数学方法论导引

第一卷 第一分册

吴开朗编

阜阳师范学院数学系

一九八六年二月

前 言

对于《数学方法论》，到目前为止，国内外尚未形成讲授科目和理论体系，但一些著名数学家如笛卡尔、波利亚等已作过深入研究，并写了许多专著。在美国麻省理工学院数学系开有《数学方法论》课，心理学系开有《解题技巧》课，在苏联莫斯科大学数学系开有《数学方法论》课（该书正在翻译中），在苏联师范学院开有《数学解题教学法》课，在日本《数学教育研究》中也有数学方法论部分。本讲义《数学方法论导言》，分为两卷，第一卷为《数学解题方法概论》，第二卷为《数学思想方法概论》。由于前者的理论发展的较快，而且具有一定的独立性，因此将两者的序言也分开来写！为了确切起见，本讲义对第一卷的标题定为《数学解题方法概论》，并将第一卷分为两个分册印行。该讲义第一卷第一分册于1984年10月印成，根据我系试用情况以及兄弟院校用后的反映，这次重印时又作了较大的修改和补充。不仅订正了原书的错误，而且在书末又新增加了《答案与提示》。

第一卷

数学解题方法概论

序

近几年来，国外对于人工智能和计算机模拟思维的研究进展很快，人工智能的研究对象，是各种智慧性问题的形式解法，目的是要计算机来解这些需要智慧的问题，如定理证明、图象识别、下棋、作曲等。要把这些问题的解法抽象出来加以系统化形式化，必须先对一般正常人解答这些问题的思维过程有较深刻的认识。

这种对解题思维过程的认识，即是关于解题的理论。

在数学发展史上，关于解题理论研究的开创工作，应首推伟大的数学家和哲学家笛卡尔（Descartes，1569－1650）和莱布尼兹（G·W·Leibniz，1646－1716）。笛卡尔集近代自然科学家哥白尼、布鲁诺、伽俐略、开普列等关于方法论研究之大成，开创了科学研究艺术上的哲学方法、数学方法和实验相结合的全新时期。笛卡尔在《方法论》一书中曾介绍过他的这种思想的片段，他的另一本书《指导思想的法则》，是在他去世之后才出版的。在这本书中，他原计划写三十六节，但实际上只写了十八节，有三节只写个概要，其余部分根本没有动笔。他原打算在这本书里提出解题的通用方法，亦即是用于解决所有这类问题的方案：1）将任何种类的问题化归为数学问题；2）将任何种类的数学问题化归为代数问题；3）将任何代数问题化归为方程式求解。然而把这种意图付诸实施，其困难、障碍和错综复杂的情况，远比笛卡尔最初想象的要多得多。这也就是笛卡儿这本书生前未出版的原因。在此之后，莱布尼兹曾计划写一篇《发明的艺术》，但未能如愿，而散见于他的其他著作中，却有不少关于这方面的论述。例如，他曾说过：“没有什么比看到发明的源泉更为重要的，就我看来，它比发明本身更为有趣”。此外，大数家欧拉（Euler，1707——1783）和高斯（Gauss，1777——1855）也发表过一些经验之谈。欧拉说过：“数学这门科学，需要观察还需要试验。”高斯也曾提到过他的许多定理是靠归纳法发现的。

美国著名数学家乔治·波利亚（George polya）于本世纪中叶，在解题理论方面，进行了大量的研究工作，并发表了许多理论著作。如《Problems and Theorems in Analysis (VOL·I·II)》、《How to Solve it》、《Mathematics and plausible Reasoning (Vol·1·2)》、《Mathematical Discovery (Vol.1.2)》等著作。在二十多年以前，美

国一些数学家艾伦．纽厄尔（Allen Newell）、克兰夫．肖（Cliff Shaw）和赫伯特．西蒙（Herbert．Simon）又开始进行用计算机模拟思维的研究工作，并取得了很大成就。

