板壳力学

上册

同济大学应用力学教研室编

1979

上册目录

第Ⅰ篇　薄板力学

绪论	0-1
绪论参考文献	0-8
第一章　弹性薄板弯曲理论	1-1
§1·1　薄板弯曲理论假设	1-1
§1·2　变形与位移，曲率及扭率	1-3
§1·3　应力及内力，物理条件	1-5
§1·4　刚劲板的平衡微分方程式	1-10
§1·5　边界条件，合成横剪力	1-12
§1·6　薄板斜截面上的几何量和内力	1-15
§1·7　本章总结	1-20
§1·8　第一章思考题及习题	1-21
第一章参考文献	1-22
第二章　弹性薄板弯曲理论经典解法	2-1
§2·1　概说	2-1
§2·2　薄板弯曲问题的精确解及近解	2-1
§2·3　双重三角级数解简支矩形板	2-4
§2·4　单福利哀级数解矩形薄板	2-9
§2·5　矩形薄板用福利哀级数解例	2-12
§2·6　薄板弯曲的迭合解	2-21
§2·7　薄板的连续条件	2-23
§2·8　极坐标表示的薄板基本方程式	2-25
§2·9　轴对称园板	2-30
§2·10　不对称园板问题	2-35
§2·11　杂形薄板	2-40
§2·12　板条的弯曲	2-43
§2·13　弹性地基板弯曲理论	2-46
§2·14　弹性地基板解析解	2-49

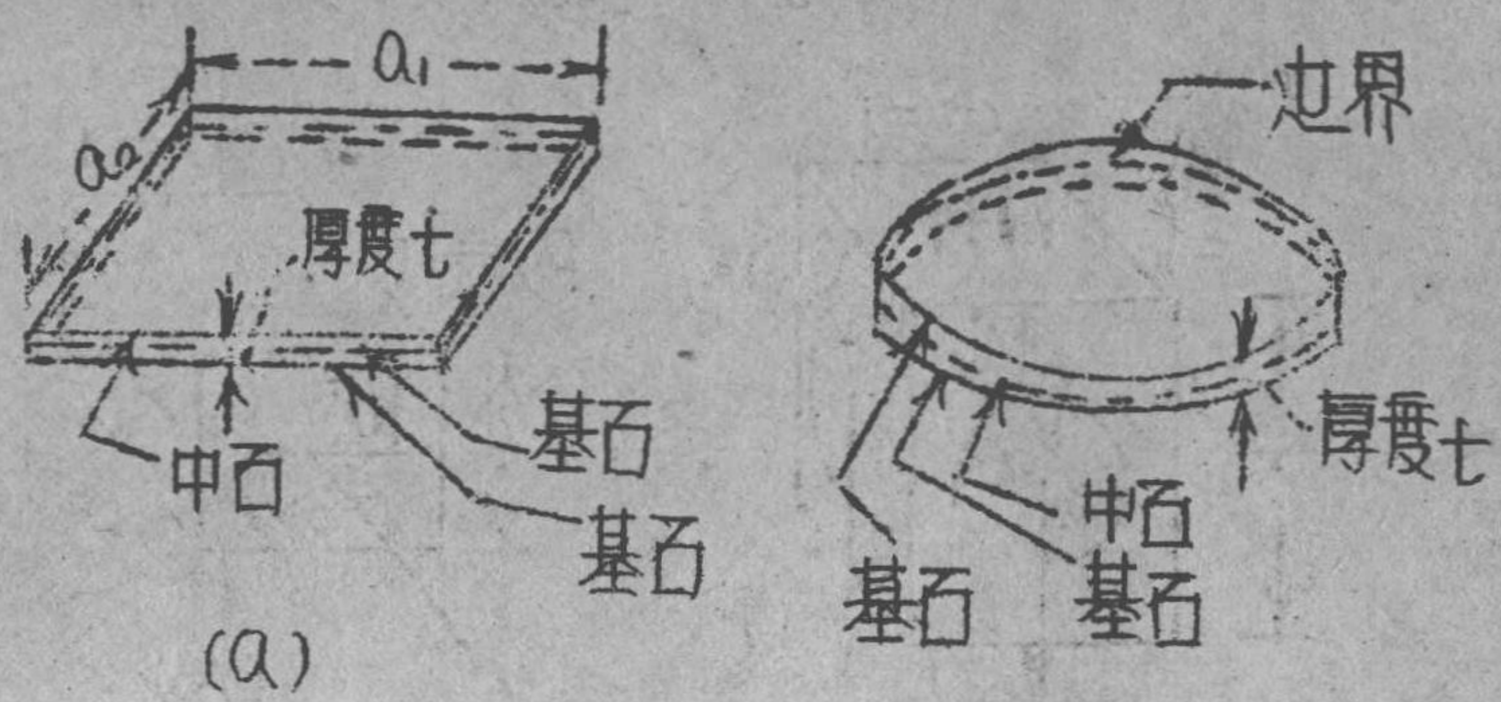
§2·15 变刚度薄板 2-52
§2·16 同时拉伸及弯曲的薄板 2-55
§2·17 本章总结 2-57
§2·17 习题 2-58
第二章参考文献 2-62
第三章 弹性薄板弯曲数值解及近似解
§3·1 概说 3-1
§3·2 有限差分法解薄板弯曲问题 3-2
§3·3 改进的有限差分法 3-10
§3·4 能量法，薄板弯曲变分方程 3-15
§3·5 列兹法及伽辽金法及符拉索夫法 3-20
§3·6 有限单元法解板的中面力作用问题 3-30
§3·7 有限单元位移法解薄板弯曲问题 3-39
§3·8 有限元混合法分析薄板弯曲问题 3-49
§3·9 加权残数法分析薄板弯曲问题 3-57
§3·10 弯矩分配法计算连续薄板 3-61
§3·11 总结 3-72
§3·12 习题 3-74
第三章参考文献 3-25
第四章 弹性薄板弯曲特殊问题
§4·1 薄板的大挠度理论 4-1
§4·2 正交异性板的弯曲问题 4-6
§4·3 薄膜 4-19
§4·4 薄板的热应力 4-22
§4·5 自由边的弹性地基板 4-28
§4·6 有限元混合法分析弹性地基板 4-32
§4·7 多层复合材料板 4-35
参考文献
第五章 薄板的动力问题 5-1
§5·1 概言 5-1
§5·2 薄板的自由振动 5-9
§5·3 薄板的强迫振动 5-12

