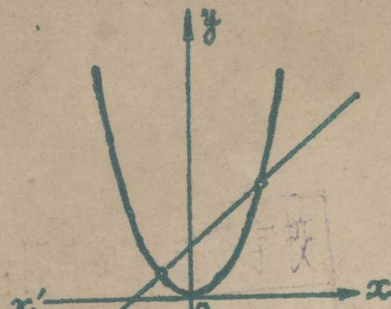
初中数学复习

（下　册）



合肥市教育局编

目录

几何

平 面 几 何

第一单元 直 线 形

复 习 要 点

一 几何命题：

1．名词解释：几何命题，叙述一个几何事实所用的完整语句。正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题。

定义：说明名词或术语的意义的命题。

公理：不加证明而采用的真命题。

定理：可以用推理的方法证明是正确的命题。

推论（系）：从公理或定理直接推出的命题。

2．常用公理：

等量公理：①等量加等量，和相等。

②等量减等量，差相等。

③等量的同倍量相等。

④等量的同分量相等。

⑤在等式或不等式中，一个量可以用它的等量来代替。

不等量公理：①不等量加上或减去等量，原来大的仍大。

②不等量乘以或除以同一个正数，原来大的仍大。

③不等量加不等量，大量的和大于小量的和。

④等量减不等量，减去大的差反而小。

⑤第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量。

⑥全量大于它的任一部分。

平行公理：过直线外一点能作且只能作一条直线和这条直线平行。

其他公理：①过两点能作且只能作一条直线。

②两点间的连线中以线段最短。

③几何图形可以在空间移动而不改变它的形状和大小。

3. 命题的组成：每个命题都可以分为两部分，条件（题设）和结论（题断）。条件是已知的，结论是需要加以证明的。一般形式为：若A则B（如果A那么B，已知A求证B）如，若三角形两边相等，则这两边所对的角也相等。

4. 几何命题的证明：按照题设条件，根据图形和有关定义，已知的公理定理，用逻辑推理的方法论证结论正确，叫做命题的证明。

Ⅰ. 直按证法：分析法，从结论逐步逆推，直到所需条件和已知条件符合为止。

综合法：从条件直推结论。 这两种方法统称直接证法，它都是就本命题直接加以证明的。在证明过程中，往往又有迭合、对称、旋转等方法可以采取。

Ⅱ. 间接证法：同一法，要证明一个命题正确，若知其条件和结论是唯一的（否则不能用此法）则可改证逆命题来证明原命题。

归谬法：先作出和题断相反的假定，由此推出和已知条件或者定义、公理、定理相矛盾的结果，从而断定所作的假定不成立，因此确定原命题正确。这种方法

又分穷举法和反证法。

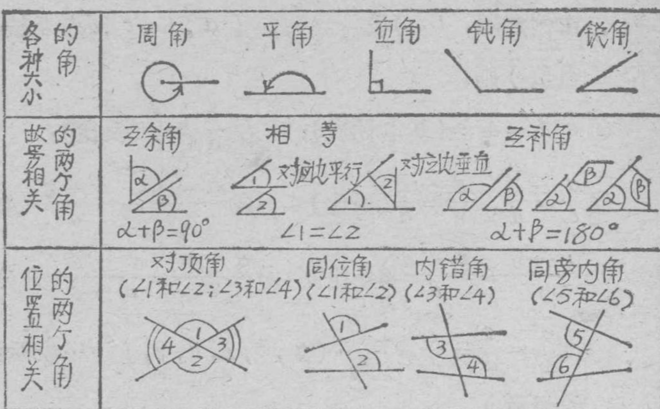
二、直线、射线、线段和角

1. 直线、射线、线段：用直尺把两点连结起来，就得到线段。线段有两个端点。线段向一方无限延伸，就形成射线。射线有一个端点，线段向两方无限延伸，就形成直线。直线无端点。