在苏联师范学院数学系中，有的开设数学解题数学法这门课讲的也是关于解题的理论。如A·G·瓦西列夫斯基在《数学解题教学法》一书中提出七种数学解题方法，即解方程和不等式的研究方法，等价变换法、不等价变换法、三角方程和不等式的解法、几何解题法、非标准问题的解法。在我国，北京师范大学付教授梁绍鸿对解题理论曾作过一些研究，并将研究成果写在他的著作《初等数学复习及研究（平面几何）》（人民教育出版社）一书中，即第二章《推证通法》和第三章《证题术》，但对这些证题方法，他写得很简陋，而且应用范围还仅仅局限于初等几何之中，这样反而降低了它们在方法论上的意义。除此而外，建国以来，特别是三中全会以来，在我国的一些中级期刊上，也发表过一些有价值的关于论述解题理论的文章。

当今在世年事最高、深孚众望的数学家教育家G·波利亚在《数学与猜想》中说："一个真正想把数学作为他终身事业的学者必须学习论证推理，这是他的专业，也是这门科学的特殊标志，然而，为了取得真正的成就，他还必须学习合情推理，即是数学猜想。数学猜想是一种直觉思维，利用它不仅可以预测解决现有问题的思路，而且还可以提出有价值的新问题，数学猜想可变与数学题的设计，或者说是数学题的构造很类似。数学证明是数学题解法的主要内容之一。本讲义第一卷第一分册共四章，所讲的是数学题的设计，第一卷第二分册共五章，所讲的是数学题的解法分类。曾任美国《数学评论》编辑，1962年又就任《美国数学月刊主编的美国著名数学家P·R·Halnios曾说过："数学的真正组成部分就是题和解。因此本讲义的中心议题，就是关于构

题和解题理论的研究，其中包括它们的分类、层次、体系等问题。目的在于为培养和训练有数学才能的学生，提供一些参考资料和理论依据，希望年青一代都能发展成为更好的数学问题的提出者和解答者。

数学猜想是数学题的主要来源之一，因而也是数学发展的主要动力之一。在第一章第二节中列出了几个著名的数学猜想为例，读者由此可见一斑。通常我们所提出的问题是有缺陷的，对于缺陷问题，本讲义在第三章加以分类讨论。我们应该看到这个问题的研究是有意义的。G·波利亚在《数学猜想》一书中曾指出"要成为一个好的数学家，或者一个优秀的博奕者，或者要精通别的什么事情，你必须首先是一个好的猜想家，而要想成为一个好的猜想家，我想，你首先应是天资聪慧的。但只是天资聪慧还是不够的，你应该考究你的一些猜想，把它与事实进行比较。如果有必要，就对你的猜想进行修正，从而获得猜想失败或成功的广泛经验。"（科学出版社 p.122）有缺陷的数学题，也可称为病题。以此类推，有缺陷的解，也可称之为病解。对于病解，本讲义并未设专章进行讨论，而是在第二章第三节中作为一种题式——改错题来加以分析研究。

对数学题的题型，本讲义将它分为求证题和求解题两大类，这种分类法，最早起始于世界名著《几何原本》的作者欧几里德（Euclid 约公元前330—275）。在这两大类型之中，又划分为各种题式，如近年来在中外各级各类数学考试中常见的选择题和填空题等等。本讲义对于这些题式的构题和解题的特征，也都是在本章内加以简述的。因为在《数学题的构造》一节中，是从数学题的因果变形而展开的，而在解法部分则是侧重于基本解法的分类研究。

