KEY TO

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

E. KREYSZIG

PART 2

高 等 工 程 數 學 詳 解

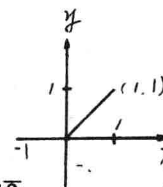
下 册 目 次

第八章　線積分與面積分

8－1節　線積分（P.322）

8－2節　線積分之計算（P.325）

下列各題中，令 c 之方向與積分方向相同，求 $\int_c (3x^2+3y^2)\,ds$

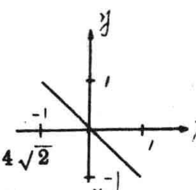


1. 循 $y=x$ 之路徑，從 $(0,0)$ 至 $(1,1)$

解：$r(t)=t\,i+t\,j$，$\therefore x=t$，$y=t$

$ds=|\dot{r}(t)|\,dt=\sqrt{2}\,dt$

$$\therefore \int_c (3x^2+3y^2)\,ds=\int_0^1 6\sqrt{2}\,t^2\,dt=2\sqrt{2}\,t^3\Big|_0^1=2\sqrt{2}$$

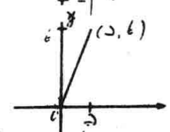


2. 循 $y=-x$ 之路徑，從 $(-1,1)$ 至 $(1,-1)$

解：$r(t)=t\,i-t\,j$，$\therefore x=t$，$y=-t$

$ds=|\dot{r}(t)|\,dt=\sqrt{2}\,dt$

$$\therefore \int_c (3x^2+3y^2)\,ds=\int_{-1}^1 6\sqrt{2}\,t^2\,dt=2\sqrt{2}\,t^3\Big|_{1}^{1}=4\sqrt{2}$$

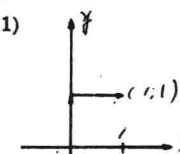


3. 循 $y=3x$ 之路徑由 $(0,0)$ 至 $(2,6)$

解：令 $x=t$，則 $y=3t$，$r(t)=t\,i+3t\,j$

$ds=|\dot{r}(t)|\,dt=\sqrt{10}\,dt$

$$\therefore \int_c (3x^2+3y^2)\,ds=\int_0^2 30\sqrt{10}\,t^2\,dt=10\sqrt{10}\,t^3\Big|_0^2=80\sqrt{10}$$



4. 循 y－軸，從 $(0,0)$ 至 $(0,1)$ 然後與 x－軸平行從 $(0,1)$ 至 $(1,1)$

解：$r_1(t)=t\,j$，$r_2(t)=t\,i+j$

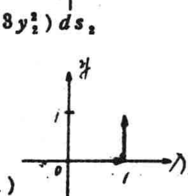
$x_1=0$，$y_1=t$，$x_2=t$，$y_2=1$

$ds_1=|\dot{r}_1(t)|\,dt=dt$，$ds_2=|\dot{r}_2(t)|\,dt=d.$

$$\therefore \int_c (3x^2+3y^2)\,ds=\int_{c_1}(3x_1^2+3y_1^2)\,ds_1+\int_{c_2}(3x_2^2+3y_2^2)\,ds_2$$

$$=\int_0^1 3t^2\,dt+\int_0^1 (3t^2+3)\,dt$$

$$=1+4=5$$



5. 循 x－軸，從 $(0,0)$ 至 $(1,0)$，然後平行 y－軸從 $(1,0)$ 至 $(1,1)$

解：$x_1=t$，$y_1=c$；$x_2=1$，$y_2=t$

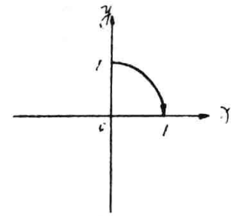
$r_1(t)=t\,i$，$r_2(t)=i+t\,j$

$\therefore ds_1 = |\dot{\boldsymbol{r}}_1(t)|\,dt = dt$, $ds_2 = |\dot{\boldsymbol{r}}_2(t)|\,dt = dt$

$$\int_c (3x^2+3y^2)\,ds = \int_{c_1}(3x_1^2+3y_1^2)\,ds_1 + \int_{c_2}(3x_2^2+3y_2^2)\,ds_2$$