2. 相交线：

Ⅰ. 角：以一点为公共端点的两条射线所组成的图形。

α　关于角的一些基本概念：



b　有关定理：①对顶角相等；　②一个角平分线上的任意一点到这个角的两边距离相等。

Ⅱ. 垂线：相交成直角的两条直线中的一条叫做另一条的垂线。它们的交点叫垂足，两直线称为互相垂直。

有关定理：

①从一点(线上或线外)向直线引垂线，只能引一条；

②从直线外一点到这条直线的所有线段中，垂直线段

最短；

③线段垂直平分线上任意一点，到这条线段两端距离相等。

3．平行线：α 判定，两条直线被第三条直线所截，具有下列条件之一，则两直线平行：①同位角相等； ②内错角相等； ③同旁内角互补。

b 性质，两条平行线被第三条直线所截，①同位角相等， ②内错角相等， ③同旁内角互补。

4．成比例线段：

Ⅰ．比例定理，（α）设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，（a，b，c，d表示线段的量数）则，

①$ad=bc$（基本性质）； ②$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$（反比）；

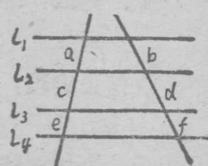
③$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$（更比） ④$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$（合比）

⑤$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$（分比） ⑥$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$（合分比）

（b）设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$（$a$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$……表示线段的量数）

则$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}$（等比）

Ⅱ．平行线分线段成比例定理：两条直线被一组平行线截得的线段对应成比例。



如图，设$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$

则$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

三　三角形与相似形

1. 三角形：Ⅰ．一般三角形的性质；

①三角形的两边和（差）大（小）于第三边；

②三角形的内角和等于180°，三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和、三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角。

③ n 边形内角和为 $(n-2)180°$、n 边形外角和为360°。

④在一个三角形中，边和角有以下关系，等边等对角，等角对等边；大边对大角，大角对大边。

⑤三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半。

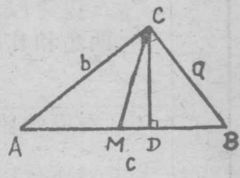
⑥三角形的五心（重心，内心，外心，垂心，旁心）；三角形的三条中线交于一点，这点叫三角形重心，重心与顶点距离等于过这顶点的中线的三分之二；三条角平分线交于一点，它是三角形内切园园心，叫做三角形的内心，三角形三边的中垂线交于一点，它是三角形外接园园心，叫做三角形的外心。

三角形三条高交于一点，这点叫做三角形的垂心。

三角形任意两外角平分线和第三内角平分线相交于一点，它是三角形旁切园园心，这点叫三角形的旁心。

Ⅱ．特殊三角形。

① 直角三角形：如图，$\angle c=90°$，CD是斜边上的高，CM是斜边上的中线，AD是AC在AB上的射影，BD是BC在AB上的射影



α 射影定理：$BC^2=AB\cdot DB$　$AC^2=AB\cdot AD$

$CD^2=AD\cdot DB$

b　勾股定理：$\alpha^2+b^2=c^2$

c　直角三角形斜边中线定理：　$CM=\dfrac{A\text{Б}}{2}$

d　含30°角的直角形中，30°角的对边等于斜边的一半。

② 等腰、等边三角形

α　等腰三角形两底角相等，等腰三角形的顶角平分线，底边中线，底边高线，对称轴，四线合一。

b　等边三角形除具有等腰三角形的一切性质外，尚有它的各内角都等于60°，它的外心、内心、重心垂心合一等性质。

Ⅲ. 两个三角形的全等与相似

(1) 全等三角形

	一　般　三　角　形	直　角　三　角　形
判 定	α，两角和夹边对应相等 $\alpha.s.\alpha$ b，两边及其夹角对应相等 $s.\alpha.s$ c，三边对应相等 $s.s.s$ d，两角和其中一角的对边相等 $\alpha.\alpha.s$	α，两边对应相等 b，一锐角及一边对应相等
性 质	α，对应角相等 b，对应线段（边、高、中线、角平分线……）相等	