所谓解题，简单地说，就是对已知信息进行加工变换，以求

得目标信息，在各节中，对这些基本解题方法的叙述，一般地都分为理论基础、解题步骤和应用范围三个方面。本讲义之所以称这些方法为基本解题方法，是由于解一道数学题，可以是单独使用某一种方法，也可以是几种基本方法的联合使用。对于解题方法，共分为五章，先将传统的解法分为逻辑模式的解题方法和科学模式的解题方法两大类，并各自成章。对于不属于这两大类的同时应用范围又比较小的一些解题方法，称为解题技巧，将这些解题技巧，将这些解题技巧择其要者化为为第一章。这种分类法是以G·波利亚的观点为依据的。G·波利亚曾说："一个想法使用一次是一个技巧，经过多次使用就可成为一种方法。"（《数学分析中的问题和定理》《德文初版前》上海科学技术出版社）。以上所述的各种解题方法，可概称为专用解题方法。所谓"专用"，是指数学学科本身的专用方法。在最后一章，即第九章再介绍一种通用解题方法，所谓"通用"，是指这些方法，对于解答工程、数学和其他自然科学当中的问题，都是通用的。也就是说，专用方法只适用于数学中的特定领域，而通用方法则适用于解答一切形式的问题。在这一章中所提出的八种通用解题方法，是依据美国麻省理工学院心理学系《解题技巧》这门课的讲授者W·A·威克尔格伦的观点而改写的。他经过多年认真的探讨，对美国近年来所发表的一些研究成果加以归纳整理，在1973年才提出了这种分类方法。在这一章中还用了一些篇幅，来阐述这些通用解题方法与专用解题方法的区别和联系，并作了若干评注。

关于解题理论的阐述，是有层次的。从数学题而言，如果解答起来很困难，他就是一个大问题；如果只有一点点困难，它就是一个小问题；如果说一点儿问题也没有，它也就不成一个问题了。对于数学题的构造，把它分为简单因果变形和复杂因果变形两大类，前者包括等价变形和类似变形；后者包括纵向变形，倒

向变形和横向变形。对于解题方法，有通用解题方法和专用解题方法，而专用解题方法又分为普通解题方法（即逻辑模式和科学模式的）和解题技巧两种。这些层次，不仅有简繁之分，也有应用范围的大小，价值的高低之别。

能力培养问题，是当前各国教育界普遍关心的问题，正是基于这种需要，在美国大学里各专业都以本门学科的方法论作为必修课程。1980年以美国全国数学教师联合会的名义，公布了一份文件，名为"An Agenda for Action"，其中提出："解决问题是八十年代数学教学的核心"，"设计八十年代的数学教学大纲必须以能帮助解决各种实际问题的数学方法来武装学生。"这个文件提出数学能力的范围至少要包含下面十个方面：1、解决问题的能力；2、把数学应用到日常生活里的能力；3、对答案合理性的觉察力；4、估计和近似；5、合理计算的能力；6、几何结构；7、测量；8、阅读、解释和制作图表、框图的能力；9、用数学作预报；10、计算机常识。为了培养学生的能力，苏联在高等数学大纲中从1983年起正式推行《典型计划法》，所谓《典型计算法》，即是精选典型习题，使习题典型化、个性化。借此着重培养正确回答理论问题的能力，对理论练习题解法的理解能力以及独立解决各种具体问题的计算能力。由此可见，对于数学解题理论的研究也是基于对数学教育中学生能力培养问题之急需。对于解题理论的研究，已引起我国教育界和学术界的重视，我国国务院付总理在教育体制改革会议上提出："更重要的是培养学生独立思考的能力，培养学生运用获得的知识去解决面临的新问题的能力，培养他们继续获得新的知识，善于总结新的经验，发展新的、理论的科学的思想方法。"

01-016013

第一卷 第一分册 目录

第一章　数学题的来源

曾任美国《数学评论》编辑，1982年又任《美国数学月刊》主编的美国著名数学家P·R·Halmas在《数学的心脏》一文中曾说："数学究竟是由什么组成的？公理吗？定理吗？证明吗？概念？定义？理论？公式？方法？诚然，没有这些组成部分，数学就不存在，这些都是数学的必要组成部分。但是他们中的任何一个都不是数学的心脏，这个观点是站得住脚的，数学家存在的主要理由是解决问题。因此，数学的真正组成部分是问题和解"。（《数学通报》1982.4），由此我们可以概括地说：数学题的来源就是数学的来源。数学作为一门有组织的、独立的和理性的学科来说，它在古希腊学者登场之前（即是公元前600年之前）是不存在的。在此这更早的一些古代文明社会中，只有数学知识的萌芽，那时只认识一些最简单的几何图形，如直线、角、圆、三角形等。同时这些概念的形成，都是来自于实践．例如：在英文中对于直角三角形的两边叫做两臂，在英文里对于直角三角形的一条直角边称为股，而对于另外两边分别称为勾和弦，这就是我国古代算术书上所说的"勾股三四弦五"。在原始文明社会中，只会使用一、二、三这些数。劳动创造了双手，十指伸屈可以计数，因而，十进制也就悄悄地固定下来。人们逐步引入数的文字记号，并认识一些简单的运算法则。