$$= \int_0^1 3t^2\,dt + \int_0^1 (3+3t^2)\,dt = 1+4=5$$

6. 以順時針方向循圓 $x^2+y^2=1$ 從 $(0,1)$ 至 $(1,0)$



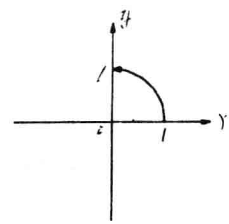
解：令 $x=\sin t$ ，則 $y=\cos t$

$\boldsymbol{r}(t)=\sin t\,\boldsymbol{i}+\cos t\,\boldsymbol{j}$

$ds=|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt=dt$

$$\therefore \int_c (3x^2+3y^2)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,dt = \frac{3\pi}{2}$$

7. 以反時針方向循圓 $x^2+y^2=1$ 之路徑由 $(1,0)$ 至 $(0,1)$



解：令 $x=\cos t$ ，則 $y=\sin t$

$\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}$

$ds=|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt=dt$

$$\therefore \int_c (3x^2+3y^2)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,dt = \frac{3\pi}{2}$$

下列各題中，求 $\int_c (y^2\,dx - x^2\,dy)$

8. 以反時針方向循圓 $x^2+y^2=1$ 之路徑由 $(0,1)$ 至 $(1,0)$

解：（圖形如6題），令 $x=\sin t$ ，則 $y=\cos t$

$dx=\cos t\,dt$ ， $dy=-\sin t\,dt$

$$\therefore \int_c (y^2\,dx - x^2\,dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t+\sin^3 t)\,dt$$

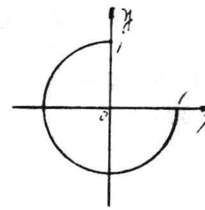
$$= \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t - \cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

9. 以反時針方向循圓 $x^2+y^2=1$ ，由 $(1,0)$ 至 $(0,1)$

解：令 $x=\cos t$ ，則 $y=\sin t$

$dx = -\sin t\, dt$ ，$dy = \cos t\, dt$



$\therefore \int_c (y^2 dx - x^2 dy) = \int_0^{-\frac{3\pi}{2}} -(\sin^3 t + \cos^3 t)\, dt$

$= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} (\cos^3 t + \sin^3 t)\, dt$

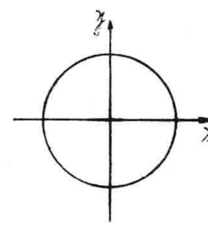
$= (\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t - \cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}$

$= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

10. 以反時針方向環繞圓 $x^2 + y^2 = 1$ 從 $(0,1)$ 至 $(0,1)$

解：令 $x = \sin t$ ，$y = \cos t$

則 $dx = \cos t\, dt$，$dy = -\sin t\, dt$



$\therefore \int_c (y^2 dx - x^2 dy) = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \sin^3 t)\, dt$

$= (\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t - \cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_0^{2\pi}$

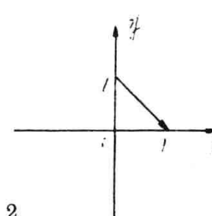
$= -\frac{4}{3} - (-\frac{4}{3}) = 0$

11. 循直線路徑，從 $(0,1)$ 至 $(1,0)$

解：由斜截式知直線之方程式爲 $y = 1 - x$

故令 $x = t$ 則 $y = (1 - t)$

$\therefore dx = dt$ ，$dy = -dt$



$\int_c (y^2 dx - x^2 dy) = \int_0^1 [(1-t)^2 + t^2]\, dt$

$= \int_0^1 [1 - 2t + 2t^2]\, dt = (t - t^2 + \frac{2t^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

在下列位移中，求 $\mathbf{p} = 4xy\mathbf{i} - 8y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 所作的功

