

高中三角学

## 編輯要旨

以教育部頒布的高中普通科課程標準爲依據，適當教材，和本局出版的新課程標準適用初中程度緊相銜接，極適合高中之用。

共分七章，148頁，內有習題三六，按教育部課程教授三角時間，約共有50小時之譜；每小時約授3習題二次，足資練習。

書依據學習心理，排列教材，由淺入深，並將互相關集於一處，反復申說，使學生的注意集中，增加練習，達到純熟的目標。

書第一章論銳角三角函數的應用，將初中已習的，加以系統的複習，并爲全書作一總綱，以後六章，共二、三兩章，研究廣義的三角函數，討論其性質以及化，是爲三角學的基礎，第四、五兩章，詳述三角形性應用問題，以明三角學的效用，第六、七兩章，以角的心、自弧度法入手，論及造表法、各表精密度，以及小算問題，是爲第六章，第七章則由函數值定角，以立

反函數的意義而論三角方程式的普遍解故全書以角,函數,三角形性質三基本事項,分成三單元,為中心編制,俾初學習畢後,對於三角學一科,易得一條理明晰的概念,并可了然於全部教材互相聯絡及闡發的關鍵。

5. 本書各習題,是書中極重要的一部份,選擇和分配,都經過慎重的考察,務使已習過的理論和方法,都在習題中遇着應用的機會,以為理解的幫助,各題均按難易次序排列,由淺入深,其中難題,可引起學生向上探求的興趣,養成自動研究的習慣。

6. 三角與代數,幾何等科,關係頗為密切,本書對各科聯絡的地方,極為注意,力求與本局出版的新課程標準高中幾何,高中代數等書,互相貫通,如第四章三角形性質中,論三角形各相關圓半徑公式,足為研究幾何的幫助,第三章中複角函數公式,多於習題中指示幾何的證法;其中論恆等式以及第七章論三角方程式,均可與代數恆等式方程式等問題比較,如此可助學生認識算學全體的和諧性,而易於融會。

7. 高一學生程度每不甚整齊,故本書編制,採取極有彈性的方法,如學生在初中時,不甚了解數值三角,則宜詳授第一章,而略去本書中附有星號各節,如此可省去全書五分之一,且均係較難部分的補充教材(即不在課程標準訂定各項

以內者),則學生自易了解,而全書不至有不及授完之虞.其補充教材,可指定班中程度優良學生,自行研習.如班中學生均甚優良,則第一章可作為初中數值三角的複習,而詳授附有星號的各部分或一部分.故程度較劣的學生,習本書尚可循序漸進,高材生仍有發展才力的機會,建立優良的進修基礎.

8. 三角式的變化(即恆等式推演)在高等算學中,應用甚大,而初學對此,每感困難.本書就三角函數獨立性,以揭示證法的主旨,并詳述各種基本證法,庶學生得明瞭本問題意義的所在,洞悉馭題的要領,不至有茫無頭緒的感想.

9. 反三角函數,也是初學極難了解的一部份,故列於最後一章,其中說理透澈,論證嚴謹,頗與一般坊本不同,讀者如能細心研習,大可助其精進.又本書除此一處外,編制次序,皆與江蘇省教育廳頒布的高中算學科進度表相同.如欲照該表教授,則只須將本書第六七兩章次序調換即可,對於教學上,毫無不便的地方.

10. 三角學的實際應用極廣,本書除第五章專論三角形解法和應用外,更於第一章第六章中,羅列許多相關的應用題,附以多數習題,以資練習.又因計算題繁而易誤,故詳述布算的方式和手續;并討論算表的精密程度的實際情形和其理論,以求學生有嫻熟整潔的計算技能,且知如何使結果精

密合度。

**11.** 三角計算，以對數為最要工具，故著者另編五位算學用表一冊，與本書相輔而行，以便檢查。又對數原理屬於代數範圍，插入正文中，恐妨教材的聯絡，故將對數原理和檢表方法，列於五位算學用表內，以作說明。教師可斟酌學生的需要，而定教學的方法。如因學生在初中學習過代數，已能熟嫻對數的計算，可就那表稍作練習後，即令其用對數解習題二中各題，否則應在習題一前講授三角函數表檢查法，習題二各題以用真數計算為宜。對數計算，可待至第五章內講授。

