

专题技术译丛

ZHUANTI JISHU YICONG

有限元素法和复合材料



总第8期

长沙工学院资料室

一九七三年十二月

说 明

我院一〇一研究室的同志根据“洋为中用”的方针，结合科研工作的需要，在院资料室同志的大力协助下，翻译了若干篇有关的文章，现选出其中七篇编成一期。其中关于有限元素法的四篇，关于复合材料的三篇。仅供参考。

由于我们水平有限，时间较紧，对原文的理解可能不准确，文中有些技术用语也不够统一，请读者多提宝贵意见，希将对本译丛的意见和要求寄给我们，以便以后改正。

023/38

TB33/2

目 录

将矩阵位移法应用于旋转壳体的线性弹性分析.....	1
用直接刚度法计算轴对称壳体.....	16
混合有限元素分析——以轴对称结构为特例.....	30
有限元素法中合应力的计算.....	38
复合材料的强度特性.....	43
复合材料的结构性能.....	70
纤维增强塑料的力学性能.....	102

将矩阵位移法应用于旋转壳体的线性弹性分析

John H. Percy, Theodore H.H. Pian, Stanley Klein,
Dhirendra R. Navaratna

本文叙述矩阵位移法应用于迴转形壳体的线性弹性分析。该壳是以一组在节圆上相互连接的截头圆锥体做为计算模型。该论文中论证了利用该计算模型去处理非对称变形情况,同时指出如何才能将近似的质量矩阵和刚度矩阵合乎规则的推导出来;然后它们就能够用来同时解决静力学和动力学问题。采用 Pian[1]所推荐的程序将改善刚度矩阵近似程度对静力学分析结果的影响做了论证和讨论。介绍了几种形状壳体静力学分析的结果,并把它们和其他方法的解答做了比较。可以发现,利用适当数量的元素对承受轴对称和非对称载荷两种情况的迴转形壳体,该方法能提供准确的解答。

符 号

- $[B]$ = 关于某一元素联系 $\{q^i\}$ 或 $\{\dot{q}^i\}$ 和 $\{\alpha^i\}$ 或 $\{\dot{\alpha}^i\}$ 系数的矩阵
- E = 杨氏模数
- $[E]$ = 应力-应变关系式的系数矩阵, 方程(10)
- $\{F(t)\}$ = 作为时间函数的力的列向量
- $[K]$ = 某一结构的刚度矩阵
- $[L^i]$ = 在方程(12)中所采用的系数矩阵
- M = 每单位长度上的力矩
- $M_s, M_\theta, M_{s,\theta}$ = 壳体的应力力偶
- $[M]^i$ = 某一结构的质量矩阵
- $N_s, N_\theta, N_{s,\theta}$ = 壳体的应力合力
- P = 单位长度上的轴向力
- $[P]$ = 方程(23)中所采用的系数矩阵
- $Q, \bar{Q}'$ = 对于 A 谐波级数、 B 谐波级数的广义力
- R = 单位长度上的径向力
- S = 单位长度上的切向力
- T = 假定的速度场的元素的动能
- U = 假定的位移场的元素的应变能
- $[V]$ = 方程[21]中所采用的系数矩阵

- W = 机械功
 $[W']$ = 方程 (9) 中所采用的系数矩阵
 h = 壳厚
 $[j] = [K^*]$ 的修正矩阵
 $[K]$ = 某一元素的刚度矩阵 ($[K^*]$ = 近似的刚度矩阵)
 $[K'], [\bar{K}']$ = 谐波数 j^A, j^B 的元素刚度矩阵
 l = 某一结构元素的子午线长度
 $[m]$ = 某一元素的质量矩阵
 $[m']$ = 谐波数 $i (i \geq 1)$ 的元素质量矩阵
 $q_i^j, \bar{q}_i^j$ = 谐波数 j^A, j^B 的广义位移 i
 r = 径向坐标
 s = 子午线坐标
 u, v, w = 轴向的、切向的、径向的位移
 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ = 子午线的、切线的、法线的位移
 Z = 轴向坐标
 α_i^j = 方程 (8) 中所采用的系数
 $\bar{\alpha}_i^j$ = 方程 (20) 中所采用的系数
 α_{ij} = 方程 (17) 中所采用的系数
 β = 子午线的转角
 $\{\varepsilon\}$ = 壳体曲面某一点上的应变分量的列向量
 $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{s\theta}$ = 壳体曲面的应变
 $K_s, K_\theta, K_{s\theta}$ = 壳体曲面的曲率的变化
 ν = 波桑比
 φ = 子午线和轴线间的夹角 (锥之顶点上的半角)
 θ = 径向角, 坐标
 ρ = 密度
 $\{\sigma\}$ = 壳体曲面某一点上应力分量的列向量。
 上标
 j = 谐波数
 下标
 i = 广义坐标数
 p = 节点数

引 言

对于任意一个迴转形壳体, 振动模态和振动频率以及对冲击载荷的瞬态响应可以用有限数目的广义位移来表示壳体状态和解相应的运动方程, 即解

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

的方法来确定。方阵 $[M]$ 和 $[K]$ 分别是质量和刚度矩阵。列矢量 $\{F(t)\}$ 表示外加的广义力。解自然振动问题时， $\{F(t)\}$ 必须为零。列矢量 $\{q\}$ 和 $\{\ddot{q}\}$ 是广义位移和广义加速度。