12. 循曲線 $y = 2x$ ，$z = 2$ ，從 $(0,0,2)$ 至 $(3,6,2)$

解：令 $x = t$ ，則 $y = 2t$ ，$z = 2$ ，

$\therefore \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$d\mathbf{r}(t) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\, dt$

$$\therefore w=\int_c \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^3 (8t^2\boldsymbol{i}-16t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\,dt$$

$$=\int_0^3 (8t^2-32t)\,dt=\left(\frac{8}{3}t^3-16t^2\right)\Big|_0^3=-72$$

13. 循直線 $y=2x$ ， $z=0$ ，從 $(3,6,0)$ 至 $(0,0,0)$

解：令 $x=t$ ，則 $y=2t$ ， $z=0$

$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$

$d\boldsymbol{r}(t)=(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\,dt$

$$\therefore w=\int_c \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_3^0 (8t^2\boldsymbol{i}-16t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\,dt=72$$

14. 循直線 $y=2x$ ， $z=0$ ，從 $(0,0,0)$ 至 $(3,6,0)$

解：與13.題同理

$$w=\int_c \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=0}^{t=3} \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}=-72$$

15. 循直線 $y=2x$ ， $z=2x$ ，從 $(0,0,0)$ 至 $(3,6,6)$

解： $x=t$ ， $y=z=2t$

$\therefore \boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$ ， $d\boldsymbol{r}(t)=(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\,dt$

$$w=\int_0^3 (8t^2\boldsymbol{i}-16t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\,dt$$

$$=\int_0^3 (8t^2-32t+4)\,dt=\left(\frac{8}{3}t^3-16t^2+4t\right)\Big|_0^3=-60$$

16. 循抛物線 $y=\frac{2}{3}x^2$ ， $z=0$ 之路徑由 $(0,0,0)$ 至 $(3,6,0)$

解： $x=t$ ， $y=\frac{2}{3}t^2$ ， $z=0$

$\therefore \boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}t^2\boldsymbol{j}$ ， $d\boldsymbol{r}(t)=\left(\boldsymbol{i}+\frac{4}{3}t\boldsymbol{j}\right)dt$

$$w=\int_0^3 \left(\frac{8}{3}t^3\boldsymbol{i}-\frac{16}{3}t^2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}+\frac{4}{3}t\boldsymbol{j}\right)dt$$

$$=\int_0^3 \left(\frac{8}{3}t^3-\frac{64}{9}t^3\right)dt=\int_0^3 -\frac{40}{9}t^3\,dt$$

$$=-\frac{10}{9}t^4\Big|_0^3=-90$$

17. 繞圓 $x^2+y^2=4$ ， $z=0$ 從 $(2,0,0)$ 至 $(2,0,0)$

解：$x=2\cos t$ ，$y=2\sin t$ ，$z=0$

$\therefore \boldsymbol{r}(t)=2\cos t\,\boldsymbol{i}+2\sin t\,\boldsymbol{j}$

$d\boldsymbol{r}(t)=(-2\sin t\,\boldsymbol{i}+2\cos t\,\boldsymbol{j})\,dt$

$$w=\int_0^{\pi}(8\cos t\sin t\,\boldsymbol{i}-16\sin t\,\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(-2\sin t\,\boldsymbol{i}+2\cos t\,\boldsymbol{j})\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(-16\cos t\sin^2 t-32\sin t\cos t)\,dt$$

$$=(-\frac{16}{3}\sin^3 t-16\sin^2 t)\Big|_0^{\pi}=0$$

18. 應用梯形法則（18-5節），計算 $\int_c f(x,y)\,ds$ 循直線 $y=x$ ，從 (0,0) 至 (1,1) 之積分值，其中 $f(x,y)$ ，有下列各值：

$f(0,0)=1.0$ ，$f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=1.5$ ，$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1.7$ ，$f(\frac{3}{4},\frac{3}{4})=1.5$

$f(1,1)=1.0$

解：$\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+t\,\boldsymbol{j}$ ，$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$

$ds=|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt=\sqrt{2}\,dt$

$$\therefore \int_c f(x,y)\,ds=\int_0^1\sqrt{2}f(t,t)\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[f(0,0)+2f(\frac{1}{4},\frac{1}{4})+2f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4},\frac{3}{4})+f(1,1)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[1.0+2\times1.5+2\times1.7+2\times1.5+1.0\right]$$

$$\doteq 2.015$$

19. 設 $\boldsymbol{p}$ 爲定義於曲線 c 上的向量函數，並假設 $|\boldsymbol{p}|$ 有界，即存在某一正數 M 使 $|\boldsymbol{p}|<M$ ，試設

$$\left|\int_c \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}\right|<Ml$$ ，l 爲曲線 c 之長