§5·4 能量法求薄板的固有频率 5-12
§5·5 拉格朗日方法，薄板的动力反应 5-19
§5·6 有限差分法解薄板振动问题 5-25
§5·7 有限单元法解薄板的动力问题 5-28
§5·8 加权残数法解薄板振动问题 5-36
§5·9 本章总结 5-36
§5·10 第五章习题 5-38
参考文献 5-39
第六章 薄板的稳定性分析 6-1
§6·1 基本概念 6-1
§6·2 静力平衡法求薄板的临界载荷 6-4
§6·3 能量法解薄板的稳定性问题 6-11
§6·4 正交异性板的稳定性 6-18
§6·5 加劲板的稳定性 6-23
§6·6 差分法解薄板稳定性问题 6-29
§6·7 有限元法解薄板稳定性问题 6-33
§6·8 薄板的动力稳定性 6-38
§6·9 本章总结 6-42
§6·10 本章习题 6-43
第六章参考资料 6-45
第七章 薄板的极限分析 7-1
§7·1 基本概念及假设 7-1
§7·2 虚功法计算极限载荷 7-5
§7·3 平衡法求板的极限载荷 7-10
§7·4 集中力作用下板的屈服线 7-13
§7·5 屈服线分析的其他的应用 7-18
§7·6 本章总结 7-21
§7·7 本章习题 7-22
参考资料 7-25

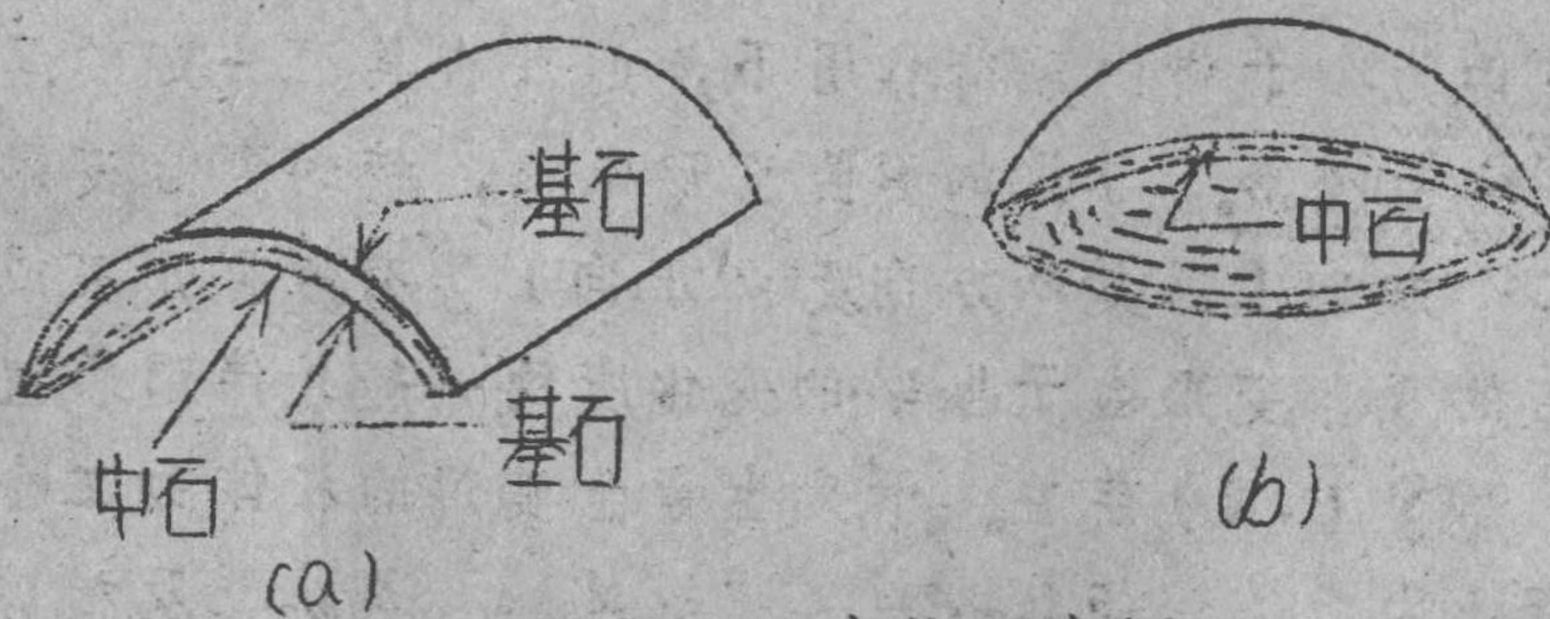
第Ⅰ篇　薄板力学

绪　论

薄片结构　物体之中厚度较其他尺寸特别小的称为薄片。于工程技术问题中作为承重受载用的人工构筑的薄片可称为薄片结构。实际上，薄片结构是具有二个彼此十分靠近的表面的固体物。这二个表面可称为基面。二个基面中间的距离称为厚度。薄片结构中平分厚度的面称为中面。如果薄片结构的中面是一个平面或者基本上是一个平面这种薄片结构称的板（图Ⅰ1）。若中面是一个曲面，这种薄片结构称为壳（图Ⅰ2），板或壳沿着中面外形的周边称为边界。