1900年在巴黎举行第二届国际数学家代表大会，38岁的大卫·希尔伯特（David，HilBert，1862—1943）应邀在这个大会上以十分高昂的姿态作了数学史上著名的《数学问题》报告。在报告之前，他曾与当时的大学家闵柯夫斯基共同研究过。在这这个报告中，他向跨入新世纪的数学家们提出了23个问题，这些问题一直吸引着许多数学家的注意，对本世纪数学的发展产生了强

烈的影响。他在这个报告中曾说："数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢？在每个数学的分支中，那些最初最老的问题肯定是起源于经验（经验即是实践——著者），是由外部的现实世界中所提出。整数运算法则就是以这种方式在人类文明的早期被发现的，正如今天的儿童通过经验的方法来学习运用这些规则一样。……但是，随着八门数学分支的进一步发展，人类的智力，受着成功的鼓午，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着，通常并不受来自外部的明显影响，而只是借助于逻辑组合，一般化，特殊化，巧妙地对概念进行分析和综合，提出新的富有新成果的问题，因而它自己就以一个真正提问者的身份出现。"综上所述可知，数学题的来源有二：一是来源于人类生产和生活的实践，并经由数学工作者的加工整理和提炼；另一是来自于数学家的猜想，猜想并不是瞎说，它是在一定的观察和实验的基础上所作出的一种推测，这种推测是数学发展的主要动力之一。现在分为两节来阐述这个问题，并各举一些富有知识性和趣味性的例子。

第一节　来自于实践的数学问题

本节所列各题可分为两类：一类是如何把实际问题抽象为数学问题，这也就是数学抽象法，这种方法是解决问题的主要方法之一。如题1、题5和题6；另一类是如何应用数学理论知识来解决实际问题，如题2、题4。有很多数学理论都是通过实际应用才得到发展和完善的！

题1　《九章算术》中一题

我国有一部古代数学教科书，大约成书于东汉初期。书中收集了246道与生产实践有关的应用题，按照问题的性质和解法

，分为九章，故称《九章算术》。它对世界数学的发展有重要的影响，已译成俄、英、德、日几种文字出版。

《九章算术》方程章第十三问是："今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问井深，绠长各几何。

如果把这个问题译为今文那是："现有五家共用一口井，甲家提水时二条绳子不够用，尚差一段如乙家一条绳子那样长；乙家提水时，三条不够用，尚差一段如丙家一条那样长；丙家提水时，四条不够用，尚差一段如丁家一条那样长；丁家提水时，五条不够用，尚差一段如戊家一条那样长；戊家提水时，六条不够用，尚差一段如甲家一条那样长。如各家都能得到自己所差的那一条，都可达到井底。问井深及各家的绳长是多少？"

对于这个问题依用今天的方法可做如下解答：设甲、乙、丙、丁、戊各家一条绳子之长分别为 x、y、z、u、v，并设井深为 w，则得方程组为：

$$\begin{cases} 2x + y = w \\ 3y + z = w \\ 4z + u = w \\ 5u + v = w \\ 6v + x = w \end{cases}$$

这种一次方程组的未知数的个数多于方程个数，叫做一次不定方程，可求出一组最小解为：

$W=721$，$x=265$，$y=191$，$z=148$，$u=129$，$v=76$。

这道数学题在《九章算术》中，给出的是确切答案，但是我国古代数学家刘徽，于魏景元四年对《九章算术》作注释时，已

明确指出这是一次不定方程，只能求出它的比率。比利时人利列里希特（U · Libbrecht）曾赞扬说："《九章算术》第八章第十三题是含有六个未知数的五个方程的方程组，它是中国数学中最早的不定方程问题。※※