**12.** 三角函數造表法，原以用無窮連級數計算為便，但無窮連級數的斂散性，須學過高等代數的，方可明瞭。又展三角函數為連級數的方法，不但高一學生不易了解，且須先講過二項式定理與棣美弗(De Moivre)定理，涉及的問題太多，故本書改用辛普孫(Simpson)方法。這法雖非實際上所用，但在高一教授造表法的目標，不過是略示表的由來，並非要學生去自行造表。就這一方面看來，則辛氏方法較為適宜。

**13.** 三角級數，對初學頗難求其領悟，且為部頒課程標準所未載。本書不欲立異以為高，故未論及。

**14.** 本書編輯時，深得下列各書的幫助：

(1) Hobson: Plane Trigonometry.

(天)

- 
- (2) Hall and Knight: Elementary Trigonometry.  
(3) Lock and Child: A New Trigonometry.  
(4) Brink: Plane Trigonometry.  
(5) Granville: Plane Trigonometry.  
(6) Chauvenet: Plane and Spherical Trigonometry.  
(7) Todhunter: Plane Trigonometry.  
(8) Loney: Elements of Trigonometry.  
(9) C. Bourlet: Lecons de Trigonométrie rectiligne.  
(10) E. Borel: Trigonométrie, Second Cycle.  
(11) 武田建清: 三角問題解法及其着眼點.  
(12) 林鶴一: 三角方程式.  
(13) 長澤龜之助: 三角法辭典.  
(14) Chamber: Seven Figures Mathematical Tables.  
(15) Holman: Computation Rules and Logarithms.

又承友人李修陸先生等助編,并在南京市立第一中學、  
鍾英中學、匯文女中等校試教數次,合并附誌,以表謝忱。

15 本書每頁皆自成起訖,以便初學研閱。

16 本書問題另編有解答,但只能售與教師,購閱者須  
由校中正式具函證明,方可發售。

17 本書編時,雖曾參考名著多種并據友人在各校試

---

教的結果,加以改訂,始行付梓,但恐疵謬仍所不免,切盼海內方家,各校教師嚴加指正,以便隨時改正.如蒙賜教,請寄南京鍾英中學內中等算學研究會轉編者收,無任感謝.

民國二三年四月編者謹識,

時次國立中央大學算學系.

本書第一版中有錯誤若干則,承江菊人、范際平、張伯康、余子颺諸先生指出,得以改正,謹附誌以表謝意.

# 新課程標準適用高中三角學

## 目次

### 第一章

#### 銳角的三角函數和應用

1. 銳角的三角函數 (1)
2. 餘角的函數 (2)
3. 特殊角三角函數 (2)
- 習題一 (4)
4. 直角三角形解法 (5)
5. 等腰三角形解法 (6)
6. 正多角形解法 (6)
- 習題二 (7)
7. 俯角與仰角 (8)
8. 射影 (8)
9. 傾斜度 (9)
10. 線的距程與方位 (9)
11. 線段橫距與縱距,直程 (9)
- 習題三 (11)
12. 三角函數間的基本  
    關係 (14)

13. 簡易三角恆等式 (14)
14. 基本關係式的獨立性(16)
- 習題四 (16)
15. 以一三角函數表其餘  
    五函數法 (17)
16. 簡易三角方程式 (18)
17. 簡易三角方程式解法(18)
- 習題五 (20)
- 第一章摘要 (21)

### 第二章

#### 廣義角三角函數

18. 有向線段 (22)
19. 沙耳(Chales)定理 (22)
20. 角的產生 (23)
21. 廣義角與有向角 (23)
22. 角的標準位置 (24)
- 習題六 (25)
23. 平面上一點坐標 (25)