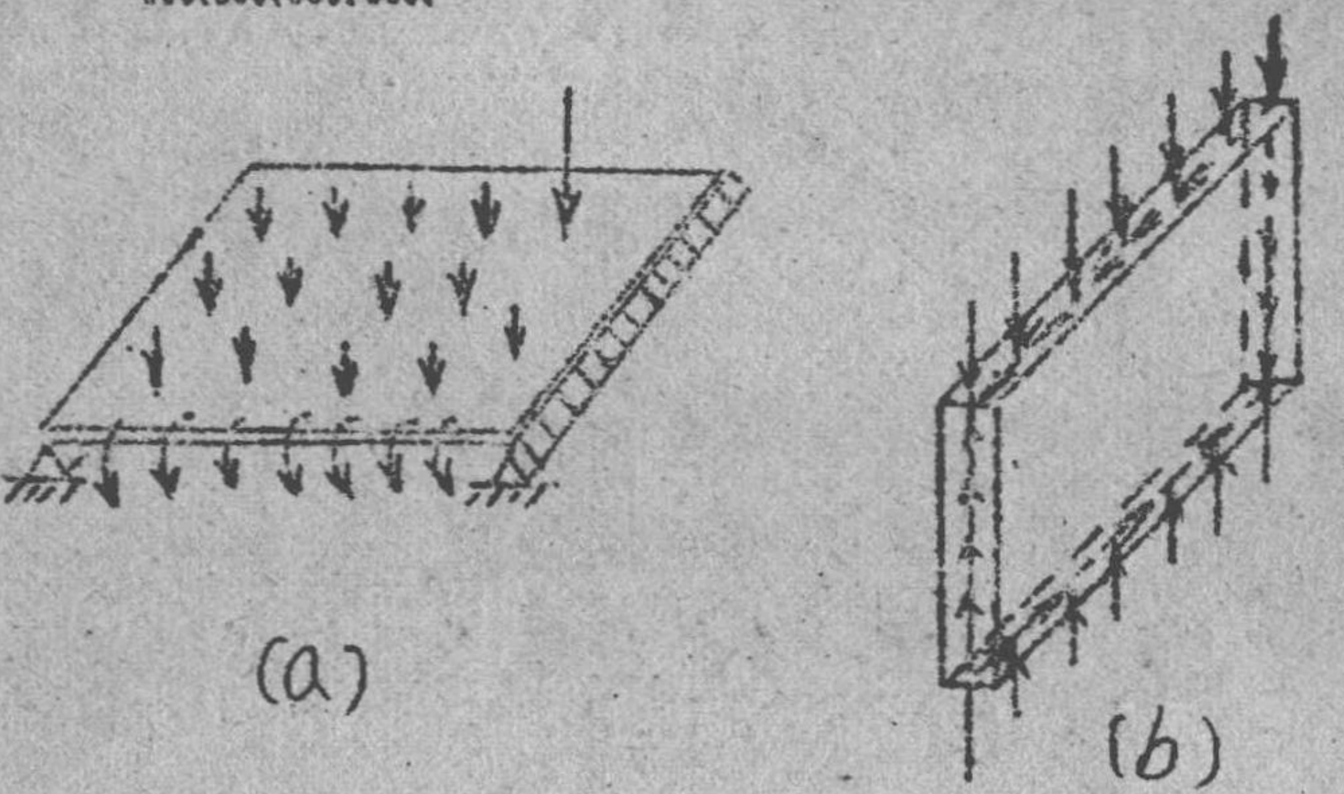
图Ⅰ1　板的示意图



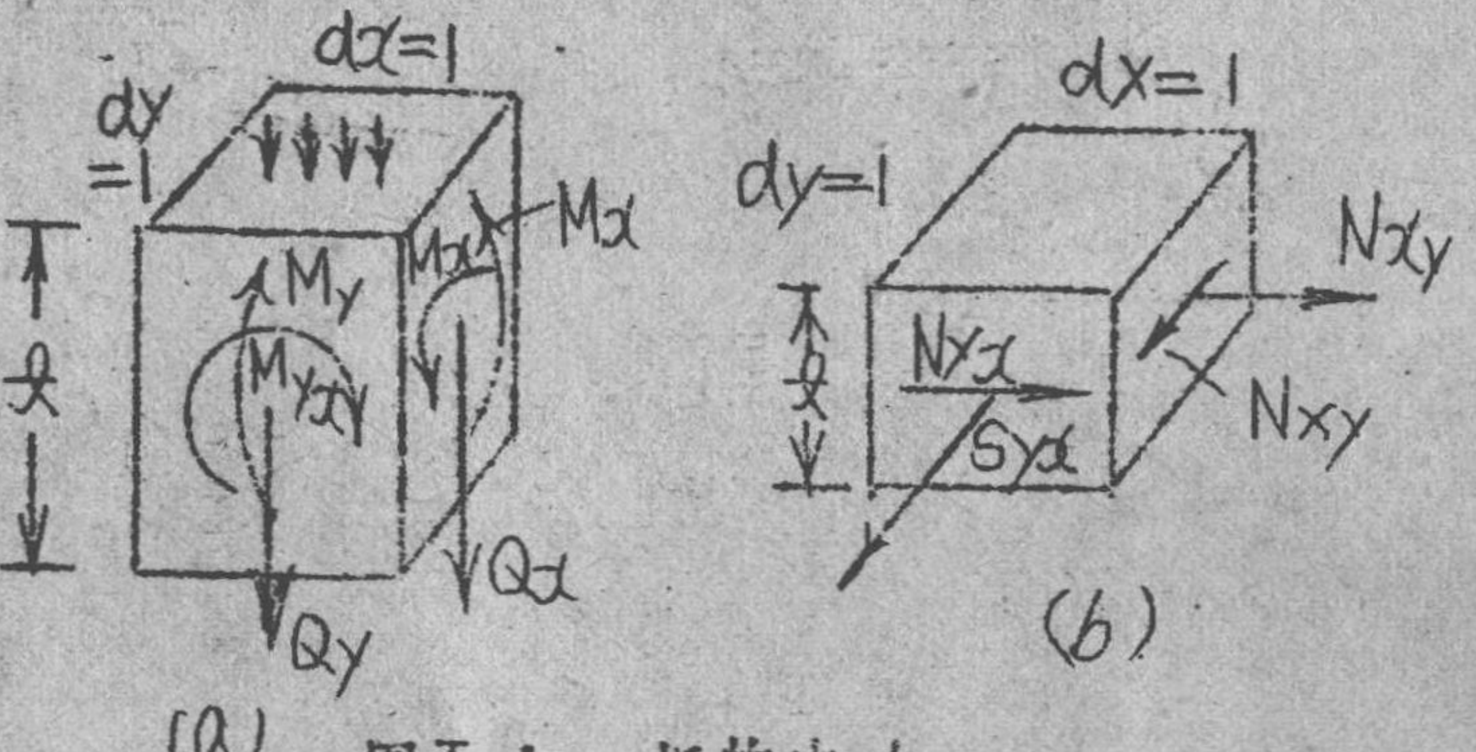
图Ⅰ2　壳的示意图

板的功用　板是一种十分有用的构件。板于边界上或其内部被支持起来之后可用于负担分布的或集中的横向载荷（图Ⅰ 3(a)），

表面力或体积力。有的时候，板在边界上被支持起来之后可用于负担方向平行于板中面的载荷（图Ⅰ3(b)）。这种载荷称为中面载荷，这可为作用于板边的拉力或压力或剪力或它们的迭合，它们可以是连续的或集中的表面力亦可以是体积力。在横向载荷与中面载荷同时作用情况下，板便处于复合抗力情况。



图Ⅰ3　板的载荷



图Ⅰ4　板的内力

变形及内力　于横向载荷作用下，如果板具有一定的厚度，板主要地发生了弯曲变形。与梁的弯曲变形比较，板的弯曲变形是二维的，即同时在二个方向（例如 x 方向及 y 方向）都有弯曲形变或曲率。除此之外，板的弯曲变形由于曲率的变化所致一般地伴随着扭转变形亦即有扭率（详§1·2）存在。于发生弯曲变形的板体的二个垂直的截面上具有弯曲内力：弯矩 M_x，M_y，扭矩 M_{xy}，M_{yx} 及横剪力 Q_x，Q_y 如图Ⅰ4(a)所示。图中 t 是板的厚度。板于中面载荷作用下，主要地处于平面应力状态或平面形变状态。详见弹性力学教材〔Ⅰ1〕或参考书〔Ⅰ2〕〔Ⅰ3〕它们的变形是中面变形，它们的中面内力有中面

拉(压)力N_x,N_y 及中面剪力$N_{xy}=N_{yx}$等。于较多情况下,板的变形情况是弯曲变形与中面变形的迭加,板的内力是弯曲内力与中面内力的迭加。于板较薄的情况中,横向载荷作用下可导致板的上述的二种迭加:于中面载荷作用下亦可导致上述的二种迭加。

板的分类 按着板中面形状区分便有矩形板,园板及杂形板等。除开矩形板及园板之外其他形状的板如三角形板,梯形板,椭园形板,扇形板等统称为杂形板。

按着板的材料性质不同便有各向同性板,各向异性板粘弹性板等。复合材料做成的板大都呈现各向异性性质。按着板体构造的不同便有变厚度板,加肋板,夹心板,多层板等。搁在弹性介质上的板称为弹性地基板(详§2-14及〔I4〕〔I5〕)。

按照板受载荷作用后的内力状态可分为下列:

1、薄板 于横力作用下板的中面应力与弯曲应力相较十分小的时候(不大于5%)这种板称为薄板或刚劲板。薄板中的内力状态是弯曲内力状态(见图I 4(a))。所谓“刚劲”指板中面比较刚硬基本上没有变形的意思。

在实用上,如果是各向同性的等厚度板,一般以板的厚度t不超过板中面最小尺寸a_{min}五分之一及板的最大挠度w_{max}不超过板厚的1/5称之〔I6〕。