对于这种分析法，结构的有限元素理想化模型需特别注意选择。这个连续系统用物理方法以有限数目的自由度来表示。形式上的间断没有出现特殊的困难。元素尺寸的选择完全可以是任意的。况且，用有限元素模型理想化的矩阵位移法可以作为直接计算刚度矩阵 $[K]$ 近似值的一个简单的和直接的方法而被采用。正如本文将要指出的，同样的计算程序能够用来推导 $[M]$ 矩阵的某一一致近似值。这里所叙述的文章涉及到迴转形薄壳的刚度矩阵和质量矩阵的计算。

矩阵位移法用于迴转形壳体分析，将截头锥体作为有限元素首先是由 Grafton 和 Stromel[2] 提出的，而 Lu, Penzien 和 Popov[3] 已经采用了相同的计算模型。因为截头锥体能保证圆周方向的连续性和轴对称性，所以它是合适的元素。在此我们进一步研究了锥体元素刚度矩阵的计算，并确定对改善元素刚度矩阵近似值的完全解的影响。论述了一个一致质量矩阵[4]的计算。详细地研究了该方法对迴转形壳体非对称变形的应用。

结构的计算模型

一个完整的壳体被理想化为一组在节圆上相互连在一起的截头锥体，这些节圆位于壳体曲面上。它的性态是用这些节圆的位移来表征，而节圆是用有限数目的位移变量或广义位移来描述的。分析时采用了圆柱坐标系，即采用了轴向距离 z ，经度角 θ ，和径向距离 r 。对这个次序来说，该坐标系是右旋的。图1绘出了计算模型。在 z, r 上，

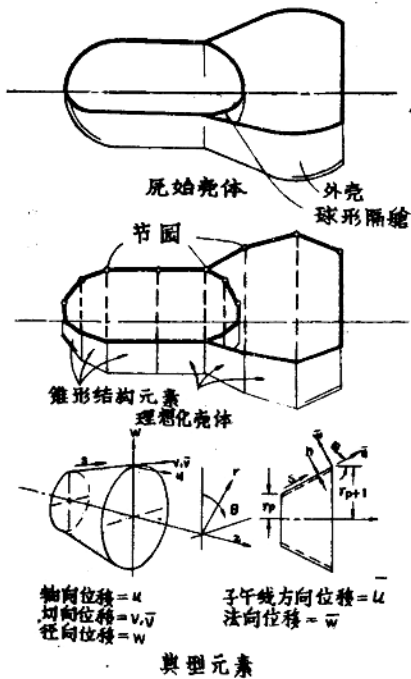


图 1 分析迴转形壳体所采用的计算模型图

节环的广义位移是作为 θ 的函数 u, v, w 和 β 的有限傅里叶 (Fourier) 级数各项的系数, 其中 u, v 和 w 是节圆某点上的轴向, 切向和径向位移, 而 β 是通过该点的壳体曲面上的子午线在包含壳体轴线的平面内的转角。在节点 P 处, 我们特别写成

$$\left. \begin{aligned} u_P(\theta) &= q_{4P-3}^0 + \sum_{j=1}^m q_{4P-3}^j \cos j\theta + \sum_{j=1}^m \bar{q}_{4P-3}^j \sin j\theta \\ v_P(\theta) &= q_{4P-2}^0 + \sum_{j=1}^m q_{4P-2}^j \sin j\theta + \sum_{j=1}^m q_{4P-2}^{-j} \cos j\theta \\ w_P(\theta) &= q_{4P-1}^0 + \sum_{j=1}^m q_{4P-1}^j \cos j\theta + \sum_{j=1}^m q_{4P-1}^{-j} \sin j\theta \\ \beta_P(\theta) &= q_{4P}^0 + \sum_{j=1}^m q_{4P}^j \cos j\theta + \sum_{j=1}^m q_{4P}^{-j} \sin j\theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这些表达式中的系数 q 是节点 P 的广义位移。 q 的上标表谐波数; 无一横的 q 是 A 级数, 有一横的 q 是 B 级数。

相应的广义力可以具体化为作用在节圆上的线载荷的形式, 我们写成

$$\left. \begin{aligned} \pi r_P P_P(\theta) &= \frac{1}{2} Q_{4P-3}^0 + \sum_{j=1}^m Q_{4P-3}^j \cos j\theta + \sum_{j=1}^m \bar{Q}_{4P-3}^j \sin j\theta \\ \pi r_P S_P(\theta) &= \frac{1}{2} Q_{4P-2}^0 + \sum_{j=1}^m Q_{4P-2}^j \sin j\theta + \sum_{j=1}^m \bar{Q}_{4P-2}^j \cos j\theta \\ \pi r_P R_P(\theta) &= \frac{1}{2} Q_{4P-1}^0 + \sum_{j=1}^m Q_{4P-1}^j \cos j\theta + \sum_{j=1}^m \bar{Q}_{4P-1}^j \sin j\theta \\ \pi r_P M_P(\theta) &= \frac{1}{2} Q_{4P}^0 + \sum_{j=1}^m Q_{4P}^j \cos j\theta + \sum_{j=1}^m \bar{Q}_{4P}^j \sin j\theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $Q, \bar{Q}$ 是相对于 $q, \bar{q}$ 的广义力; r_P 是第 P 个节圆处的半径; P, S 和 R 分别是单位长度上的外加的轴向, 切向和径向载荷; M 是作用在单位长度上的子午线力偶。(M 的向量在节圆平面内切于节圆)。