證：$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\le|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ （θ 爲 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之夾角），現應用此式來證明：

$$\left|\int_c \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}\right|\le\int_c\left|\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{r}\right|\le\int_c|\boldsymbol{p}||d\boldsymbol{r}|$$

$$< \int_c M\,ds \quad (\ |d\boldsymbol{r}| = ds\ )$$

$$= M \int_c ds = Ml$$ ，得證

20. 應用(8)式，求力 $P = x\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$ 循直線方向由 (0,0,0) 至 (1,1,0) 所作功的絕對值的上界，由積分方法求 w，並比較兩結果

解：在 (0,0,0) 至 (1,1,0) 之直線上，$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$，

$$\therefore\ |\boldsymbol{P}| = (x^2 + y^4)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}$$

而 $l = |\overline{(0,0,0),(1,1,0)}| = \sqrt{2}$

$$\therefore\ |w| \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$$

又 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}$ ， $x = t$ ， $y = t$

$$d\boldsymbol{r}(t) = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\,dt$$

$$\therefore\ w = \int_0^1 (t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\,dt$$

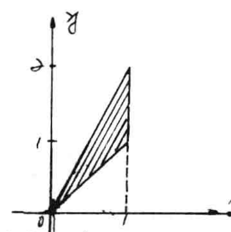
$$= \int_0^1 (t + t^2)\,dt = (\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

顯然 $\frac{5}{6} < 2$

8－3節　二重積分（P.329）

習題（P.334）

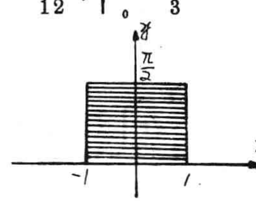
描述積分區域並計算其值



1. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2x} (1 + x^2 + y^2)\,dy\,dx$

解：原式 $= \displaystyle\int_0^1 [(1 + x^2)y + \frac{1}{3}y^3]\Big|_x^{2x} dx$

$$= \int_0^1 (x + x^3 + \frac{7x^3}{3})\,dx = (\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{7x^4}{12})\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

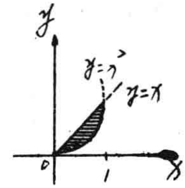


2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{-1}^1 x^2y^2\,dx\,dy$

解：原式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{-1}^1 dy$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} y^2 dy=\frac{2}{9} y^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{36}$$

3. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1-xy)\, dy\, dx$

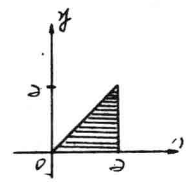


解：原式$=\int_0^1 \left(y-\frac{1}{2} x y^2\right) \Big|_{x^2}^{x} dx$

$$=\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2} x^3-x^2+\frac{1}{2} x^5\right) dx$$

$$=\left(\frac{1}{2} x^2-\frac{1}{8} x^4-\frac{1}{3} x^3+\frac{1}{12} x^6\right) \Big|_0^1 =\frac{1}{8}$$

4. $\int_0^2 \int_0^x e^{x+y}\, dydx$



解：原式$=\int_0^2 e^{x+y} \Big|_0^x dx$

$$=\int_0^2 (e^{2x}-e^x)\, dx$$

$$=\left(\frac{1}{2} e^{2x}-e^x\right) \Big|_0^2 =\frac{1}{2} e^4-e^2+\frac{1}{2}$$

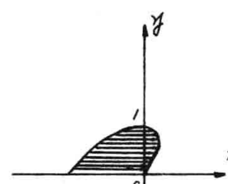
5. $\int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r dr d\theta$

解：原式$=\int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1-\cos\theta)^2\, d\theta$

$$=\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta$$

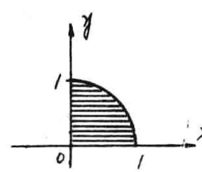
$$=\frac{1}{2}\left(\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right) \Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{3\pi}{4}$$



