\rho>0$。

一点的极坐标有无穷多个,可表示为

$$((-1)^n\rho,\ \theta+n\pi) \qquad (n\text{是整数})。$$

**四、极坐标与直角坐标的互换:**

**如果把极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合,极轴与$X$轴的正半轴重合,取相同的长度单位,则任一点的极坐标$(\rho,\ \theta)$与直角坐标$(x,\ y)$* 有关系式**

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta;$$

**即**

$$\rho^2=x^2+y^2,$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho}, \qquad \sin\theta=\frac{y}{\rho}.$$

**五、曲线与方程的关系:**

在某平面坐标系中,如果坐标适合某个二元方程的点的集合是某条曲线,就称这个方程是该曲线的方程,这条曲线是该方程的图形。

需要注意:所谓某曲线的方程,含有两层意思:

(1)凡是曲线上的点,它的坐标都适合该曲线的方程;

(2)凡不是曲线上的点,它的坐标不适合该曲线的方程;即凡是坐标适合某曲线的方程的点,都在这条曲线上。

换句话说,点在某曲线上的充要条件是这点的坐标适合该曲线的方程。

---

* 在本书中,今后如不指明,常用$(x,\ y)$表示点的直角坐标,用$(\rho,\ \theta)$表示点的极坐标,以免混淆。

**六、两个基本问题：**

**1．已知方程，画它的曲线．**

为了解题简便准确，在列表、定点、描图以前，先对方程进行讨论，了解曲线的特殊点（如与坐标轴的交点，极值点，拐点等）、对称性和范围（有界或无界，曲线无限伸展时是否逐渐接近于一直线——渐近线）等．关于对称性讨论如下：

在直角坐标系下，对于曲线的方程：$F(x, y)=0$，

若$F(x, -y)=F(x, y)$，则此曲线对称于$X$轴；

若$F(-x, y)=F(x, y)$，则此曲线对称于$Y$轴；

若$F(-x, -y)=F(x, y)$，则此曲线对称于原点．

**2．已知曲线，求它的方程．**

曲线可以看作是适合某种条件的点的集合（又称点的轨迹），这种条件是点在曲线上的充要条件或称为轨迹条件．显然曲线的方程也是一种形式的轨迹条件，其它形式的轨迹条件（如几何条件、物理条件等）则在建立了坐标系后，一般都可以用动点的坐标所适合的代数式子（通常是方程）来表达．因此已知曲线，求它的方程，就是在取定的坐标系下，将其它形式的轨迹条件用代数式子表达出来．只要这种“翻译”确切无误，代数式的化简过程在实数范围内又是同解变形，所求得的方程一般就是所要求的轨迹方程．而在可能破坏方程的同解性时，则应考虑坐标适合方程的点的集合与曲线上点的集合是否相等，避免轨迹残缺（不完备）或有瑕（不纯碎）．

**七、曲线的参数方程：**

对于选定的平面坐标系，如果坐标$(x, y)$为同一个变数$t$的函数

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

且坐标适合该方程的点的集合是某条曲线，就称这方程是该曲线的参数方程，变数$t$叫做参变数，简称参数。如能从参数方程中消去参数$t$，则可得曲线的普通方程$F(x,y)=0$。

八、求曲线$F_1(x,y)=0$与曲线$F_2(x, y)=0$的交点的坐标相当于求方程组$\begin{cases}F_1(x, y)=0\\F_2(x, y)=0\end{cases}$的实数解。显然方程$F_1(x, y)+\lambda F_2(x, y)=0$（$\lambda$可取任意实数）是表示经过这两曲线的交点的一系列曲线，称之为曲线系。

## 习 题 及 解 答

1．设$A$、$B$、$C$、$D$是同一条轴上的四个点，求证不论它们的位置怎样，都有 $AB+BC+CD+DA=0$的关系。

证法一：由沙尔定理知 $AB+BC=AC$,

$$AC+CD=AD,$$

$$AD+DA=0$$

故有， $AB+BC+CD+DA=0$。

证法二：设$O$为轴上原点，则 $AB=OB-OA$,

$BC=OC-OB$，$CD=OD-OC$，$DA=OA-OD$。

故， $AB+BC+CD+DA=0$。

证法三：设$A$、$B$、$C$、$D$四点在该轴上的坐标为$a$、$b$、$c$、$d$，则 $AB=b-a$，$BC=c-b$，$CD=d-c$，$DA=a-d$

故 $AB+BC+CD+DA=0$。

2．设$P$是$A$、$B$、$C$三点所在轴上的任意一点，求证 $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$。

证明：设$P$、$A$、$B$、$C$四点在该轴上的坐标分别为$p$、$a$、$b$、$c$，则

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB$$
$$= (a-p)(c-b)+(b-p)(a-c)+(c-p)(b-a)$$
$$= a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)-p[(c-b)+(a-c)$$
$$+(b-a)] = 0$$

**3**．设$P$是$A$、$B$、$C$三点所在轴上的任意一点，求 证：$PA^2 \cdot BC + PB^2 \cdot CA + PC^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0$.