$$t/a_{min} \leqq 1/5 \quad , \quad w_{max}/t \leqq \frac{1}{5} \sim \frac{1}{2} \tag{I1}$$

2、薄膜 极薄的板,于横力作用下,板的弯曲内力与中面内力相较十分微小可加以略去。板中主要是中面内力(图I 4(b))。它的应力状态可称为薄膜应力状态。板中的最大挠度w_{max}与板厚t之比大于五,即〔I6〕:

$$w_{max}/t > 5 \tag{I2}$$

3、柔韧板 较薄的板,载荷作用后板中的中面应力与弯曲应力都是居于同级的量。于是板中的内力是弯曲内力与中面内力的迭加(图I 4(a)及(b)二种内力的迭加)。按照A.C.沃尔密尔的观点柔韧板中的最大挠度与厚度之比须落在1/5与5之间,即〔I6〕:

$$1/5 \leq w_{max}/t \leq 5 \qquad (I3)$$

4、厚板　板的厚度与中面尺寸比较基本上属于同级的量。厚板问题属于弹性力学三维问题。应力状态等也是三维的。一般当板的厚度 t 与中间最小板边尺寸 a_{min} 之比为：

$$t/a_{min} > \frac{1}{5} \sim \frac{1}{3} \qquad (I4)$$

即将板当作为厚度

板的理论　纯粹属于板平面问题的理论可以详见有关弹塑性力学的著作如〔1〕〔2〕。在本书薄板力学中主要是阐述关于薄板的弯曲理论。薄板的弯曲理论又可以分为小变形理论及大变形理论（或分别称为小挠度理论及大挠度理论）。于小变形理论中板的挠度与板的厚度相比较微小。实际上这就是刚劲板的弯曲理论，在这种理论中可以应用迭加的原理。于板的大变形理论中，板的挠度与板的厚度相较是同级为量，必须考虑于大变形时一些附加的应力及应变之量，于是导致非线性定解微分方程式等的出现于分析上比较复什。迭加原理不能应用。一般工程中所用的薄板理论是小挠度理论，于航空工程及航天工程中为了减轻重量大都用板的大挠度理论进行分析及设计。

结合薄板的材料及其构造我们有弹性的，弹塑性的，材料非线性的，各向同性的，各向异性的，粘弹性的，加筋的，夹心的，多层的…各种薄板理论。

于不同载荷作用下有静力作用下，动力作用下，热载作用下板的强度问题，稳定问题及诸如振动，动力反应等动力问题。这些问题今日已都有较成熟的理论提供分析计算之用。

工程应用　平板及其相应的计算理论广泛地用于各个工程技术领域。如建筑工程中的屋面板，楼板，无盖楼盖，折板结构，剪力墙，地基板…，航空工程中飞机的机翼，舵板，造船工程中，船舶的舱板甲板，道桥工程中的路面板，桥面板，水利工程中的闸门板，机械工程中各种板体部件，容皿的盖板，底板及种种板体结构。