位移 u, v 和 w 在 z, θ 和 r 正方向为正。如果位移 β 与沿子午线的 $\partial w / \partial z$ 的正值相对应, 则为正。如果力 P, S, R , 和 M 沿着 u, v, w 和 β 的正值移动时作正功, 则是正的。

将发现, 由于已经确定了广义力, 因此这些力在增量位移 ($du, dv, dw, d\beta$) 上所作的总功相应的为

$$dW = \sum_i \left\{ Q_i^0 dq_i^0 + \sum_{j=1}^m Q_i^j dq_i^j + \sum_{j=1}^m \bar{Q}_i^j d\bar{q}_i^j \right\} \quad (4)$$

广义位移可以被认为是独立的变量, 利用它分析就完成了。壳体的性态用这些位移表征。假如它们有 n 个节点, 所用的最高谐波数是 m , 我们则可以说该系统具有 $(8mn \times 4n)$ 个自由度。

两个相邻的节圆之间, 壳体是用锥形元素表示的。如果我们能够写出两个节圆的广义力和广义位移之间的线性关系式, 则元素的弹性性态就足够完全地被描述出来。我们应该确定元素的刚度矩阵 $[K]$, 为此我们暂时假定, 只考虑由节点 1 和 2 所分界的元素, 则得到

$$\begin{aligned} & \{Q_1^0, Q_2^0 \dots Q_7^0 Q_8^0, Q_1^1, Q_2^1 \dots Q_7^1 Q_8^1, \bar{Q}_1^1, \bar{Q}_2^1 \dots \\ & \bar{Q}_7^1, \bar{Q}_8^1\} = [K]_{N \times N} \{q_1^0, q_2^0 \dots q_7^0, q_8^0, q_1^1, q_2^1 \dots \\ & q_7^1, q_8^1, \bar{q}_1^1, \bar{q}_2^1 \dots \bar{q}_7^1, \bar{q}_8^1\} \quad N = 16m + 8. \end{aligned} \quad (5)$$

由方程(5)表达的联立方程组在谐波数上是独立无关的。如果我们现在用 $q^j, \bar{q}^j, Q^j$, $\bar{Q}^j$ 表示第 j 个谐波的全部广义位移和广义力的 (8×1) 的列向量, 于是我们可以把方程(5)改写为

$$\begin{pmatrix} Q^0 \\ Q^1 \\ \bar{Q}^1 \\ \vdots \\ Q^m \\ \bar{Q}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0^m \\ 0 & k^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{k}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ \bar{q}^1 \\ \vdots \\ q^m \\ \bar{q}^m \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 $[k^j]$ 是级数 A 的一个 8×8 的对称的元素刚度矩阵, $[\bar{k}^j]$ 是级数 B 的, 而所有对角线以外的区格是零场。将每个元素的刚度矩阵 $[k]$ 叠加获得整个结构的刚度矩阵 $[K]$ 。

元素刚度矩阵

为求 $[k]$ 我们采用近似法。对元素我们假定某一个位移场, 并用广义(边界)位移即 $\{q\}$ 来表示这个场。对于一个薄壳锥体来说, 可以用应变一位移关系和应力一位移关系去表示壳体的总应变能 V , 总应变能 U 与作为广义位移函数的假定的位移场相对应。则我们可以写

$$[k] = \{\partial / \partial q_j\}_1 \partial U / \partial q_j \quad (7)$$

对于谐波数为 jA 的这个元素, 首先假定下列的位移场来计算刚度矩阵的近似值:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^j &= (\alpha_1^j + \alpha_2^j s) \cos j\theta \\ \bar{v}^j &= (\alpha_3^j + \alpha_4^j s) \sin j\theta \\ \bar{w}^j &= (\alpha_5^j + \alpha_6^j s + \alpha_7^j s^2 + \alpha_8^j s^3) \cos j\theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对于谐波数为 $j\beta$ 的元素, 假定同样形式的位移场, 并以 $\sin j\theta$ 代替 $\cos j\theta$, 以 $\cos j\theta$ 代替 $\sin j\theta$ 。位移分量 $\bar{u}^j, \bar{v}^j$, 和 $\bar{w}^j$ 在此是沿着子午线, 沿着经向圆的切线和垂直于壳体曲面的法线来度量的。沿着子午线的距离是坐标 s 。

如果位移的这些量值代入一个薄锥壳的应变一位移关系式中(见附录), 我们得到一个关于元件内应变和系数 $\{\alpha^j\}$ 的方程式。把这些方程表成矩阵的形式(对于谐波数 jA)

$$\{e^j\} = [W^j] \{\alpha^j\} \quad (9)$$

其中系数 $[W^j]$ 是 s 和 θ 的函数。

我们写出应力一位移关系式(见附录)

$$\{\sigma^j\} = [E] \{e^j\} \quad (10)$$

因此, 以假定的形式变形的总应变能(谐波数为 jA)是

$$U^i = \frac{1}{2} \int_A [\alpha^i] [W^i]^T [E] [W^i] \{\alpha^i\} dA \quad (11)$$