证明：设$P$、$A$、$B$、$C$在该轴上的坐标为$p$、$a$、$b$、$c$则

$$PA^2 \cdot BC + PB^2 \cdot CA + PC^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB$$
$$= (a-p)^2(c-b)+(b-p)^2(a-c)+(c-p)^2(b-a)$$
$$+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$= (a-p)^2 \cdot (c-b)+(b-p)^2(a-c)$$
$$-(c-p)^2[(c-b)+(a-c)]+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$= (c-b)[(a-p)^2-(c-p)^2]$$
$$+(a-c)[(b-p)^2-(c-p)^2]+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$= (c-b)(a-c)(a+c-2p)+(a-c)(b-c)(b+c-2p)$$
$$+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$= (c-b)(a-c)(a-b)+(c-b)(a-c)(b-a) = 0.$$

**4．分别求点$(a,\ b)$关于$X$轴、$Y$轴、原点的对称 点的坐标。**

解　点$(a,\ b)$关于$X$轴的对称点坐标为$(a,\ -b)$，

关于$Y$轴的对称点坐标为$(-a,\ b)$，

关于原点的对称点坐标为$(-a,\ -b)$。

**5．已知点的直角坐标，求下列每两点间的距离：**

（1）　$(1,\ -2)$和$(-2,\ 2)$；

（2）　$(1,\ t)$和$(t^2,\ -t)$；

（3）　$(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1)$和$(\cos\theta_2,\ \sin\theta_2)$；

（4） $(at_1^2,\ 2at_1t_2)$和$(at_2^2,\ 0)$ $(a>0)$.

解 由两点间的距离公式，有

（1） $\sqrt{(1+2)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

（2） $\sqrt{(1-t^2)^2+(2t)^2}=\sqrt{(1-2t^2+t^4)+4t^2}=t^2+1$.

（3） $\sqrt{(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2}$

$$=\sqrt{\left(-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}$$

$$=2\left|\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|.$$

（4） $\sqrt{(at_1^2-at_2^2)^2+(2at_1t_2)^2}$

$$=\sqrt{a^2(t_1^4-2t_1^2t_2^2+t_2^4)+4a^2t_1^2t_2^2}$$

$$=a(t_1^2+t_2^2)$$

**6．直线上有三点$A$、$B$、$C$，另外有一点$D$不在直线上，求证：**

$$BC\cdot AD^2+CA\cdot BD^2+AB\cdot CD^2+BC\cdot CA\cdot AB=0$$

证明：从$D$向$A$、$B$、$C$所在直线引垂线，垂足为$O$；以$O$为坐标原点，$A$、$B$、$C$所在直线为$X$轴，其垂线为$Y$轴，建立平面直角坐标系。

设$A$、$B$、$C$、$D$四点的坐标分别为$(a,0)$、$(b,0)$、$(c,0)$、$(0,d)$，则有

$$BC\cdot AD^2+CA\cdot BD^2+AB\cdot CD^2+BC\cdot CA\cdot AB$$
$$=(c-b)(a^2+d^2)+(a-c)(b^2+d^2)+(b-a)(c^2+d^2)+(c-b)(a-c)(b-a)$$

$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$

$=0$.

7．已知两点$A(2,2)$和$B(5,-2)$，试在$X$轴上求一点$M$，使$\angle AMB$为直角。

解：设$M$点的坐标为$(x,0)$，

解法一：因$\angle AMB$为直角，知$\triangle AMB$为直角三角形，故$|MA|^2+|MB|^2=|AB|^2$，以两点间的距离公式代得

$$(x-2)^2+2^2+(x-5)^2+2^2=(5-2)^2+(-2-2)^2$$

故 $\quad (x-2)^2+(x-5)^2=17$

化简得 $\quad x^2-7x+6=0$

解得 $\quad x=1$ 或 $x=6$

故所求的点$M$为$(1,0)$或$(6,0)$

解法二：$\angle AMB$为直角，则$\triangle AMB$为直角三角形，因而斜边的中点到三顶点等距。

由中点公式，知$AB$的中点$C$的坐标：

$$x_C=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2},\quad y_C=\frac{2+(-2)}{2}=0$$

故 $\quad C\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$.