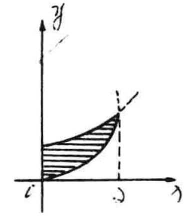
6. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\, dydx$

解：作極坐標變換，得



原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$

7. $\int_0^2 \int_{\sinh x^2}^{\cosh x^2} x\,dy\,dx$

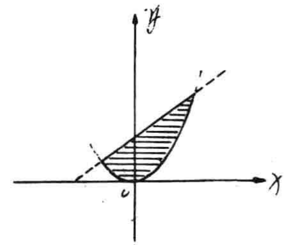


解：原式 $= \int_0^2 (x\cosh x^2 - x\sinh x^2)\,dx$

$= \frac{1}{2}(\sinh x^2 - \cosh x^2)\Big|_0^2$

$= \frac{1}{2}(\sinh 4 - \cosh 4 + 1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-4})$

8. $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} (x+y)\,dy\,dx$



解：原式 $= \int_{-1}^2 (xy + \frac{1}{2}y^2)\Big|_{x^2}^{x+2} dx$

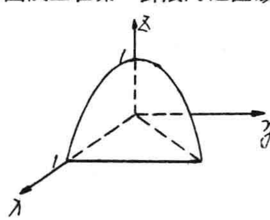
$= \int_{-1}^2 (2 + 4x + \frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4)\,dx$

$= (2x + 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5)\Big|^2$

$= \frac{189}{20}$

求下列空間區域之體積

9. 由圓柱面 $x^2 + z^2 = 1$，平面 $y=0$，$z=0$，$x=y$ 所圍成並在第一卦限內之區域

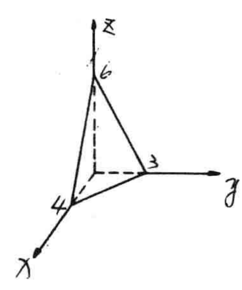


解：$v = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\;dy\,dx$

$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{3}$

10. 第一卦限中，平面 $3x + 4y + 2z = 12$ 所切之四面體



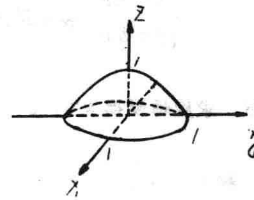
解：$v = \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3}{4}x} (6 - \frac{3}{2}x - 2y)\,dy\,dx$

$= \int_0^4 (6y - \frac{3}{2}xy - y^2)\Big|_0^{3-\frac{3}{4}x} dx$

$= \int_0^4 (9 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{16}x^2)\,dx$

$$=9x-\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{16}x^3\Big|_0^4=12$$

11. xy－面與拋物面 $z=1-x^2-y^2$ 間之區域



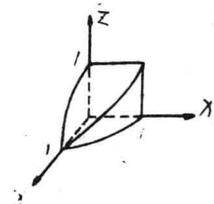
解：應用柱面坐標 $x=r\cos\theta$

$y=\sin\theta$，$z=z$，得

$$v=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

12. 第一卦限中，曲面 $y=1-x^2$，$z=1-x^2$ 與三坐標面所圍之區域



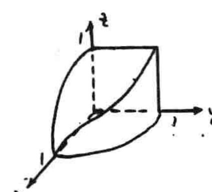
解：$$v=\int_0^1\int_0^{1-x^2}(1-x^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1(1-x^2)^2\,dx$$

$$=\int_0^1(1-2x^2+x^4)\,dx$$

$$=\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}$$

13. 柱面 $x^2+y^2=1$，$y^2+z^2=1$ 所圍之區域



解：由對稱關係，$v=8v_1$，其中 v_1 爲第一卦限之體積

$$v_1=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1(1-y^2)\,dy$$

$$=\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\therefore v=8\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$$

14. 求變換 $x=u+a$，$y=v+b$ 之雅可比行列式與 $x=au$，$y=bv$ 之放大率，並解釋其幾何意義

解：$$\begin{cases}x=u+a\\y=v+b\end{cases}\Rightarrow J_1=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$\begin{cases}x=au\\y=bv\end{cases}\Rightarrow J_2=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}a&0\\0&b\end{vmatrix}=ab$$