我们引入符号

$$[L^i] = \int_A [W^i]^T [E] [W^i] dA \quad (12)$$

并且, 由于对给定的元素系数 $\{\alpha^i\}$ 没有变化, 则得出

$$U^i = \frac{1}{2} [\alpha^i] [L^i] \{\alpha^i\} \quad (13)$$

广义位移 $\{q^i\}$ 是元素两端 u^i, v^i, w^i 和 β^i 的幅度, 我们可以用简单的坐标变换依次借助于 $\bar{u}^i, \bar{v}^i, \bar{w}^i$ 和 $\bar{\beta}^i$ 的幅度来表示。于是我们能够写成

$$\{q^i\} = [B] \{\alpha^i\} \quad (14)$$

其中 $[B]$ 是坐标变换矩阵和方程 (8) 中代入 s 的节点值所得矩阵的乘积。以后从方程 (13, 14 和 7), 我们则获得

$$[k^i] = [B^{-1}]^T [L^i] [B^{-1}] \quad (15)$$

$[L^i]$ 所要求的积分, 原则上可以解析地完成, 而系数 $[k^i]$ 作为元素几何图形及其弹性特性的函数表成明显的形式。Grafton 和 Strome 牺牲一个一致性的结论, 引进一个进一步的近似获得了这个积分; 即全部积分可以用“梯形法则”近似地计算, 即

$$\int_{s_1}^{s_2} f(s) ds = \frac{s_2 - s_1}{2} [f(s_2) + f(s_1)] \quad (16)$$

为各种目的推导出 $[k^0]$ 的满意的近似值是由参考文献 2 所提供的实例确定了。然而, 我们认为, 如果利用改进了的 $[k^i]$ 值, 并允许用较少的结构元素获得解的同样的精确性, 则可达到精确性和计算能力两者之间的较好权衡。

把刚度系数表成显式, 实现 $[k^i]$ 的完全解析的计算是不方便的。宁愿解析地完成矩阵的乘积 $[W^i]^T [E] [W^i]$, 并借助于计算程序完成积分, 逐项的形成 $[L^i]$ 矩阵。因为 $[B]$ 矩阵为已知, 从方程 (15) 推出 $[k^i]$ 。在矩阵 $[L^i]$ 中的某些积分用数字积分法计算, 因为它的解析式处于病态条件。在附录中给出了 $[W^i]$, $[E]$ 和 $[B]$ 矩阵。

如果不改变计算 $[k]$ 的这种型式, 用改进原始位移函数的方法可对其精确性作进一步的改进。在 Pian^[1] 的笔记中叙述了一种可以作到这一点的一个较好的方法。关于迴转形壳体分析的这一方法的效能的研究对于自由扭转的轴对称载荷的特殊情况是处理了。因为 $\bar{v}^i$ 处为零, 在这种情况下的假定位移场仅仅有 $\bar{u}^0$ 和 $\bar{w}^0$ 项。则

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}^0 &= \alpha_{11} + \alpha_{12}s + \alpha_{13}s^2 + \alpha_{14}s^3 + \dots \\ \bar{w}^0 &= \alpha_{21} + \alpha_{22}s + \alpha_{23}s^2 + \alpha_{24}s^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

与方程 (8) 类似, 我们把 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}$ 和 α_{24} 选作六个基本的系数。在参考文献 1 和 5 中指出, 假如包含较多的项, 则最小位能原理可以用来使它们的值变为最佳值, 并且可以导出一个修正矩阵 $[j]$, 将

$$[k] = [k^*] + [j] \quad (18)$$

当作比 $[k^*]$ 更近似的刚度矩阵给出, 其中后者 (k^*) 是由基本的六项位移假设中一致导出的值, 对于一些实例, 已经作到了这一点, 并在下一节提供了这些结果。应当注意, 当足够数的项被用于假设的位移场时, 矩阵 $[K]$ 应该收敛为正确解。在零次谐波的

情况下,这个方法将导致参考文献3中所获得的解。

元素的质量矩阵

为了确定质量矩阵,我们假定一个元素的速度场,并用广义(边界)速度,即 $\{\dot{q}\}$ 来表示它。因此,对应于该速度场的壳体的总动能 T 可以表示为广义速度的函数。我们则可以写为

$$[m] = \{\partial/\partial \dot{q}\} [\partial T/\partial \dot{q}] \quad (19)$$

与近似的元素刚度矩阵一致的近似质量矩阵可利用相同的位移函数,然而,这时是指关于速度的[4]。对于谐波数为 jA 的,我们现在取

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}^j &= (\dot{\alpha}_1^j + \dot{\alpha}_2^j S) \cos j\theta \\ \dot{v}^j &= (\dot{\alpha}_3^j + \dot{\alpha}_4^j S) \sin j\theta \\ \dot{w}^j &= (\dot{\alpha}_5^j + \dot{\alpha}_6^j S + \dot{\alpha}_7^j S^2 + \dot{\alpha}_8^j S^3) \cos j\theta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

对于谐波数为 jB 的用 $\sin j\theta$ 代替 $\cos j\theta$, $\cos j\theta$ 代替 $\sin j\theta$ 取为相同的值(与方程(8)相比较)。

对在元素上移动的动能进行积分,计算出运动壳体曲面的动能。假如我们写出

$$\int_0^{2\pi} \{(\dot{u}^j)^2 + (\dot{v}^j)^2 + (\dot{w}^j)^2\} r d\theta = \pi [\dot{\alpha}^j] [V] \{\dot{\alpha}^j\} \quad (21)$$

那么以假定的方法(谐波数 jA)变形的某一元素的动能是

$$T^j = \frac{\pi \rho h}{2} \int_s [\dot{\alpha}^j] [V] \{\dot{\alpha}^j\} ds \quad (22)$$