题2．牛顿提出的牛吃草问题

这是英国一个伟大数学家牛顿所曾提出的一个有趣的数学问题，这个问题虽然很简单，却可以训练我们的分析推理能力。问题是：3头牛在两个星期中吃完2亩地上的草；2头牛在4个星期中吃完2亩地的草，问要多少头牛才能在6个星期中吃完6亩地上的草？假设牛未吃草时，草是一样多，而且草的生長速度是不变的。

这个问题有一个难点，就是草是不断地生长的。要在6个星

---

* 这里设甲、乙两家的绳子长为 x 和 y，其实在代数中首先引用 x 和 y 来表示未知量的符号，是十六世纪著名的法国数学家弗兰·索瓦·韦达（Francois Vieta），他是人们公认的代数学之父。

※※ 在我国民间广泛流传的一道数学题：一百头牲口，一百块瓦，骡子驮三马驮两，三头毛驴驮一块瓦，问多少毛驴，多少骡子，多少马？这也是一次不定方程问题，有兴趣的读者可以研究一下。这道题编成一个顺口溜，深受群众欢迎。其中所说的"骡子驮三，马驮两，三头毛驴驮一块瓦"，是指一匹骡子驮三瓦，一匹马驮两块瓦，三头毛驴合驮一块瓦。这句话虽然与事实不属，但在数学上仍然是有意义的。我国古代数学著作《张邱建算经》中，提出一个百鸡问题，与此民间流传的数学题很类似，对于百鸡问题用现代语言可以叙述成为下形式：公鸡每只5元，母鸡每只3元，小鸡每三只1元。今用100元买得100只鸡，问其中公鸡、母鸡、小鸡各几只？[1]

期中吃完6亩地上的草是指：不仅要吃完原先已长出来的草，而且还要吃完这6亩地上在6个星期里陆续长出来的草。

这个问题要抓住每头牛每星期的吃草量 v 是一样的。设在牛开始吃草时，草的高度为 h_0 米，草的生长速度是每星期 h 米。则3头牛在两个星期中吃完两亩地上的草，可得方程式

$$3\cdot 2\cdot v=2\cdot(h_0+2h) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

2头牛在4个星期中吃完2亩地上的草，也可以得方程式

$$2\cdot 4\cdot v=2\cdot(h_0+4h) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

設 n 头牛能在6个星期中吃完6亩地上的草，就可得方程

$$n\cdot 6\cdot v=6\cdot(h_0+6h) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

这里有四个未知数 v，h_0，h 和 n，但只有3个方程式。一般说来，未知数的个数超过方程的个数这种类型的方程式方程组都称知为不定方程。在一般情况下，不定方程是会有很多个解。称之为不定解，但也有一些方程是无解的。当然，一般的不定方程有很多个解，但在一定的条件限制下，也会得到肯定的解答。

从①②③中消去 v 可得：

$$\frac{2(h_0+2h)}{3\cdot 2}=\frac{2(h_0+4h)}{2\cdot 4}=\frac{6(h_0+6h)}{n\cdot 6}$$

即 $$\frac{h_0+2h}{3}=\frac{h_0+4h}{4}=\frac{h_0+6h}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

我们主要是求整数 n，故对上式除以 h_0，得

$$\frac{1+\frac{h}{h_0}}{3}=\frac{1+4\frac{h}{h_0}}{4}=\frac{1+6\frac{h}{h_0}}{n} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

若把 $\frac{h}{h_0}$ 看成一个未知数，则⑤式就是二个方程、二个未知数的一般方程组。可解出 $\frac{h}{h_0}=\frac{1}{4}$ 和 $n=5$