$\begin{cases} x=u+a \\ y=v+b \end{cases}$ 表示平移變換，其體積元不變（$J_1=1$）

$\begin{cases} x=au \\ y=bv \end{cases}$ 表示放大變換，uv一面之體積元，經變換後，在 xy一面放大 ab 倍

（$J_2=ab$）

15. 求旋轉變換 $x=u\cos\phi-v\sin\phi$，$y=u\sin\phi+v\cos\phi$ 之雅各比行列式

解：$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{vmatrix}=1$

下列各題，以極坐標計算 $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ 之值

16. $f=e^{-x^2-y^2}$，R：$x^2+y^2\le 1$

解：$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$

$=2\pi\left(-\dfrac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^1=(\ \ -e^{-1})\pi$

17. $f=2(x+y)$，R：$x^2+y^2\le 9$，$x\ge 0$

解：$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 2r^2(\cos\theta+\sin\theta)\,dr\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 18(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=18(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=36$

18. $f=\cos(x^2+y^2)$　R：$x^2+y^2\le\dfrac{\pi}{2}$，$y\ge 0$

解：$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} r\cos r^2\,dr\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}\,d\theta=\dfrac{\pi}{2}$

下列各題中，求區域R中，密度爲$f(x,y)$質量之重心

19. $f(x,y)=xy$，R爲長方形$0\le x\le 2$，$0\le y\le 4$

解： $M=\int_0^2\int_0^4 xy\,dy\,dx=\left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^4 y\,dy\right)=16$

$M\bar{x}=\int_0^2\int_0^4 x\cdot xy\,dy\,dx=\left(\int_0^2 x^2\,dx\right)\left(\int_0^4 y\,dy\right)=\frac{64}{3}$

$\therefore \bar{x}=\frac{1}{16}\cdot\frac{64}{3}=\frac{4}{3}$

$M\bar{y}=\int_0^2\int_0^4 y\cdot xy\,dy\,dx=\left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^4 y^2\,dy\right)=\frac{128}{3}$

$\therefore \bar{y}=\frac{1}{16}\cdot\frac{128}{3}=\frac{8}{3}$

20. $f(x,y)=1$，R為 $x^2+y^2\le a^2$ 在第一象限中的區域

解：$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\,dr\,d\theta=\frac{a^2}{4}\pi$

$M\bar{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\left(\int_0^a r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)=\frac{a^3}{3}$

$\therefore \bar{x}=\frac{4}{a^2\pi}\,\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3\pi}a$

$M\bar{y}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\sin\theta\,dr\,d\theta=\left(\int_0^a r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\right)=\frac{a^3}{3}$

$\therefore \bar{y}=\frac{4}{a^2\pi}\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3\pi}a$

21. $f(x,y)=x^2+y^2$，R與20.題同

解： $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{8}a^4$

$M\bar{x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4\cos\theta\,dr\,d\theta=\frac{a^5}{5}$， $\therefore \bar{x}=\frac{8}{a^4\pi}\,\frac{a^5}{5}=\frac{8a}{5\pi}$

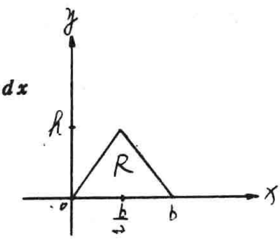
$M\bar{y}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4\sin\theta\,dr\,d\theta=\frac{a^5}{5}$， $\therefore \bar{y}=\frac{8}{a^4\pi}\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{8a}{5\pi}$

下列各圖表示R的區域，其密度 $f(x,y)=1$，求慣量 I_x，I_y，I_o

22.解： $I_x=\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{2h}{b}x} y^2\,dy\,dx+\int_{\frac{b}{2}}^{b}\int_0^{\frac{2h}{b}(b-x)} y^2\,dy\,dx$

$$=\frac{b\,h^3}{24}+\frac{b\,h^3}{24}=\frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_y=\int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{2h}{b}x}x^2\,dy\,dx+\int_{\frac{b}{2}}^{b}\int_0^{\frac{2h}{b}(b-x)}x^2\,dy\,dx$$