其中 ρ 是质量密度, h 是壳元素的厚度。我们引入符号

$$[P] = \int_s [V] ds$$

则和方程(13)类似,对除零以外的任何谐波数

$$T^j = (\pi \rho h/2) [\dot{\alpha}^j] [P] \{\dot{\alpha}^j\} \quad (23)$$

系数 $\{\dot{\alpha}^j\}$ 和广义速度 $\{\dot{q}\}$ 的关系,鉴于方程(8)和(20)由方程(14)得到

$$\{\dot{q}^j\} = [\beta] \{\dot{\alpha}^j\} \quad (24)$$

这样一来,从(24)和(19)则有

$$[m^j] = \pi \rho h [B^{-1}]^T [P] [B^{-1}] \quad (25)$$

它表示出; $[P]$ 中所需的全部积分也是 $[L]$ 中所需要的,这就减轻了计算负担。然而与 $[L]$ 不同,当 $j \geq 1$ 时, $[P]$ 与 j 无关,用每个系数乘上2就简单地获得 $j=0$ 时的形式,这是因为对方程(21)所确定的 $[V]$ 来说

$$\int_0^{2\pi} \{(\dot{u}^0)^2 + (\dot{v}^0)^2 + (\dot{w}^0)^2\} r d\theta = 2\pi [\dot{\alpha}^0] [V] \{\dot{\alpha}^0\} \quad (26)$$

这样一来,质量矩阵只计算一次;这样的量值适用于所有的谐波。 $[V]$ 矩阵列于附录上。将每个元素的质量矩阵 $[m]$ 相加获得整个结构的质量矩阵。

静力学分析程序

我们写成了一种称为 SABORIII 的计算程序, 这种程序把矩阵位移法用于旋转薄壳的静力学分析。它利用前面已经叙述的理想化模型。

该程序借助于节圆坐标和连接节圆的元素的特性(厚度, 密度, 杨氏模数和泊桑比)接受结构的一个叙述。程序将能计算出质量矩阵(除零谐波以外对所有的谐波数均相同, 对零谐波其值应该加一倍)和质量矩阵的逆矩阵。程序将分别对每个谐波计算出被约束结构的刚度矩阵和刚度矩阵的逆矩阵。程序同样可确定一个 K_R 矩阵, K_R 被乘上位移向量后它应该给出广义位移被限制处的反作用力。这些质量矩阵和刚度矩阵可以用作另外一些程序的输入以便确定结构的自然模态和自然频率, 或者确定结构对某一给定力系的瞬态响应。静力学分析问题是 SABORIII 本身解决的, 对于给定的外施广义力, 它依次地对每个谐波计算出位移, 反作用力和壳体应力合力。在参考文献 6 中详细地叙述了这个程序。它是由只能处理轴对称变形的较早的 SABORI 发展而来的。该程序由于其简易性, 更适用于真实的结构, 因为允许附加刚度影响系数作为输入量, 被领受下来, 该系数可表示不能理想化为截头锥壳的结构的一部分。

计算出结构的位移以后, 该程序预算出每一个截头锥壳节圆上的壳体应力合力和应力力偶。直接应用锥壳元素的应力一位移关系式获得一些应力; 通过平衡方程获得另一些应力。

· 计 算 结 果

在图 2—5 上标出了利用 SABOR 程序分析几个不同形状壳体的结果。首先, 这些结果被提供来表示程序的能力及其精确性。所研究的课题是一端固定, 而另一端具有一个径向的环状载荷的圆筒(图 2); 承受各种不同谐波数的端部力矩载荷的圆筒