又由$|CM|=|CA|$

故 $$\left|\frac{7}{2}-x\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-2\right)^2+2^2}$$

即 $$\left|\frac{7}{2}-x\right|=\frac{5}{2}$$

解得 $\quad x=1$ 或 $x=6$.

故所求的点$M$为$(1,0)$或$(6,0)$

8．已知平行四边形$ABCD$的三个顶点：$A(4,-3)$、

$B(-3,-1)$、$C(-1,3)$，求与$B$相对的顶点$D$的坐标。

**解**：设$D$点坐标为$(x,y)$，因$ABCD$是平行四边形，对角线互相平分，故有

$$\frac{-3+x}{2}=\frac{4+(-1)}{2},\quad \frac{-1+y}{2}=\frac{3+(-3)}{2}$$

故　$x=6$，$y=1$。　　$D$点的坐标是$(6,1)$

9．试证：以$A(3,1)$，$B(6,4)$，$C(5,8)$，$D(2,5)$为顶点的四边形是平行四边形。

证法一：

$$|AB|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2},$$

$$|CD|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2},$$

$$|BC|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17},$$

$$|AD|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$$

故　$|AB|=|CD|$，　$|BC|=|AD|$

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形。

证法二：　$AB$的斜率$K_{AB}=\dfrac{4-1}{6-3}=1$，

$CD$的斜率$K_{CD}=\dfrac{5-8}{2-5}=1$，

$\therefore\quad AB\parallel CD$

又　$BC$的斜率$K_{BC}=\dfrac{8-4}{5-6}=-4$，

$AD$的斜率$K_{AD}=\dfrac{5-1}{2-3}=-4$，

$\therefore\quad BC\parallel AD$

因此四边形$ABCD$是平行四边形。

证法三：$AC$的中点为$G\left(\dfrac{3+5}{2},\ \dfrac{1+8}{2}\right)$即$G(4,\ 4.5)$，

$BD$ 的中点为 $G'\left(\frac{6+2}{2}, \frac{4+5}{2}\right)$ 即$G'(4, 4.5)$，故 $G$ 与$G'$重合，对角线$AC$与$BD$互相平分。

因此四边形$ABCD$是平行四边形。

10．已知三点$(-2,4)$，$(-3,1)$和$(1,2)$是三角形三条边的中点，求这三角形的三个顶点。

解：设三角形的三顶点$A$、$B$、$C$的坐标分别为

$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，$(x_3,y_3)$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2\\ \dfrac{x_2+x_3}{2}=-3\\ \dfrac{x_3+x_1}{2}=1\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y_1+y_2}{2}=4\\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=1\\ \dfrac{y_3+y_1}{2}=2\end{cases}$$

故 $x_1+x_2+x_3=-4$，　$y_1+y_2+y_3=7$

解得 $x_1=2$，　$x_2=-6$，　$x_3=0$

$y_1=5$，　$y_2=3$，　$y_3=-1$

所要求的三角形的三个顶点为

$(2,5)$，$(-6,3)$和$(0,-1)$。

11．三角形的两顶点为$P_1(3,7)$、$P_2(-2,5)$，试定第三顶点$P_3$，使三角形的两边$P_1P_3$和$P_2P_3$的中点在坐标轴上。

解：设第三顶点$P_3$的坐标为$(a,b)$，则$P_1P_3$的中点为 $D\left(\frac{3+a}{2}, \frac{7+b}{2}\right)$，$P_2P_3$的中点为$E\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{5+b}{2}\right)$。显然$D$、$E$两点不可能同时在$x$轴上或$y$轴上。

当$D$点在$x$轴上，$E$点在$y$轴上时，有

$\frac{7+b}{2}=0$，$\frac{-2+a}{2}=0$，得$a=2$，$b=-7$；

当$D$点在$y$轴上，$E$点在$x$轴上时，有

$$\frac{3+a}{2}=0，\frac{5+b}{2}=0\text{得}a=-3，b=-5。$$

因此第三顶点的坐标是$(2,-7)$或$(-3,-5)$。

12. 已知点$B$分有向线段$\overline{AC}$所成的比为$\lambda$，求：

(1)点$B$分$\overline{CA}$所成的比；　(2)点$C$分$\overline{AB}$所成的比；

(3)点$A$分$\overline{BC}$所成的比；　(4)点$C$分$\overline{BA}$所成的比；

(5)点$A$分$\overline{CB}$所成的比。

解：已知$\dfrac{AB}{BC}=\lambda$，　即$AB=\lambda BC$，

(1) $\dfrac{CB}{BA}=\dfrac{-BC}{-AB}=\dfrac{1}{\lambda}$；

(2) $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AB+BC}{-BC}=-\left(\dfrac{AB}{BC}+1\right)=-(\lambda+1)$；

(3) $\dfrac{BA}{AC}=\dfrac{-AB}{AB+BC}=\dfrac{-\lambda BC}{\lambda BC+BC}=\dfrac{-\lambda}{\lambda+1}$，

(4) $\dfrac{BC}{CA}=-\dfrac{BC}{AB+BC}=-\dfrac{1}{\lambda+1}$，

(5) $\dfrac{CA}{AB}=-\dfrac{AB+BC}{AB}=-\dfrac{\lambda+1}{\lambda}$.