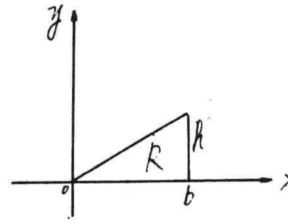
$$=\frac{b^3h}{32}+\frac{11}{96}\,b^3h=\frac{7}{48}\,b^3h$$

$$I_o=I_x+I_y=\frac{b\,h}{48}\,(4h^2+7b^2)$$

23. 解： $$I_x=\int_0^{b}\int_0^{\frac{h}{b}x}y^2\,dy\,dx=\frac{b\,h^3}{12}$$

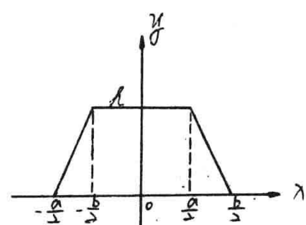
$$I_y=\int_0^{b}\int_0^{\frac{h}{b}x}x^2\,dy\,dx=\frac{b^3h}{4}$$

$$I_o=I_x+I_y=\frac{b\,h}{12}\,(h^2+3b^2)$$



24. 解： $$I_x=\int_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{h\left(x+\frac{b}{2}\right)}{-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}}y^2\,dx\,dy$$

$$+\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_0^{h}y^2\,dy\,dx$$



$$+\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{h\left(x-\frac{b}{2}\right)}{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}}y^2\,dy\,dx$$

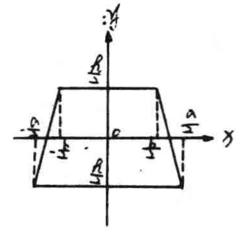
$$=\frac{(b-a)h^3}{24}+\frac{ah^3}{3}+\frac{(b-a)\,h^3}{24}=\frac{h^3}{12}\,(3a+b)$$

$$I_y=\int_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{h\left(x+\frac{b}{2}\right)}{-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}}x^2\,dy\,dx+\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_0^{h}x^2\,dy\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{h\left(x-\frac{b}{2}\right)}{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}}x^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{h(b^4-a^4)}{48(b-a)}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{h^3(3a+b)}{12} + \frac{h(b^4-a^4)}{48(b-a)}$$

25. 解：



$$I_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{2h}{b-a}\left(x+\frac{a+b}{4}\right)} y^2\,dy\,dx$$

$$+ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\,dy\,dx + \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{2h}{a-b}\left(x-\frac{a+b}{4}\right)} y^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{(a+b)h^3}{24}$$

$$I_y = \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{2h}{b-a}\left(x+\frac{a+b}{4}\right)} x^2\,dy\,dx + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2\,dy\,dx + \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{2h}{a-b}\left(x-\frac{a+b}{4}\right)} x^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{(a^4-b^4)h}{48(a-b)}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{h}{48(a-b)}\left[2h^2(a^2-b^2) + (a^4-b^4)\right]$$

8－4節 二重積分至線積分的變換（P.336）

習題（P.339）

應用格林定理計算，下列各積分值，並以直接運算之結果驗證

1. $\int_c (y\,dy + 2x\,dy)$ c 爲 $0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$ 之邊界（反時針方向）

解：$\int_c (y\,dx + 2x\,dy) = \iint_R (2-1)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 dx\,dy = 1$

2. $\int_c [\,y^3\,dx + (x^3+3y^2x)\,dy\,]$ c 爲 $y=x^2$，$y=x$，$0 \le x \le 1$ 間區域之邊界（反時針方向）

解：原式 $= \iint_R (3x^2+3y^2-3y^2)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 3x^2 dy\, dx = \int_0^1 3x^2 (x - x^2)\, dx = \frac{3}{20}$$

3. $\oint_c [2xy\,dx + (e^x + x^2)\,dy]$, c 為以 (0,0),(1,0)、(1,1) 為頂點的三角形的邊界(順時針方向)

解:原式 $= -\iint_R (e^x + 2x - 2x)\, dx\, dy$

$$= -\int_0^1 \int_0^x e^x dy\, dx = -\int_0^1 x e^x dx = -(x-1)e^x \Big|_0^1 = -1$$