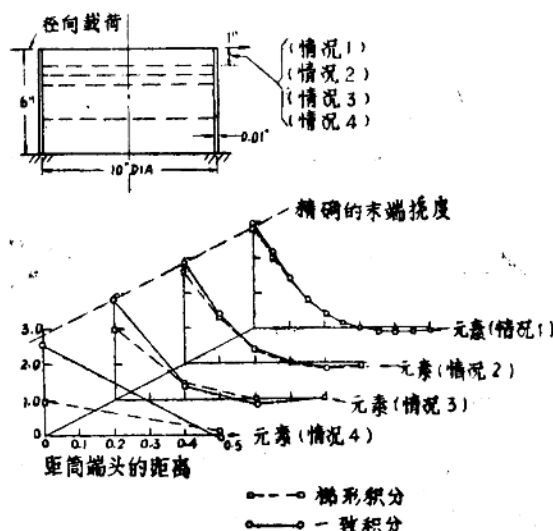


图 2 增加元素的数目对在径向载荷下的筒壳边缘区域位移的影响。

(图3); 端部固定, 在外压载荷作用下的球盖(图4)和在横向重力载荷作用下的筒支的抛物线壳体(图5)。

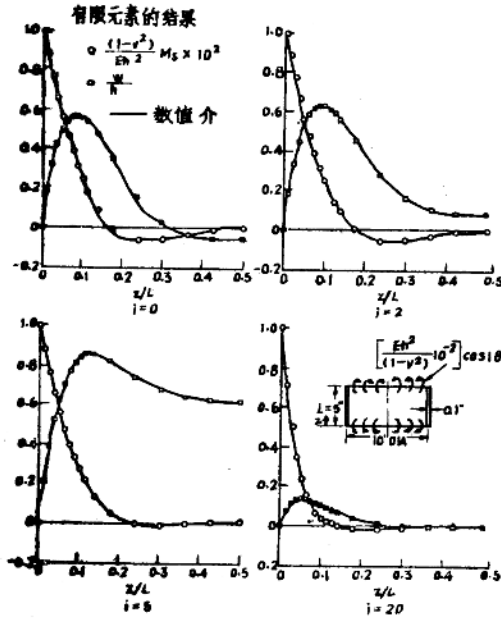


图3 在各种不同的边界弯矩的谐波作用下, 筒壳的这一有限元素解和解析解的比较, M_s = 子午线弯矩, w = 径向挠度。

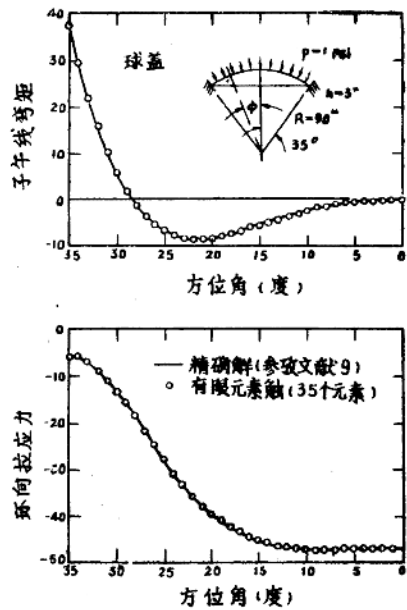
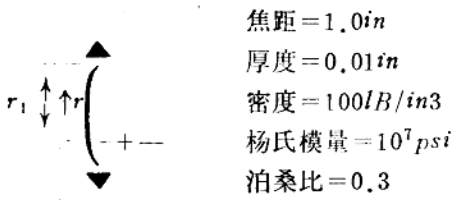


图4 在外压作用下球盖的有限元素解和精确解的比较。

在图2上离载荷端一吋的长度上使用各种数目的元素, 获得筒壳载荷边缘区域上的径向位移。利用一致积分法和梯形公式[方程(16)]所推导出的矩阵获得这些结果。很明显, 应用较少元素的前者(一致积分法)所计算的位移分布在一吋长度内比起应用较多元素的后者(梯形公式)所推出的位移分布更精确。

图3所作的计算仍然与薄壳方程的数值解相比较。这与由 Budiansky 和 Radkowski[8] 所做的实例中使用的例子相同。可以看出, 除第20次谐波以外, 两组结果之间具有良好的一致性。



第1种情况 $r_1 = 0.5 in$
筒支的
第2种情况 $r_1 = 2.0 in$
筒支的

- 0, □: 程序 SABOR Ⅱ 的解 (40 个元素)
- : Mar 和 Wan 的解 (参考文献 11)
- 第一种情况是用浅壳程序
- 第二种情况是用渐近积分程序

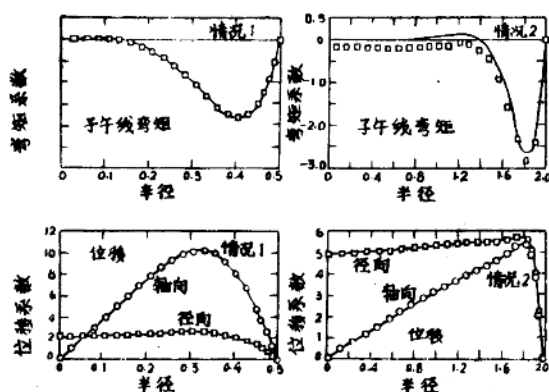


图 5 在横向重力载荷作用下的筒支抛物线壳体的结果。

图 4，对于一个承受均匀外压的，半角 35° 和 $R/h=30$ 的固持球壳来说，将其子午线向弯矩和环向拉应力的分布与利用超越几何级数的解所获得的精确解作比较。很明显，对于由 35 个 1° 的锥壳元素组成的该理想化壳体，其结果与精确解几乎完全一致。然而，应该注意，Popov, Penzien 和 Lu^[10] 对于 75° 半角， $R/h=200$ ，承受内压载荷的固持边界的球壳，已经得到了相类似的有限元素解。他们发现，在仅有薄膜作用的区域内利用有限元素法残余的子午线向弯矩是可能发生的。他们的研究表明，当元素尺寸减小时，这些误差的影响就变得较小。

图 5 比较了在横向重力载荷作用下抛物线壳体的有限元素解和用由 Mar 及 wan^[11] 所建立的抛物线壳体程序解的结果。对于较浅的壳（情况 1， $r_1=0.5$ ）40 个元素矩阵解可与浅壳程序作极好的比较。对于较深的壳（情况 2， $r_1=2.0$ ）合位移和渐近解极好的对应，但用矩阵解时将出现一个残余子午线弯矩。这仍然是 Popov, Penzien 和 Lu^[11] 已经指出过的现象。

用增加位移场多项近似式的阶数的方法来改进元素刚度矩阵的效果可通过比较结构计算中所使用的总刚度矩阵的结果而被看出来。图 6 提供了这样的结果，其中对图 2 中的筒壳载荷下的挠度是对下列位移场所画的：1) 六项， $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}$ 对于积分利用方程(16)；2) 具有相同系数和一致积分的六项；3) 还包括有 α_{25} 的七项；4) 又包括 α_{26} 的八项；5) 再包括 α_{27} 的九项；和 6) 包括 α_{13} 的十项。在更详细的报告中^[12]，我们也涉及到筒壳和锥壳元素刚度矩阵的比较。

讨 论

该方法为迴转形壳体的结构分析提供了一个简捷和有效的工具。由实例证明了该法的精确性与结构所划分的元素的数目和尺寸有关。用适当的元素数目可获得满意的精确度，例如对最多为 40 个元素的情况，图 5 所示的抛物线壳体得到足够好的阐述。