- |                            |                     |
|----------------------------|---------------------|
| 24. 廣義角三角函數 (25)           | 36. 正餘切的變值 (36)     |
| 25. 各象限內角諸函數值的號 (26)       | 37. 正餘割的變值 (37)     |
| 26. 已知一函數值, 求同角他函數值法 (27)  | 習題十 (38)            |
| 習題七 (28)                   | 38. 各函數變跡的直接作法 (38) |
| 27. 相關角 (29)               | 39. 三角函數的週期性 (41)   |
| 28. 相關角函數 (29)             | 習題十一 (41)           |
| 29. 號的決定 (30)              | 第二章摘要 (42)          |
| 習題八 (31)                   |                     |
| 30. 化任何角函數為銳角相當函數的又一法 (32) | <u>第三章</u>          |
| 31. 化為餘函數法的直接證明 (32)       | <u>三角恆等式</u>        |
| 32. 負角的各函數 (33)            | 40. 恆等式證明 (43)      |
| 33. 化角法公式的普遍性 (34)         | 41. 恆等式又一證法 (45)    |
| 習題九 (34)                   | 42. 雜例 (45)         |
| 34. 三角函數的變值和變跡 (35)        | 習題十二 (46)           |
| 35. 正弦餘弦的變值 (35)           | 43. 和較公式 (47)       |
|                            | 44. 兩銳角和的正餘弦 (47)   |
|                            | 45. 兩銳角差的正餘弦 (48)   |
|                            | 習題十三 (49)           |
|                            | 46. 有向線段射影 (49)     |
|                            | 47. 射影定理 (50)       |

48. 和較公式的普遍性 (51)	第四章
習題十四 (52)	三角形性質
49. 兩角和差的正餘切 (53)	63. 邊角間關係 (67)
50. 倍角公式 (53)	64. 正弦定律 (67)
51. 半角公式 (54)	65. 餘弦定律 (68)
52. 非單角函數的恆等式(54)	66. 邊角關係式的獨立性(69)
53. 特殊角的函數 (56)	習題十八 (70)
習題十五 (56)	67. 以三邊表各角正弦 (71)
54. 化和爲積法 (58)	68. 三角形解法 (71)
55. 化積爲和法 (59)	69. 外接圓半徑 (72)
56. 和積式變化雜例 (59)	70. 三角形面積 (72)
習題十六 (60)	71. 三角形各高 (73)
57. 補助角 (61)	習題十九 (73)
58. 化 $x=a\pm b$ 爲積 (61)	72. 以面積表外接圓半徑(74)
59. 化 $x=\sqrt{a^2\pm b^2}$ 爲積 (62)	73. 內切圓半徑 (74)
60. 化 $x=asin\alpha\pm bcos\alpha$ 爲積 (62)	74. 內切圓半徑的又一公
61. 特殊關係角的恆等式(62)	式 (74)
62. 三角等式的推演 (64)	75. 外接內切二圓半徑關
習題十七 (65)	係 (74)
第三章摘要 (66)	76. 旁切圓半徑 (75)

- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| 77. 旁切圓半徑的又一公式 (75)    | 87. 疑款解法公式 (88)      |
|                        | 習題二十三 (91)           |
| 78. 外接旁切諸圓半徑關係 (76)    | 88. 正切定律 (92)        |
| 79. 諸切圓半徑與一角和三邊關係 (76) | 89. 正切定律的應用 (92)     |
| 習題二十 (77)              | 90. 用補助角法 (93)       |
| 80. 外接內切圓心距離 (77)      | 習題二十四 (94)           |
| 81. 外接旁切圓心距離 (78)      | 91. 已知三邊的情形 (95)     |
| 82. 旁心三角形 (78)         | 92. 已知三邊情形的討論 (97)   |
| 83. 四邊形面積 (79)         | 93. 解法與核算 (97)       |
| 習題二十一 (80)             | 習題二十五 (97)           |
| 第四章摘要 (82)             | 94. 高與距離的測量 (99)     |
|                        | 95. 在同一平面內的測量問題 (99) |
|                        | 96. 不在同一平面內的測量 (100) |
|                        | 97. 求二不可達點間的距離 (100) |
|                        | 98. 測量問題雜例 (101)     |
|                        | 習題二十六 (102)          |
|                        | 99. 航海應用問題 (104)     |

### 第五章

#### 三角形解法及應用問題

- |                      |  |
|----------------------|--|
| 84. 對數解法 (83)        |  |
| 85. 已知一邊與任兩角的情形 (84) |  |
| 習題二十二 (85)           |  |
| 86. 疑款 (86)          |  |