（2）相似三角形

	一　般　三　角　形	直角三角形
判定	α，两角对应相等， b，两边成比例，夹角相等 c，三边成比例	α，一个锐角相等 b，两边对应成比例
性质	α，对应角相等 b，对应边成比例 c，对应线段的比等于相似比 d，面积的比，等于相似比的平方	

2. 基本作图题：

Ⅰ 关于直线和角的基本作图题

α，过两个已知点作一条直线；

b，作一个角等于已知角；

c，平分一个已知角；

d，过直线上（外）一点作这条直线的垂线；

e，作已知线段的中垂线；

f，过已知直线外一点作一条直线平行于已知直线。

Ⅱ 关于三角形的基本作图题：

α，已知三边作三角形；

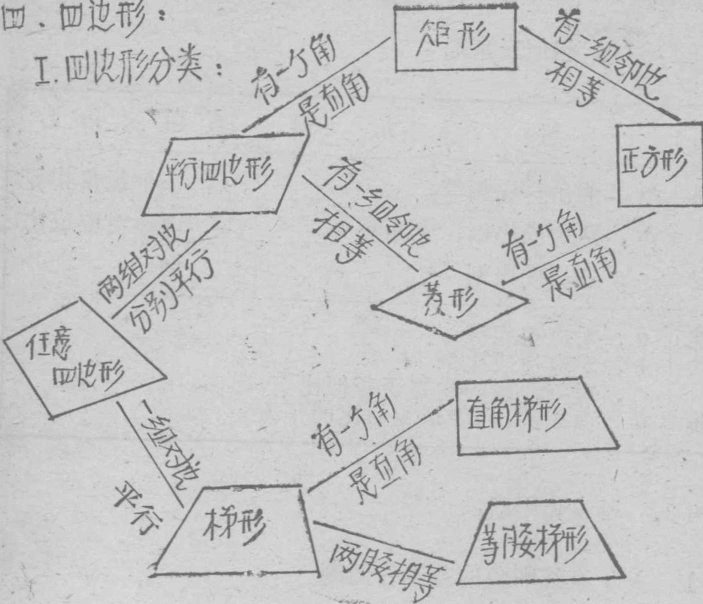
b，已知两边和夹角作三角形。

c，已知两角和夹边作三角形。

d，已知斜边和一条直角边作三角形。

四．四边形：

Ⅰ.四边形分类：



Ⅱ 面积公式：$S_{\square} = a h_{a} = ab\sin\theta$（$a$，$b$为邻边，

h_a为a边上的高，θ为a，b夹角）

$S_{\diamond} = \frac{1}{2} l_1 l_2$（$l_1 l_2$是两条对角线）

$S_{梯} = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$（$a$，$b$是上，下

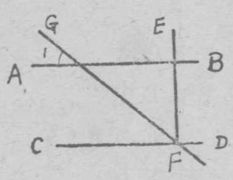
底，h是高，m是中位线）$[m = \frac{1}{2}(a+b)]$

Ⅲ 几种持殊四边形的性质与判定：

	性质			判定
	角	边	对角线	
平行四边形	对角相等	对边平行且相等，	两条对角线互相平分	①两组对边分别平行②两组对边分别相等③一组对边平行且相等④两组对角分别相等⑤两条对角线互相平分
矩形	四个角都是直角	对边平行且相等	两条对角线相等且互相平分	①有三个角是直角②是平行四边形，且有个角是直角③是平行四边形并且两条对角线相等
菱形	对角相等	对边平行，四条边都相等	两条对角线互相垂直平分，每条对角线平分一组对角	①四条边都相等②是平行四边形，且有一组邻边相等③是平行四边形，且两条对角线互相垂直
正方形	四个角都是直角	对边平行，四条边都相等	两条对角线互相垂直平分且相等，每条对角线平分一组对角	①是矩形，且有一组邻边相等②是菱形，且有一个角是直角。③对角线相等且互相垂直平分的四边形
等腰梯形	同一底上的两个角相等	两底平行两腰相等	两条对角线相等	是梯形，并且同一底上的两个角相等。