正如对待所有的有限元素分析那样，使用和 SABOR II 一样的程序所得的结果必须十分注意地加以说明。在节点处所计算的应力是针对理想化锥壳元素结构的。原始的速

续结构的应力和位移必须从这些结果中推出。这就需要良好的判断力，特别是在子午线方向任何具有意义的量为高梯度的地方。

在轴上的应力是不定的；正如可预料得到的那样，靠近轴处解析结果是不可靠的。在这个区域我们作了某种改进，即在该区域用一平板——该平板消去轴上的节点——代替封闭的圆锥（它的一个半径等于零）。这个结构元素具有一个节点和一个 4×4 的刚度矩阵。

在利用此法去获得承受分布载荷和压力载荷的壳体的解时，作了两个简单的假定。一系列的截头圆锥近似于壳体曲面，有限数的广义力近似于载荷，该力可想像成在节点上作用的力。对于沿边缘载荷的截头圆锥来说不管元素刚度矩阵如何精确，对原始壳体问题的解永远不可能精确；它不是原始的结构，而是解所针对的被模拟的结构。的确，可能是这样的，用一个近似的元素刚度矩阵比用精确的元素刚度矩阵更能获得对原始问题的较好的解答。对于边缘加载的锥壳的精确解包含着与节点相邻的强的弯曲效应的边缘区域，但是边缘区域即不存在于均匀加载的连续的原始结构中，也不存在于由简单假定的位移场强制光滑的 SABOR III 的近似解中。于是，例如，lu, Penzien 和 Popov[3] 采用的锥壳元素分析的精确度未必能导致整体结构的相应的精确解答，除非它仅仅是由圆锥和圆柱壳构成，并承受线载荷。事实上，根据 Areher，假如广义力是与假定的位移场一致的方式分配的，对于在分布载荷作用下的结构用矩阵位移法可以获得更精确的解。当对每个元素都应用简单的假定的位移场时，确定这样的广义力是相对容易的事情。

根据前一段的讨论，很清楚，对足够近似的刚度矩阵进行严格试验的试件是一个承受线载荷的筒壳。图 6 所示出的这种试件的试验结果表明，因为增加了位移函数的复杂性，迅速减少了转折。同时，在解中，一个有意义的改进可以用简单的增加元素数目的方法达到。（如果元素的尺寸仅仅在子午线方向高梯度的区域内减小，对在精确度上一个相应的改进来说元素数目的增加不必像这里所给出的例子中那样的多。）对于一个特殊的程序，在元素刚度矩阵中，最佳的近似程度将与许多因素有关；不仅要考虑计算时间，还要考虑到构成元素刚度矩阵子程序的投资。在本文我们不进一步研究这个问题。然而，我们的经验和这里提供的结果表明，对于一个像 SABOR III 那样的整体结构分析程序来说，选择简单的六项位移函数是一个良好的折衷方案。

在写 SABOR III 程序时，我们力图去验证方法并认识它的特征；我们已经排除了一些想望的工程特点，以便保持该程序不被细节弄糊涂。例如，把它限于单层的、局部的、各向异性壳体。然而对于多层正交异性壳体存在明显的实际兴趣。推广该程序去处理这

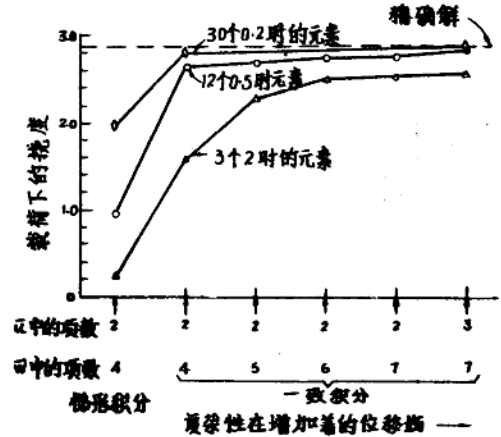


图 6 由不同的假设位移场推出的刚度矩阵所获得的筒壳的末端位移

种弹性壳体并不涉及新的原理, 假若正交异性体, 像壳体几何图形一样, 是轴对称的。计算受影响的部分将是壳体的应力—应变关系, 该应力—应变关系只影响到推导元素刚度矩阵中的 \$[L]\$ 矩阵的计算。应力—应变关系的修整是容易做到的, 在刚度矩阵计算中它们的地位是力学方面。

附 录

我们为参考起见, 引出了一些除细节以外的本文正文中所援引的方程和矩阵。
薄锥壳应变—位移关系式

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \partial \bar{u} / \partial s \\ \epsilon_\theta &= (1/r)(\partial \bar{u} / \partial \theta) + (\bar{u} \sin \phi / r) + (\bar{w} \cos \phi / r) \\ \epsilon_{s\theta} &= \frac{1}{2} \{ (1/r)(\partial \bar{u} / \partial \theta) + (\partial \bar{v} / \partial s) - (\bar{v} \sin \phi / r) \} \\ k_s &= -(\partial^2 \bar{w} / \partial s^2) \\ k_\theta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \\ k_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \phi}{r^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} - \frac{\bar{v} \sin \phi \cos \phi}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