发展简史　薄板力学研究，从开始起到现在祗有二百十几年。

薄板力学的研究不是从薄板静力问题开始的，却是先研究薄板的振动问题，这与当时的声学研究有连带的关系。1767年欧拉Euler解决了矩形薄膜及园形薄膜的弹性振动问题〔I7〕。他当时将薄膜近

似地看作为相互垂直的弦线所绷起来的物体，导出了薄膜弯曲振动微分方程式：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{I5}$$

其中w是薄膜的挠度，t为时间，A及B为常量。欧拉的学生J．伯努力（J.Bernoulli），亦就是著名的数学家伯努利的侄孙，推广了欧拉的概念用于薄板，仿照纲格梁的比拟，导出了薄板的挠度微分方程式〔I 8〕：

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \tag{I6}$$

其中D是抗弯刚度，q是横向载荷的集度。在这个微分方程他没有考虑到扭转刚度的问题是不正确的，他祇觉得理论和实验与有些相象，但并不一致。

在18世纪末19世纪初叶德国的E.F．歌莱地（E.F.Chladni）所做的板的振动试验颇为引起当时西欧几个国家学者们的兴趣。他将粉末均匀地放在水平的板上。振动之后他发觉板上的粉末集中在节线上，那节线并无垂直的运动，他发现了板自由振动的振型。

1911年法国的数学家苏菲日尔曼（Sophie Germain）利用了变分法得到薄板振动微分方程式。可是，她在板的能量式中漏掉了中面翘曲的功的项。后来虽然得到了巴黎科学院的奖金（1816），可是评奖的人如拉格朗日等对她的研究成果并不满意。拉格朗日后来改正了日尔曼的错误，增加了那未曾考虑之项得到了薄板自由振动的微分方程式为：

$$K\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{I7}$$

这是正确的形式。

法国的桥梁设计工程师纳维埃（Navier）（1785-1836）在弹性理论问题包括薄板弯曲问题方面的研究工作极多，可以认为他实际上是现代弹性力学的奠基人。他于1820年向法国科学院提出的论文中，假设薄板是由许许多多的质点所组成的，薄板弯曲时各质点的位

移与离开中面的距离成正比例，于是得到了在横向载荷作用下薄板平衡微分方程的正确形式：

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \qquad (I8)$$

纳氏并且提供以双重三角级数解简支边界的矩形板问题为今后板壳力学问题解析法中提供了较为实用的方法。

对于弹性力学颇有贡献的歌西（A.L.*Couchy* 法国学者）及泊桑（S.D.*Poisson*）于1927-1829年间曾经试用弹性力学的方法来解板的弯曲问题。

1829年泊桑发表了有关薄板自由边的边界条件的见解。他认为薄板自由边的边界条件应该是三个，于是引起了差不多有20年之久许多学者对于薄板自由边的性质与数目的热烈争论。这个问题没有得到定论直到1850年德国G·克希霍夫（G.K*irchhoff*）发表论文证明薄板自由边的边界条件不能有三个，否则就得不到满足，之后才平息了这场争论〔I7〕。

克希霍夫（1824-1887）于1876年出版了一本书“数学物理的讲课”〔I9〕可认为是同时弯曲及中面拉伸（压缩双剪切）的薄板理论奠基人。于分析板大挠度问题时，他认为不能将有关的非线性项加以忽略。克氏另外的贡献是发现了板的频率方程式及将虚位移方法引入到薄板问题中来〔I11〕。克希霍夫于板弯曲理论中较为著名的贡献是他首创梁的理论，于板弯曲问题中作了二个重要的假设：(1)直法线假设(2)应力假设。基于这两个假设所推得的薄板理论就是一般广泛应用的薄板技术理论。从此以后，薄板理论的发展便快得多了。

1877年法国的M·李维（M.*Levy*）利用单层三角级数得到了两个对边是简支的，另外二个对边任意支承的矩形板解。这种解法在解析法中是很为重要的，具有很大的实际意义。

在19-20世纪交替的时代，欧洲船舶建造者以钢代木发生了一场重大的变革。这种材料上的变革导致薄板理论于工业应用上的发展。俄国的科学家们其中如克莱洛夫（A.Крылов 1863-1945）〔I12〕，他的学生布勒诺夫（N.Г.БУБноВ）等首先把薄板的数学理论用于海军舰艇的建设上面去以代替古老的行业传统。〔I13〕〔I14〕由于文字的隔膜，西方的科学家当时还未充分认识到弹性力学的科研成就的

应用的意义。S.P.铁木申珂(S.P.Timoshenko)在这个方面实际上做了科学技术的传播者，于是西方科学家们也充分注意到将薄板理论用于造船工程上来。

铁木申珂于1916年出版的“弹性理论”第2卷是一本介绍薄板弯曲理论比较早的著作。他的著作“板与壳的理论〔I15〕中薄板部分综述了不少薄板问题的解，其中不少是他自己的研究成果。铁氏于薄板理论中的重要贡献是园板大挠度问题解以及弹性稳定方面的工作〔I16〕〔I17〕。

关于板的大挠度理论，德国卡门(Von Karman)曾于1910年左右获得了薄板大挠度理论基本方程，世称的卡门方程〔18〕他的晚期工作是板的有效宽度〔19〕及板屈曲后的稳定问题〔20〕。

1925挪达艾(A.Nadai)的书“弹性板”〔I19〕是第一本关于薄板理论详尽的书。1933年苏联伽辽金(Б.Г.Галеркин)出版的“弹性薄板”的书〔I7〕也是一本比较详尽的薄板理论书。威士忌戈特(H.M.Westergard)(1923)及歇拉艾宜尔(F.Schleicher)(1926)都是较早研究弹性地基板的人。