例　题

例1　如图，$AB \parallel CD$，$EF \perp CD$，$\angle 1 = 40°$求$\angle EFG$。



解：$\because$ $AB \parallel CD$

$\therefore$ $\angle CFG = \angle 1 = 40°$

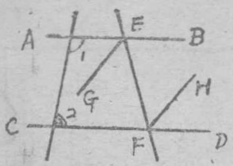
又 $\because$ $EF \perp CD$

$\therefore$ $\angle CFE = 90°$

而 $\angle EFG = \angle CFE - \angle CFG = 90° - 40°$

$\therefore$ $\angle EFG = 50°$

例2　如图，$\angle 1$和$\angle 2$互为补角，EG，FH分别是$\angle AEF$，$\angle EFD$的平分线，求证：$EG \parallel FH$



证明：$\angle 1$和$\angle 2$互为补角，即$\angle 1+\angle 2=180°$

$\therefore$ $AB \parallel CD$

$\therefore$ $\angle AEF=\angle DFE$

EG，FH分别平分$\angle AEF$、$\angle EFD$

$\therefore$ $\angle GEF=\angle HFE$（等量的同分量相等）

$\therefore$ $EG \parallel FH$

例3　已知$AO=\frac{1}{2}DE$，$EO \perp DB$，求证：$\angle D=\frac{1}{3}\angle AOB$

证明：取DE的中点F

则　$OF=\frac{1}{2}DE=AO$

$\therefore$ $\angle A=\angle AFO$

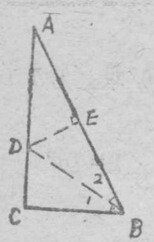
又 $\because$ $\angle AOB=\angle A+\angle D=\angle AFO+\angle D$

而　$\angle AFO=2\angle D$　　$\therefore$ $\angle D=\frac{1}{3}\angle AOB$

例4　在$\triangle ABC$中，已知$\angle B=2\angle A$，$AB=2BC$

求证：$\angle C=90°$

证明：作$\angle B$的平分线BD交AC于D点，过D点作AB垂线DE交AB于E点。



$\because$ $\angle B=2\angle A$

$\therefore$ $\angle DBE=\angle A$

又　$DE \perp AB$

$\therefore$ $AE=BE=BC$

在$\triangle DBE$和$\triangle BCD$中

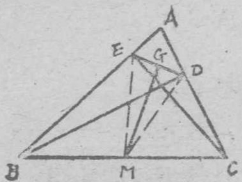
$\because$ $\angle 1=\angle 2$　　$BE=BC$

$BD=BD$　　$\therefore$ $\triangle DBE \cong \triangle BCD$

$\therefore$ $AC \perp BC$　$\therefore$ $\angle C=90°$

例5　在$\triangle ABC$中，BD、CE是高，M是BC中点，$MG \perp DE$　　求证：$EG=GD$

证明：连结EM、DM



$\because$ $BD \perp AC$

$\therefore$ $DM = \frac{1}{2}BC$

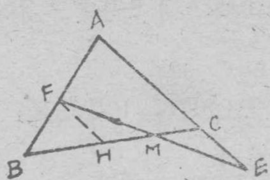
同理$EM = \frac{1}{2}BC$

$\therefore$ $EM = DM$

又 $\because$ $MG \perp ED$

$\therefore$ $EG = ED$（等腰三角形底边上的中线和高互相重合）

例6 如图，已知$AB = AC$，E为AC延长线上的一点，且有$BF = CE$，连EF交BC于M，求证：$MF = ME$



证明：过F点作$FH \parallel AE$交BC于H

$\angle FHB = \angle ACB$

又 $\because$ $\angle B = \angle ACB$

$\therefore$ $BF = FH = CE$

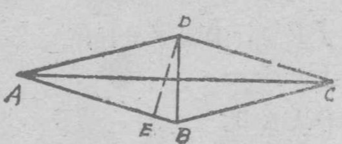
而$\angle FMH = \angle CME$

$\angle HFM = \angle E$

$\therefore$ $\triangle MFH \cong \triangle MCE$

$\therefore$ $ME = MF$

例7 如图，已知菱形中，$\angle A < 90°$ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{BD}$，求角A。