所以，需要5头牛才能在6个星期中吃完6亩地上的草。

最古老而又最著名的不定方程恐怕是求方程式：

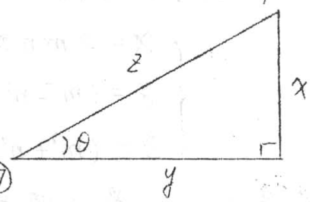
$$x^2+y^2=z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥$$

的整数解问题。因为这个方程反映了直角三角形中三边关系，所以称之为"商高方程"或"毕达哥拉斯方程"。凡是满足方程⑥的整数解（x，y，z）都称之为"毕达哥拉斯三元数组"。显然，（3，4，5）是三元数组；（6，8，10），（9，12，15）……（$3k$，$4k$，$5k$）对一切正整数k，都是三元数组。除了这些三元数组外，还有其他的三元数组吗？

现在我们利用三角函数的知识，推求三元数组的一个计算公式：

$$\begin{cases} x = z\cdot\sin\theta \\ y = z\cdot\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{y}{\cos\theta} = \frac{z}{1} \quad \cdots\cdots \quad ⑦$$



但$\sin\theta$，$\cos\theta$不是整数形式。　　（图1）

为此我们引入一个参数 $1/l = tg\frac{\theta}{2}$，则$\sin\theta$和$\cos\theta$都可以化为l的有理式：

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{2tg\frac{\theta}{2}}{\sec^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2tg\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2l}{1+l^2} \\ \cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-tg^2\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-tg^2\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{l^2-1}{l^2+1} \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad ⑧$$

将⑧代入⑦，可得

$$\frac{x}{2l} = \frac{y}{l^2-1} = \frac{z}{l^2+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑨$$

由此可得三元数组公式：

$$x = 2l \;,\quad y = l^2-1 \;,\quad z = l^2+1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑩$$

故（3，4，5）；（5，12，13）；（7，24，25）；（9，40，41）等等都是三元数组，其共同规律是 $x-y=1$。

把⑩式乘以一个公共因子 t，就得到更一般的三元数组公式：

$x=2l\cdot t$，$y=(l^2-1)t$，$z=(l^2+1)t$ …… ⑫

为了求得整数解，当然要求 l 和 t 使得⑫式都得到整数值。若取 $l=m/n$，$t=n^2$，而 m，n 是任意整数，则得：

$x=2m\cdot n$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$ …… ⑬

由此可见，计算三元数组的较为一般公式是⑫式。当 $t=1$ 时，就是⑩式，$t=\frac{1}{2}$ 时就是⑪式。那么，三元数组的通式是什么呢？可以证明，商高方程（6）式的通解形式是：

$$\begin{cases} x=2mnk \\ y=(m^2-n^2)k \\ z=(m^2+n^2)k \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑭$$

其中 m，n 是互质的正整数，k 是任意正整数。（注意 x 和 y 可以互换）。

现在举一个例题：

若已知某直角三角形的某边长为55，试求其三边的整数解。

因 $x=2mnk\neq55$，只有令

$y=(m^2-n^2)k=(m+n)(m-n)k=55$

而 $55=11\times5\times1$

若令 $k=1$，则 $(m+n)(m-n)=55$

令 $m-n=1$，有 $m+n=55$，得 $m=28$，$n=27$，$k=1$；

---

* 第6页注：公元前一千五百年以前，在伊拉克的美索波达米亚地方，居住着古巴比伦人，当时他已经懂得60进位制、开方和求解一元二次方程等。现存在美国哥伦比亚大学，编号为普林顿（plim ton）322号的古巴比伦人的泥板，上面记载着当时使用60进制求解 $x^2+y^2=z^2$ 的三元数的秘诀。

令 $m-n=5$，有 $m+n=11$，得 $m=8$，$n=3$，$k=1$；

若令 $k=5$，则 $(m+n)(m-n)=11$，

令 $m-n=1$，有 $m+n=11$，得 $m=6$，$n=5$，$k=11$；

另外，设斜边 $z=(m^2+n^2)k=55$

只有 $m^2+n^2=1$ 或 $m^2+n^2=5$ 或 $m^2+n^2=11$ 或 $m^2+n^2=55$

上述四式中只有 $m^2+n^2=5$ 有整数解 $m=2$，$n=1$；$k=11$。

综合上述得，共有五个三元数组满足条件：

(1512，55，1513)，(48，55，73)，(300，55，305)