于第一次及第二次世界大战由于现代航空工业的发巳推动薄板研究进一步发巳。许多科学家及工程师分析了中面力作用于板的问题，超屈曲问题及如颤振等板的振动问题将板的解析法理论研究推向更高的一层，更严格地对待这些问题。在二次世界大战期间有如威格舅(Wagner)李维(Levy)，柏莱希(Bleich)及番特霍夫(Federhofer)等研究工作者。

波兰的科学家胡伯(M.T.Huber)于1923年研究了正交异性板〔I20〕并解决了受到不对称载荷的园板问题〔I21〕。莱斯诺(E.Reissner)提出了考虑横剪力的更严格的薄板理论。苏联的沃尔密尔(A.C.Вольмир)发巳薄板大挠度弯曲理论及稳定理论颇有贡献〔I6〕。我国钱佛长将摄动法引入到板的大挠度问题中去进行分析。苏联的列赫尼茨基(C.Г.Лехницкий)的著作“各向异性板”〔I22〕，是综述了关于各向异性板的强度及稳定等问题的解法，其中也有不少是列氏的工作。

于板的弹塑性平衡，稳定及极限状态计算苏联的依凼申（A.A.Nлbншин）做了不少工作。约翰逊（K.W.Joh onsen）的屈伏线分析法〔I23〕是板的极限状态分析法是从弹性的分析法跨出去的一个重要的成就。霍奇（PH.，G.Hodge）将数学塑性理论用于分析轴对称旋转型对称的园板问题〔I24〕。

近年来由于出现了强有力的数值计算方法——有限单元法。这种方法是将薄板离散成为有限个单元，单元之间建立一定的联系满足一定的条件如变形协调条件等每个单元满足力的平衡条件等依靠高速电子计算机进行计算整体的未知量。依靠这种方法可以解算复什形状的薄板强度，稳定，振动，以及非线性弹塑性的，热塑性的，各种板的问题。有限元法莫基人是特纳（M.J.Turner）克拉夫（R.W.Clough）马丁（G.C.Martin），托泼（L.J，Topp）等〔I25〕。辛基威士（O.C.Zienkiewicz）加拉翰（G.H.Gallagher），遲登（T.T.Oden），耶麦大（Y.Yamada）等于非线性，弹塑性，动力…有限元问题上贡献较多〔I26〕〔I27〕〔I28〕。此外，于板问题中差分法特别是现代的差分法迄今还不失为一种重要的数值计算方法〔I10〕。

绪论参考文献

[I1] 徐芝纶编："弹性理论"—人民教育出版社 1960

[I2] S.P.Timoshenko & J.N.Goodier: "Thcory of Elasticity" 1970

[I3] 王龙甫编："弹性理论"—科学出版社 1978

[I4] Б.Г.柯列涅夫著："弹性地基上的板和梁计算问题"—建筑工程出版社 1954

[I5] Б.Г.Коренев: "Некоторые Задачи Теории Упругости и Теплопроводности Решаемые в Бесселевых Функциях" 1959

[I6] A.C.沃耳密尔："柔韧板与柔韧壳"科学出版社 1959

[I7] S.P.铁摩辛柯："材料力学发巳史"—科技出版社

[I 8] J. Bernoulli:"Essai theorique sur les vibrations de plaques élastiques rectangulaires et libres", Nova Acta Acad. Petropolit. 5(1789).转见 [10]

[I 9] G.Kirchhoff: "Verlesungen über mathmatishe Physik". Vol. 1 B.G. Teubner, Leiqzig, 1876 转见 [7]

[I10] R. Szilard: "Theory and Analysis of Platcs: Classical and Numerical Methods" Prentice-Hall Inc. 1974

[I11] A. Clebsch: "Theorie de I'elasticite' des corps solides, ovec des notes entendues de Saint-Venant", Dunod. Paris 1887.转见 [10]

[I12] A.Krylov: "On Stresses Experienccd by An Ship in a Sea Way" Tran. Inst. Naval Architects (London), 40(1898).

[I13] I.G. Boobnov: "On the Stresses in Ships' Bottom Plating due to Water Pressure" Tran. Inst. Naval Architccts (London), 44 (1902)

[I14] I.G. Boobnov: "Staitel'nai mekhanika korablia (Theory of Structures of Ships) Vols. 1 2. St. Petersbur9, 1912, 1914

[I15] S.P. Timoshenko: "Theory of Platcs and Shells" 1941

[I16] S.P. Timoshenko: "On Large Deflections of Circular Plates" (in Russian) Mem. Inst. Ways Commum, (89)1915

[I17] S.P. Timoshenko: "Sur la stabilité des systèmes élastiques", Ann. des ponts et Chaussées,(1913)

[I18] Von Karman Th. "Festigkeits probleme im Maschinenbau," Encycl. der math. Wiss 4(1910).

[I19] A. Nadai:" Die elastishen Platten, Springer-Verlag. Berlin, 1925 and 1968

[I20] M.T.Huber: "Die Theorie der Kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten" Der Bauingenieur, 4(1923)
[I21] M.T.Huber: Teoria sprezystoci, Theorie de I'elasticite, Nakl, Polskiej Akademii Uhicjctnosci, Krakow 1948-1950
[I22] C.Г.列赫尼茨基："各向异性板"—科学出版社 1967
[I23] K.W. Johansen: "Brudlinieteorier," J.Gjelerup, Copenhagen 1943
[I24] P_H., G., Hodge: "Limit Analysis of Rotationally Symmetric Platcs and Shells," Prenticc-Hall, Inc. Englewood Cliffs.N.J. 1967
[I25] M.J.Turner, R.W. Clough, G.C. Martin, L.J.Topp: "Stiffness and Deflcction Analysis of Complex Structures" J. Acron. Sci. 23 (Sept. 1956)
[I26] R.H. Gallagher, Y. Yamada, J.T. Oden: "Recent Advances in Matrix Mcthods of Structural Analysis and Design" The University of Alabama Press. 1971
[I27] Y.Yamada, R.H. Gallagher: "Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis" Univ. of Tokyo Press 1973
[I28] O.C. Zienkiewicz: "The Finite Element Method in Engineering Science" Mc Graw-Hill 1971