解：$\because$ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{BD}$

即 $AB^2 = AC \cdot BD$

$S\Diamond = \frac{1}{2}AC \cdot BD$

$\therefore$ $S\Diamond = \frac{1}{2}AB^2$

过D作$DE \perp AB$于E 而 $S\Diamond = AB \cdot DE$

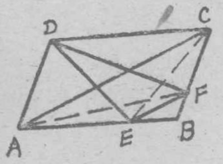
故 $\frac{1}{2}AB^2 = AB \cdot DE$ $\therefore$ $DE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AD$

在 $Rt\triangle ADE$中 $\because$ $DE = \frac{1}{2}AD$

$\therefore$ $\angle A = 30°$

例8　如图，在▱ABCD中，EF∥AC，

求证：$S_{\triangle AED}=S_{\triangle CFD}$



证明：连AF，CE

∵　ABCD是平行四边形

∴　DC∥AB，AD∥BC

∴ $S_{\triangle AED}=S_{\triangle ACE}$

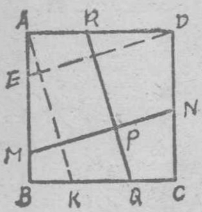
$S_{\triangle CDF}=S_{\triangle AFC}$　　∵　EF∥AC

∴　$S_{\triangle AEC}=S_{\triangle AFC}$　故 $S_{\triangle AED}=S_{\triangle CFD}$

求证面积相等的题目，证明时往往要用到“同底等高的两三个角形等积”这一推论。

例9　如图，ABCD是正方形，RQ⊥MN，P是垂足，

求证：MN＝RQ



证明：过D作DE∥MN交AB于E，过A作AK∥RQ，交BC于K

在　Rt△ADE与Rt△ABK中，

AD＝AB

∵　AK∥RQ，DE∥MN，

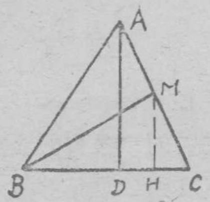
RQ⊥MN

∴　DE⊥AK，而AD⊥AB

∴　∠BAK＝∠ADE　∴　△ADE≌△ABK

∴　AK＝ED，由于AKQR，DNME都是平行四边形　　∴　MN＝RQ

例10　△ABC中，AD为BC边的高线，BM为AC边的中线，若∠CBM＝30°，　　求证：AD＝BM



证明：取CD的中点H，连结MH

则　$MH /\!/ AD$　$AD=2MH$

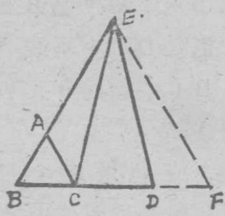
$\angle MHB=\angle ADB=90°$

在　$Rt\triangle BMH$中，

∵　$\angle HBM=30°$

∴　$BM=2MH$　　∴　$AD=BM$

例11　设等边$\triangle ABC$的边长为α，在BC的延长线上取一点D，使$CD=b$，在BA的延长线上取一点E，使$AE=\alpha+b$，试证：$EC=ED$



证明：延长BD至F，使$DF=\alpha$，

则　$BF=BE$

∴　BFE是等边三角形

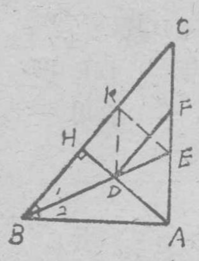
∴　$BE=EF$　　$\angle B=\angle F$

又　$BC=FD=\alpha$

∴　$\triangle BCE\cong\triangle FDE$(S.α.S)