(132，55，143)；(44，33，55)。

注意：x 和 y 可以对换。

商高方程的整数解问题已经解决了，进一步就会提出 $x^3+y^3=z^3$ 是否会有整数解？更一般是 $x^n+y^n=z^n$ $(n\geq3)$ 是否会有整数解？这就是著名的费尔马猜想，请看本章第二节题8。(见12页注)

在读完本节之后，有兴趣的读者，可以试解下列两题：

题甲、已知某直角三角形的一边长为21，试求三边的整数解。

题乙、求方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一切互质的正整数解。[2]

题3. 韩信点兵问题

汉代名将韩信善于用兵，传说的"韩信用兵，多多益善"是这么回事：他面对一队士兵，要他们1，2，3；1，2，3地报数求得余数 n，然后又要他们1～5；1～5地报数，求得余数 m，再令他们1～7；1～7地报数，又得余数 l。韩信就能够从这三个余数 n，m，l 求得该队士兵的人数。这里有什么秘密呢？

在我国古代数学名著《孙子算经》中，也有类似的题目：有物不知其数，三三数之剩2，五五数之剩3，七七数之剩2，问物几何？这个题目的答案是23。大家不妨验算一下。但这个23究竟为何从三个余数2，3，2求得？下面尝试用一个简单推导"

辦信点兵"的公式的方法。

设总数为 x，则可考虑把这个数 x 分解为四个部分：

$$x = y + w + v + u \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

其中 y 是能同时被 3，5，7 整除的部分，即

$$y = k \times 3 \times 5 \times 7$$

w 是只能同时被 5 和 7 整除的部分，即 $w = n_1 \times 5 \times 7$；

v 是只能同时被 3 和 7 整除的部分，即 $v = m_1 \times 3 \times 7$；

u 是只能同时被 3 和 5 整除的部分，即 $u = l_1 \times 3 \times 5$；

这里不妨假设 $0 \le n_1 < 3$，$0 \le m_1 < 5$，$0 \le l_1 < 7$，

因为例如 $n_1 = 4 = 3+1$，那时，

$$w = 4 \times 5 \times 7 = (3+1) \times 5 \times 7 = 3 \times 5 \times 7 + 1 \times 5 \times 7$$

则可把第一项合并到 $y = k \times 3 \times 5 \times 7$ 中。

故 $\quad x = k \times 3 \times 5 \times 7 + n_1 \times 5 \times 7 + m_1 \times 3 \times 7 + l_1 \times 3 \times 5 \quad \cdots\cdots \quad ②$

由上式可知，用 3 去除 x 时，其余数 n 只能从第二项 $w = n_1 \times 5 \times 7$ 中产生，同理，用 5 去除 x 时，其余数 m 只能由第三项 $v = m_1 \times 3 \times 7$ 中产生；用 7 去除 x 时，其余数 l 只能由第四项 $u = l_1 \times 5 \times 3$ 中产生。只要从 n，m，l 分别决定出 n_1，m_1，l_1 就能算出 x。

先看最后一项

$$u = l_1 \times 3 \times 5 = l_1 \times 15 = l_1 \times (14+1) = 14 l_1 + l_1$$

故用 7 去除时，产生的余数就是 l_1，即有 $l_1 = l$，

同理：

$$v = m_1 \times 3 \times 7 = m_1 \times 21 = m_1 \times (20+1) = 20 m_1 + m_1$$

故用 5 去除时，产生的余数就是 m_1 即 $m_1 = m$。

第二项稍为复杂一些：

$$w = n_1 \times 5 \times 7 = n_1 \times 35 = n_1 \times (33+2) = 33 n_1 + 2 n_1 ,$$

用 3 去除时，所得余数 n 和 n_1 的关系是：