100. 平行航海	(104)	112. 近於 $0^\circ$ 或 $90^\circ$ 的角	
101. 平面航海	(105)	的函數	(121)
102. 中緯航海	(106)	習題三十	(121)
習題二十七	(107)	113. 論 <i>S. T.</i> 表	(122)
第五章摘要	(110)	114. 實際上的應用問題	(124)
<b>第六章</b>		115. 可望見的地平距離	
<u>弧度法 造表法略論</u>		與俯角	(125)
103. 弧度法	(111)	習題三十一	(126)
104. 度與弧度的換算	(112)	第六章摘要	(128)
105. 幾個重要角和函數		<b>第七章</b>	
關係	(112)	<u>反三角函數 三角方程式</u>	
106. 應用問題	(113)	116. 有等函數值的角	(129)
習題二十八	(114)	117. 已知函數值求作其	
107. 小角的正弦與正切	(115)	角的方法	(130)
108. 求 $\sin 1'$ 與 $\cos 1'$	(116)	習題三十二	(131)
109. <u>辛普孫 (Simpson)</u> 造表		118. 反三角函數	(132)
法	(117)	119. 反函數的限制	(133)
習題二十九	(118)	120. 主值	(133)
110. 推值法略論	(119)	121. 正反三角函數的相	
(天) 111. 各表精密度略論	(120)	消性	(134)

習題三十三	(134)	<b>127.</b> 特殊解法	(139)
<b>122.</b> 反函數關係式	(135)	<b>128.</b> 用輔助角法	(140)
<b>123.</b> 反三角函數關係式 的意義	(136)	習題三十五	(143)
<b>124.</b> 反函數雜例	(137)	<b>129.</b> 含反函數的方程式	(144)
習題三十四	(138)	<b>130.</b> 聯立三角方程式	(144)
<b>125.</b> 三角方程式	(138)	<b>131.</b> 消去法	(145)
<b>126.</b> 三角方程式解法通 則	(139)	習題三十六	(146)
		第七章摘要	(148)

# 新課程標準適用 高中三角學

## 第一章

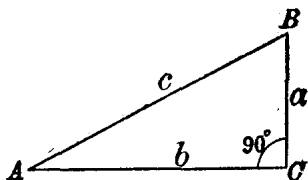
### 銳角的三角函數和應用

1. 銳角的三角函數 設直角三角形  $ABC$  中, 在  $C$  處的角爲直角(記爲  $rt.\angle$ ), 則在他二角都是銳角. 今以  $a, b, c$  記  $\angle A, \angle B, \angle C$  各角對邊, 則得定義如下:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \csc A = \frac{c}{a},$$

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \sec A = \frac{c}{b},$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{b}{a},$$



這六個比值, 叫做  $\angle A$  的三角函數, 注意上列六函數中, 同一橫列者, 兩兩互爲逆數.

註  $\sin, \cos$  等依次爲 *sine, cosine, tangent, cosecant, secant, cotangent* 的簡寫, 譯名各爲 正弦, 餘弦, 正切, 餘割, 正割, 餘切, 在此須緊記上面各式左端, 是一整個符號, 并非  $\sin$  乘  $A$  等的意思.

注意 因直角三角形中, 弦爲最長邊, 故可知這裏所說的六函數中正餘弦的值必小於 1, 正餘割值必大於 1, 而正餘切值, 則可以任意.

一銳角與其各函數值,可由三角函數表\*互求.

2. 餘角的函數 直角三角形中,二銳角互為餘角.按上節所述定義,即可知

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A, \quad \cos B = \frac{a}{c} = \sin A$$

即  $\sin(90^\circ - A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A.$

同理  $\tan(90^\circ - A) = \cot A, \quad \cot(90^\circ - A) = \tan A.$

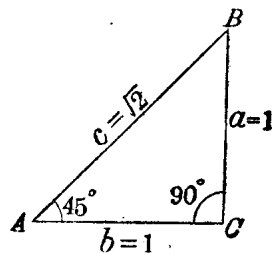
$$\sec(90^\circ - A) = \csc A, \quad \csc(90^\circ - A) = \sec A.$$

所以一銳角餘角的三角函數,等於其相當餘函數.這理即餘弦等函數命名的原因.