∴　$EC=ED$

例12　$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$\angle B$的平分线交AC边于E，而交BC边的高线于D，经过D点作直线平行于BC而交AC于F，求证：$AE=CF$



证明：过E作$EK\perp BC$于K，连DK

∵　$\angle 1=\angle 2$，$EK\perp BC$，$EA\perp BA$

∴　$EK=EA$，而$\angle EDA=\angle KED$

$=\angle DEA$(等角的余角相等)

∴　$AE=AD$，$EK=AD$

又　EK，AH都垂直于BC

∴　$EK /\!/ AD$

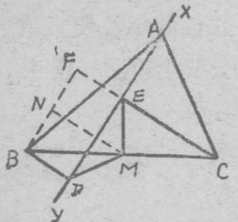
故　AEKD是平行四边形

∴ KD∥CF，由于DF∥KC

∴ CFDK是平行四边形

∴ AE＝DK＝CF　　　故 AE＝CF

例13 过△ABC的B，C二顶点向过顶点A的一条直线XY引垂线BD，CE，求证：BC中点M到二垂足等远。



证明：过B作BF∥XY交CE延长线于F，作MN⊥BF

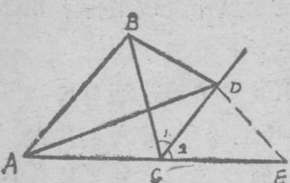
∴ MN∥CF，由于M是BC中点，

∴ N是BF中点，MN是BF中垂线，也是DE中垂线

∴ ME＝MD（本题尚有XY不过形内的情形，同学自己证明）

比较例10—例13可知，证二线段相等，或利用媒介图形（线段，角），或造成全等三角形，亦可利用各种图形中具有的相等线段的性质来证。

例14 D是△ABC外角BCE的平分线上的一点。



求证：AD＋BD＞AC＋BC

证明：在AC延长线上截取CE＝BC，连DE

在△BDC与△EDC中

∠1＝∠2，CD公用

CE＝BC

∴ △BDC≌△EDC（S.α.S）

∴ DE＝BD，在△ADE中 AD＋DE＞AE

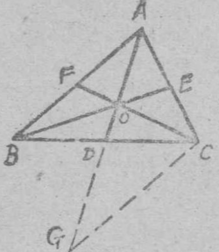
即 AD＋DE＞AC＋CE

∴ AD＋BD＞AC＋BC

例15 三角形三中线[illegible]大于周长的$\frac{3}{4}$

已知：$\triangle ABC$中，AD，BE，CF为三边上中线

求证：$AB+BC+AC>AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)$



证明：延长AD至G，使$DG=AD$

在 $\triangle AGC$中易证$AC+CG>2AD$

$CG=AB$（可证$\triangle ABD\cong\triangle CGD$）

故得 $AD<\frac{1}{2}(AC+AB)$

同理可证：$BE<\frac{1}{2}(CB+AB)$

$CF<\frac{1}{2}(AC+BC)$

三式相加，得，$AD+BE+CF<AB+BC+AC$

设 O为 $\triangle ABC$重心，则$BO=\frac{2}{3}BE$，$AO=\frac{2}{3}AD$，$CO=\frac{2}{3}CF$

在 $\triangle BOC$中，$BO+CO>BC$

即 $\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}CF>BC$

同理，$\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}AD>AB$，$\frac{2}{3}AD+\frac{2}{3}CF>AC$

三式相加，得$\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>AB+BC+AC$

$\therefore$ $AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)$

故有 $AB+BC+AC>AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)$

从例14例15看来，比较线段量数的大小，通常把要比较的线段移置到一个三角形中来，利用三角形两边和（差）大（小）于第三边或三角形中的边角关系来证明。例14采用对称法，例15采用旋转法。

例16 以$\triangle ABC$的AB、AC为边各向外作正方形$ABDE$，$ACFG$ 求证：$BG=CE$，$BG\perp CE$