其中 \$\epsilon_s, \epsilon_\theta\$ 和 \$\epsilon_{s\theta}\$ 是壳体曲面的正应变和切应变; \$K_s, K_\theta\$ 和 \$K_{s\theta}\$ 是壳体曲面的三个曲率改变量; 而 \$\phi\$ 是壳体子午线和轴线间的夹角 (在锥顶上是半角)

$$\begin{pmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} & \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} & \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh}{1+\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{s\theta} \\ k_s \\ k_\theta \\ k_{s\theta} \end{pmatrix} \quad (A2)$$

其中 \$N_s, N_\theta\$ 和 \$N_{s\theta}\$ 是应力合力; \$M_s, M_\theta\$ 和 \$M_{s\theta}\$ 是应力力偶; \$E\$ 是杨式模量; \$\nu\$ 是泊桑比; 而 \$h\$ 是壳厚。注意, 方程(11)中 \$[E]\$ 矩阵的表达式不同于上述方阵。为了与 \$\epsilon_{s\theta}\$ 和 \$K_{s\theta}\$ 的目前定义相一致, 元素 \$\frac{Eh}{(1+\nu)}\$ 和 \$\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\$ 必须乘上 2。

\$[W']\$ 矩阵 [参看方程(9)]

$$\begin{aligned} \{e_s^i e_b^j e_{s\theta}^k k_b^l k_{s\theta}^m\} &= [W^j] \{\alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k - \alpha_1^i\} \\ \{\bar{e}_s^i \bar{e}_b^j \bar{e}_{s\theta}^k \bar{k}_b^l \bar{k}_{s\theta}^m\} &= [\bar{W}^j] \{\bar{\alpha}_1^i \bar{\alpha}_2^j \bar{\alpha}_3^k - \bar{\alpha}_1^i\}. \end{aligned} \quad (A3)$$

其中 $[W^j]$ 可表示为

$$[W^j] = \begin{pmatrix} \cos j\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos j\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin j\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos j\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos j\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin j\theta \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin\phi}{r} & \frac{s\sin\phi}{r} & \frac{j}{r} & \frac{js}{r} & \frac{\cos\phi}{r} & \frac{s\cos\phi}{r} \\ -\frac{j}{2r} & -\frac{js}{2r} & -\frac{\sin\phi}{2r} & \frac{1}{2} - \frac{s\sin\phi}{2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{j\cos\phi}{r^2} & \frac{sj\cos\phi}{r^2} & \frac{j^2}{r^2} & -\frac{\sin\phi}{r} + \frac{js^2}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{s\sin\phi}{r^2} \right) \cos\phi & -\frac{js\sin\phi}{r^2} & -\frac{jss\sin\phi}{r^2} + \frac{j}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s^2\cos\phi}{r} & \frac{s^3\cos\phi}{r} & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ -2 & -6s & & & & \\ -\frac{2s\sin\phi}{r} + \frac{j^2s^2}{r^2} & -\frac{3s^2\sin\phi}{r} + \frac{j^2s^2}{r^2} & & & & \\ -\frac{js^2\sin\phi}{r^2} + \frac{2js}{r} & -\frac{js^3\sin\phi}{r^2} + \frac{3js^2}{r} & & & & \end{pmatrix} \quad (A4)$$

而且用于谐波 jB 的 $[W^j]$ 可以从谐波 jA 的 $[W^j]$ 形成, 并用 $-j$ 去代替 j

$[B]$ 矩阵[参看方程(14)和(24)]

$$[B] = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi & 0 & 0 & 0 & \cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\phi & L\cos\phi & 0 & 0 & -\sin\phi & -L\sin\phi & -L^2\sin\phi & -L^3\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi & L\sin\phi & 0 & 0 & \cos\phi & L\cos\phi & L^2\cos\phi & L^3\cos\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{pmatrix} \quad (A5)$$

[V]矩阵[参看方程(21)和(26)]

$$[V] = \begin{pmatrix} r & sr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sr & s^2r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & sr & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sr & s^2r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & sr & s^2r & s^3r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sr & s^2r & s^3r & s^4r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2r & s^3r & s^4r & s^5r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^3r & s^4r & s^5r & s^6r \end{pmatrix} \quad (A6)$$

参考文献

1. Pian, T. H.H., "Derivation of element stiffness matrices," AIAAJ. 2, 576—577 (1964).
2. Grafton, P.E. and Strome, D.R., "Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method," AIAAJ. 1, 2342—2347 (1963).
3. Lu, Z.A., Penzien, J., and Popov, E.P., "Finite element solution for thin shells of revolution," NASA Contract Rept. (July 1964).
4. Archer, J.S., "Consistent mass matrix for distributed mass systems," J. Struct. Div. 89, 161—178 (August 1963).
5. Klein, S., "Matrix analysis of shell structures," M.S. Thesis, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass. (June 1964); Massachusetts Institute of Technology Aeroelastic and Structures Research Lab. TRI 21—12.
6. Percy, J. H., Navaratna, D. R., and Klein, S., "Sabor III a Fortran Program for the linear elastic analysis of thin shells of revolution under asymmetric or axisymmetric loading by using the matrix displacement method," Massachusetts Institute of Technology Aeroelastic and Structures Research Lab. TR 121—6 (May 1965).
7. Percy, J. H., Navaratna, D. R., and Klein, S., "Sabor I a Fortran Program for the linear elastic analysis of thin shells of revolution under axisymmetric loading by using the matrix displacement method," Massachusetts Institute of Technology Aeroelastic and Structures Research Lab. TR121—5 (April 1915).
8. Budiansky, B. and Radkowski, P., "Numerical analysis of unsymmetrical bending of shells of revolution," AIAA J. 1, 1833—1842 (1963).