第一章　弹性薄板弯曲理论

§1·1　薄板弯曲理论假设

为了研究薄板弯曲理论问题，我们定下面螺旋直角坐标系 O-xyz 如图1·1·1 所示，其中 Oxy 坐标面系与薄板于变形时的中面相合，z 轴向下。

薄板的弯曲理论基于下列的假设：

1、薄板所用的材料是均匀的，连续的，弹性的及各向同性的。

2、刚劲板的假设，即（见绪论）

(1)　板的厚度 t 至多为板中面最小尺寸 a_{min} 的五分之一。

(2)　板的最大挠度 w_{max} 不超过板厚 t 的五分之一。

3、薄板弯曲时板的中面不发生形变。

4、直法线假设——薄板弯曲时所有垂直于中面的法线于变形之后仍旧保持为一直线并且仍旧垂直于中面。

5、应力假设—薄板弯曲时，垂直于中面的正应力与其他应力相较甚为微小可加以略去。

象在梁的弯曲理论中一样，上述的直法线假设的含义是薄板弯曲时横向剪切变形比较微小。由此而引起的挠度变化可加以略去。值得引起我们注意的是薄板的角隅之处以及板上开有直径如厚度大小的孔洞附近这个假设引起了一些理论误差。上面的应力假设于薄板上有强大的集中力作用的附近也引起一些理论误差〔I10〕

这里的假设是小挠度薄板理论的假设，当然不适用于大挠度板的情况。上述直法线假设及应力假设由克希霍夫所作出的（绪论发尸简

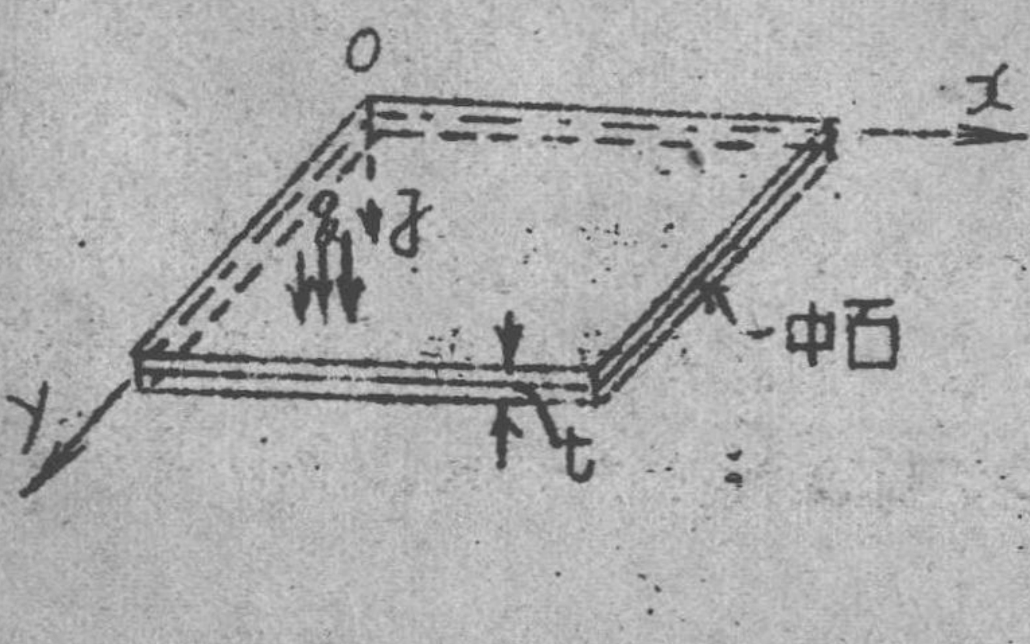


图1·1·1　板的坐标

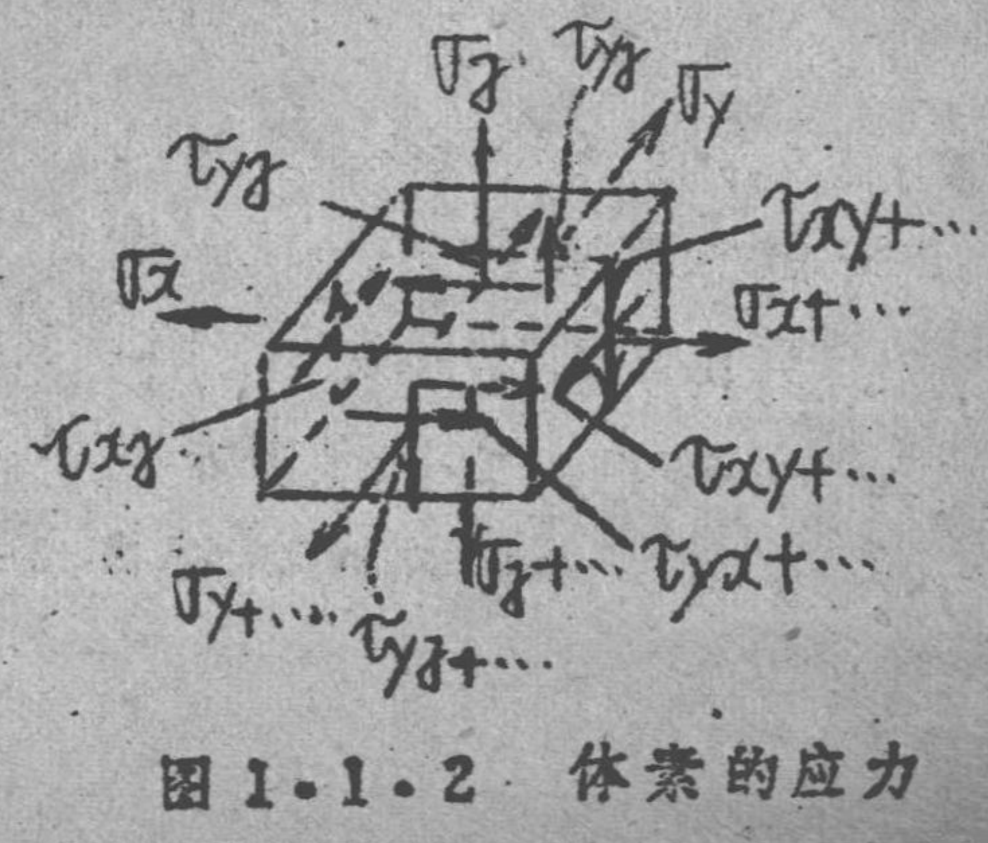


图1·1·2　体素的应力

史），世称为克希霍夫假设。有关于上述假设特别是克希霍夫假设已有无数的实验证明是有效的。

现在我们来研究，由于引入了上述的假设，作为弹性力学问题之一板的弯曲问题，应如何进行求解。我们从薄板中间任意点割取出一个体素如图1·1·2 所示。根据直法线假设及应力假设有：