13. 已知三角形的三个顶点$A(5,-1)$，$B(-1,7)$，$C(1,2)$，求$\angle A$的平分线的长。

解：设$\angle A$的平分线交$BC$于$D$. 则由初等几何中关于角的平分线分对边为两线段，与两邻边的长成比例的性质，可得

$$\frac{BD}{DC}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{\sqrt{(-1-5)^2+(7+1)^2}}{\sqrt{(1-5)^2+(2+1)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

故$D$点的坐标为

$$x_D=\frac{-1+2}{1+2}=\frac{1}{3},$$

$$y_D=\frac{7+2\times 2}{1+2}=\frac{11}{3},$$

即 $D\left(\frac{1}{3},\ \frac{11}{3}\right)$

故$\angle A$的平分线的长

$$|AD|=\sqrt{\left(5-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{11}{3}\right)^2}=\frac{14}{3}\sqrt{2}.$$

14. 设三角形三个顶点的坐标分别是$(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$, $(a\cos\theta_2,\ b\sin\theta_2)$, $(a\cos\theta_3,\ b\sin\theta_3)$，求证它的面积是

$$\left|2ab\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|$$

证明：所要求的面积

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1 & 1 \\ a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2 & 1 \\ a\cos\theta_3 & b\sin\theta_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值。}$$

$$S=\frac{1}{2}\left|ab\sin(\theta_2-\theta_1)+ab\sin(\theta_1-\theta_3)+ab\sin(\theta_3-\theta_2)\right|$$

$$=\left|ab\left(\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3-2\theta_1}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\ \cos\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right)\right|$$

$$=\left|2ab\sin\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|.$$

15. 已知四边形的四个顶点的坐标是(1,1),(3,4),(5,−2),(4,−7),求它的面积。

解：∵
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(4+5-6-20-3+2)$$
$$=-9$$
又
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & -2 & 1\\ 4 & -7 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-2+4-35+8+7-5)$$
$$=-\frac{23}{2}$$
且均为负．故四边形的面积为
$$\left|-9-\frac{23}{2}\right|=\frac{41}{2}.$$

顺便指出，已知$n$边形的$n$个顶点的坐标依次为$(x_1, y_1)$、$(x_2, y_2)$、……$(x_n, y_n)$，则此$n$边形的(有向)面积$S$类似上法计算较繁，为简捷起见，可将坐标排成便于记忆和计算的二行式：
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\cdots\cdots x_n & x_1\\ y_1 & y_2\cdots\cdots y_n & y_1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+\cdots+x_ny_1-x_2y_1-x_3y_2-\cdots x_1y_n)$$
而用类似二阶行列式的方法进行计算。
对于本题有
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & 4 & 1\\ 1 & 4 & -2 & -7 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\left(4-6-35+4-3-20+8+7\right)$$
$$=-\frac{41}{2}.$$

16. 已知各点的直角坐标如下，求它们的极坐标：

$A(1, -\sqrt{3})$；$B(0, -3)$；

$C(4, -4\sqrt{3})$；$D(3, 4)$。

解：$A(1, -\sqrt{3})$：

$\rho=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，$\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{3}$，

又点$A$位于第四象限

∴点$A$的极坐标是$\left(2, -\dfrac{\pi}{3}\right)$；

$B(0, -3)$：

∵$\rho=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$，

$x=0$，　$y=-3<0$

故可取$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，点$B$的极坐标是$\left(3, \dfrac{3\pi}{2}\right)$；

$C(4, -4\sqrt{3})$：

∵$\rho=\sqrt{4^2+(-4\sqrt{3})^2}=8$

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{-4\sqrt{3}}{4}=-\sqrt{3}$

又点$C$位于第四象限，故可取 $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ ∴ $C\left(8, -\dfrac{\pi}{3}\right)$；

$D(3, 4)$：

∵　$\rho=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{4}{3}$

又点$D$位于第一象限，故可取

$\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$　　∴ $D\left(5, \operatorname{arc\,tg}\dfrac{4}{3}\right)$

17. 已知各点的极坐标如下，求它们的直角坐标：