3. 特殊角三角函數 在一般情形,銳角的三角函數,多不能由加,減,乘,除及開方算出,我們只能查表得其準到幾位小數的差近值.這種表的造法,容後述及.今先按幾何學的理,求能以有理數或根數表示的幾種特殊角三角函數值.

(一) 45°的三角函數 作一等腰直角三角形ABC,則 $a=b$ ;更設其長為單位,則按畢氏(Pythagoras)定理.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



\*銳角與其各函數值互求法,已在初中數值三角裏講過.初學如尚未十分熟爛,可就本書所附五位三角函數表,畧予指示.

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \csc 45^\circ = \frac{c}{a} = \sqrt{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sec 45^\circ = \frac{c}{b} = \sqrt{2},$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{b} = 1, \quad \cot 45^\circ = \frac{b}{a} = 1.$$

(二)  $30^\circ$  和  $60^\circ$  的三角函數

作等邊三角形  $ABD$ , 使各邊長為 2 單位, 自  $B$  作  $AD$  的垂線  $BC$ , 則按幾何學易知在直角三角形  $ABC$  中,

$$\angle A = 60^\circ, \quad \angle B = 30^\circ,$$

$$c = 2, \quad b = 1,$$

且  $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ , 故

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

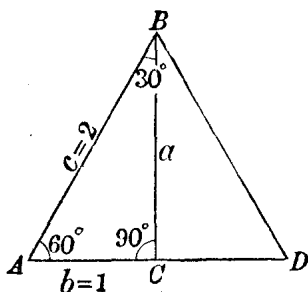
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

註 其餘三個函數值, 不難自求。

為便於記憶起見, 可將上面所得結果, 列為下表:

$A$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin A$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos A$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
$\tan A$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

注意 第一橫列各根號內數, 依次為 1, 2, 3; 第二橫列反之; 以第二橫列內數除第一橫列內相當數, 則得第三橫列各數。





## 習題一

求下列各角的正弦、餘弦、正切、餘切諸函數值：

1.  $14^{\circ}43'$ .      2.  $51^{\circ}46'$ .      3.  $44^{\circ}26'$ .  
 4.  $31^{\circ}59'$ .      5.  $58^{\circ}17'$ .      6.  $74^{\circ}32'$ .  
 7.  $41^{\circ}1'$ .      8.  $8^{\circ}6'$ .      9.  $35^{\circ}55'$ .

已知下列各函數值，求  $\angle A$ ：

10.  $\sin A = 0.67666$ .      11.  $\cos A = 0.74002$ .  
 12.  $\tan A = 0.18895$ .      13.  $\cot A = 0.78269$ .  
 14.  $\sin A = 0.62083$ .      15.  $\tan A = 1.8006$ .  
 16.  $\cot A = 40.436$ .      17.  $\cos A = 0.00495$ .

18. 如何可以求已知角的正割和餘割？

19. 如何可由已知正割或餘割值求角？

20.  $\sin(A+B)$  與  $\sin A + \sin B$  是否相等？

$2\tan A$  等於  $\tan 2A$  麼？

已知直角三角形  $ABC$  中二邊的值如下，求  $\angle A$  的各三角函數：

21.  $a=8, b=15$ .      22.  $a=12, c=13$ .

23.  $c=m^2+n^2, b=m^2-n^2$ .

24. 設  $\angle A$  為銳角，而  $\sin A = \cos 4A$ ，求  $\angle A$ 。

求下列各式的數值 [式中  $\tan^3 45^{\circ}$  表  $(\tan 45^{\circ})^3$ ，餘倣此]：

25.  $\tan^3 45^{\circ} + 4\cos^3 60^{\circ}$       26.  $2\csc^2 45^{\circ} - 3\sec^2 30^{\circ}$ .

27.  $\cot 60^{\circ} \tan 30^{\circ} + \sec^2 45^{\circ}$ .      28.  $2\sin 30^{\circ} \cos 30^{\circ} \cot 60^{\circ}$ .

29.  $\cos 60^{\circ} - \tan^2 45^{\circ} + \frac{3}{4} \tan^3 30^{\circ} + \cos^2 30^{\circ} - \sin 30^{\circ}$ .