$$\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0 \tag{1·1·1}$$

$$\sigma_z \approx 0 \tag{1·1·2}$$

由于广义虎克定律，我们有：

$$\tau_{xz}=G\gamma_{xz}=0 \tag{1·1·3$_1$}$$

$$\tau_{xz}=G\gamma_{xz}=0 \tag{1·1·3$_2$}$$

于是一个体素上的六个反力分量祇余下了三个：σ_x，σ_y 及 τ_{xy}。可是，作用在薄板上的分布载荷有时是不连续的，甚至是突变的，除此之外还有点的集中力及线的集中力的作用，这些将引起薄板的横向剪应力如 τ_{xz} τ_{yz}，应如何解算？

这种情况与梁弯曲问题颇有类似之处。在梁弯曲问题中，由于梁的平面假设，我们祇导出了梁的正应力 σ_x 计算式，但由于不连续载荷及集中力的作用，我们亦须求梁的横向剪应力 τ_{xz}。较为一般的解法是我们积分梁的挠度微分方程式：

$$EJ\frac{d^4w}{dx^4}=q(x) \tag{1·1·4}$$

（式中EJ 是梁的抗弯刚度，$q(x)$是载荷集度，参见〔1·1·1〕〔1·1·2〕，积分后的积分常数按梁的边界条件加以确定。然后再根据梁的弯矩计算式 $M=EJ\dfrac{d^2w}{dx^2}$ 及横剪力式 $Q=EJ\dfrac{d^3w}{dx^3}$ 求得到的梁的弯矩M及横剪力Q；最后根据梁弯曲正应力公式及横向剪应力公式解算求出弯曲应力 σ_x 及横向剪应力 τ_{xy}。

薄板弯曲问题基本上也是这样解得。我们首先积分薄板的挠曲面微分方程式（见下节）然后根据弯矩，扭矩及横剪力等内力式求得内力，最后从弯曲应力及横剪切应力计算式中计算应力。不同之处在于板弯曲时 x 及 y 二个垂直方向都有弯矩及横剪力，并且还有扭矩存在。此外，薄板的挠曲面微分方程式是二元的偏微分方程式，积分求解困难很多。

§1·2 变形与位移，曲率及扭率

现在研究薄板与横向载荷作用下所发生的变形及变形与位移的关系。

我们将板放在一组坐标系上如图1·1·1 所示，xoy就是板于变形时的中面．z轴向下。如此，在向下的载荷作用下，z方向的位移将是正的，板适当地在边缘支持着。

板中面在横向载荷作用下会弯成一个曲面。板中任意点于变形之后会有二个切向线位移：u−x方向的位移，V−y方向的位移；及一个法向位移w—z方向的位移，即挠度。

板中面的位移祗与x，y有关是一个x，y的函数：

$$w = w(x, y) \tag{1·2·1}$$

如果我们以一平行于xz坐标面（y＝常量）的平面截割发生变形后的薄板，得到如图1·2·1 所示的情形。此时，挠曲面与y＝常量的平面的交线的CMC，曲线在M点的斜率量$\partial w/\partial x$。在图示情形中这斜率是正的，因为当x增大，w也增大。由于变形很小，故M点切线与x轴所成的角度$\alpha_x \approx \partial w/\partial x$。由于直法线假设，M点的法线$a$−$a$是一根直线并仍垂直于挠曲面。于是在这根直法线上任意点M'在x方向的位移为：

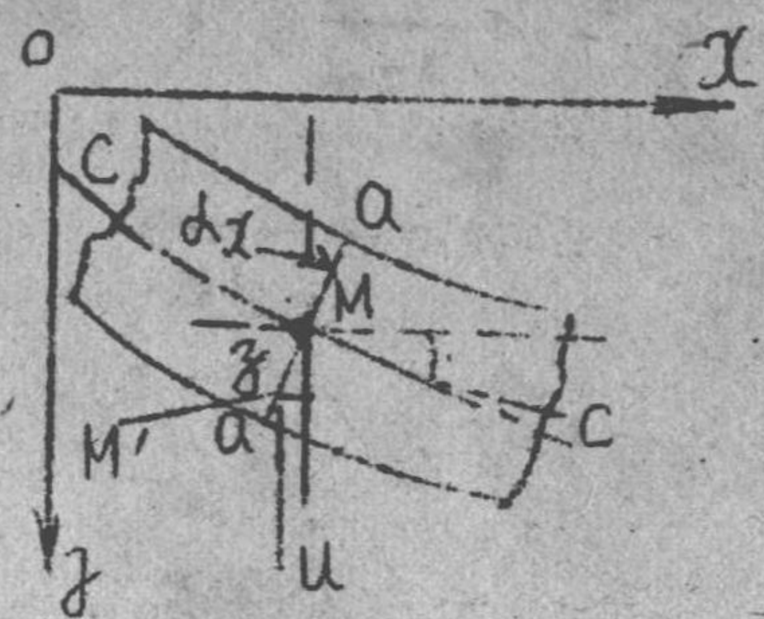


图1·2·1 切向位移u示意图

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1·2·2}$$

其中z量M' 离开中面的距离，类似可薄板中任意点在y方向的位移为：

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1·2·3}$$

(1·2·3)式中的负号是因为$\partial w/\partial x$ 或$\partial w/\partial y$ 是正的时候，u或v都是负的缘故。