4. $\oint_c (-xy^2 dx + x^2 y\, dy)$　c 為第一象限內 $y = 1 - x^2$ 所圍區域邊界(反時針方向)

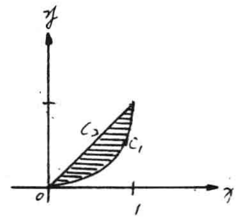
解:原式 $= \iint_R (2xy + 2xy)\, dx\, dy$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} 4xy\, dy\, dx = \int_0^1 (2x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

$$= \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3}x^6\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

應用例一中之公式,求下列平面區域之面積

5. 第一象限中,由 $y = x$ 與 $y = x^3$ 所圍之區域

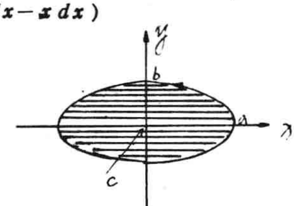


解:$A = \frac{1}{2} \oint_c (x\,dy - y\,dx)$

$$= \frac{1}{2} \int_{c_1} (x\,dy - y\,dx) + \frac{1}{2} \int_{c_2} (x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x \cdot 3x^2 dx - x^3 dx) + \frac{1}{2} \int_1^0 (x\,dx - x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$



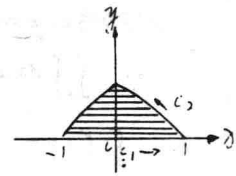
6. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之內部

解:令 $x = a\cos\theta$,則 $y = b\sin\theta$

$$\frac{1}{2} \oint_c (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a\cos\theta)(b\cos\theta)d\theta - (b\sin\theta)(-a\sin\theta)\,d\theta]$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = ab\pi$$

7. 上半平面由 $y=1-x^4$ 所圍之區域



解：$A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_c (x\,dy-y\,dx)$

$$=\frac{1}{2}\int_{c_1}(x\,dy-y\,dx)+\frac{1}{2}\int_{c_2}(x\,dy-y\,dx)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x\cdot 0-0\cdot dx)+\frac{1}{2}\int_{1}^{-1}[x(-4x^3)dx-(1-x^4)dx]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x^4+1)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x^5+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{5}$$

下列各題中，給予 $f\,dx+g\,dy$，應用<u>格林</u>定理計算 $\displaystyle\int_c (f\,dx+g\,dy)$ 其中之 c 爲反時針方向之閉曲線

8. $y\,dx-x\,dy$，c 爲正方形 $0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$ 之邊界

解：$\displaystyle\int_c (y\,dx-x\,dy)=\iint_R(-1-1)\,dx\,dy=-2\int_0^1\int_0^1 dx\,dy=-2$

9. $(3x^2+y)\,dx+4y^2\,dy$，c 爲以 $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,2)$ 爲頂點之三角形之邊界

解：$\displaystyle\int_c [(3x^2+y)dx+4y^2dy]=\iint_R(-1)\,dy\,dx=(-1)\iint_R dy\,dx=-1$

10. $(x^2+y^2)\,dy$，c 爲正方形 $2\leq x\leq 4$，$2\leq y\leq 4$ 之邊界

解：$\displaystyle\int_c (x^2+y^2)\,dy=\iint_R 2x\,dy\,dx=2\int_2^4\int_2^4 x\,dy\,dx$

$$=2\int_2^4 2x\,dx=2x^2\Big|_2^4=24$$

11. $2xy^3\,dx+3x^2y^2\,dy$，c：$x^2+y^2=1$

解：$\displaystyle\int_c (2xy^3dx+3x^2y^2dy)=\iint_R(6xy^2-6xy^2)\,dx\,dy=0$

12. $(2x-y)\,dx+(x+3y)\,dy$，c：$x^2+4y^2=4$

解：$\displaystyle\int_c [(2x-y)dx+(x+3y)dy=\iint_R(1+1)\,dx\,dy$

$$=2\iint_R dx\,dy$$

因　$x^2+4y^2=4\Rightarrow\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$ 爲一橢圓形