原书缺页

1-12页

代入，得$\begin{cases} 32a+b=0 \\ 212a+b=100, \end{cases}$

解得　$a=\frac{5}{9}$，　$b=-\frac{160}{9}$

所以　$y=\frac{5}{9}(x-32)$

29、已知圆锥的体积为V，试将园锥的底半径表为其高的函数，并求此函数的定义域。

解：由立体几何知，$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，

因V是常量，r、h是变量，故

$r=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$，

定义域为$0<h<+\infty$

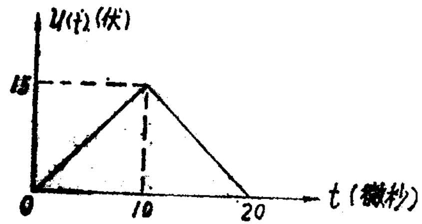
30、脉冲发生器产生一个如图示的三角波，写出关系式

$u=u(t)$　$(0\leqslant t\leqslant +20)$

解：

$$u=u(t)=\begin{cases} \frac{3}{2}t & 0\leqslant t\leqslant 10 \\ -\frac{3}{2}t+30 & 10<t\leqslant 20 \end{cases}$$

见图



30题图

31、指出下列函数的奇偶性：

（1）$y=\sin x$，　　（2）$y=|\sin x|$

（3）$y=|\ln x|$　　（4）$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

（5）$y=\ln^2 x$，　　（6）$y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x}{120}$

解　（1）奇函数，　　（2）偶函数，

（3）非奇非偶，　　（4）偶函数，

（5）非奇非偶，　　（6）奇函数，

32、试证明　$y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数。

证明：因为函数的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$

所以在x及－x处均有定义，

而$f(-x)=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以是奇函数。

33、假设下面所考虑的函数都是定义在$(-l,\ l)$内，

证明：（a）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；（b）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数；偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证明：

设φ是偶函数，ψ是奇函数，且都定义在$(-l,l)$内，

则对$(-l,l)$内的任一点x，φ，ψ有定义，对$-x$也有定义。

(a) 令$F(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$。

则$F(-x)=\varphi_1(-x)+\varphi_2(-x)$

$=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=F(x)$

所以$F(x)$为偶函数。

令$H(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)$

则$H(-x)=\psi_1(-x)+\psi_2(-x)$

$=-[\psi_1(x)+\psi_2(x)]=-H(x)$

所以$H(x)$为奇函数。

(b) 令$T(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$

则$T(-x)=\varphi_1(-x)\cdot\varphi_2(-x)$

$=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)=T(x)$，

所以$T(x)$为偶函数。

令$S(x)=\psi_1(x)\cdot\psi_2(x)$

则$S(-x)=\psi_1(-x)\cdot\psi_2(-x)$

$=[-\psi_1(x)][-\psi_2(x)]$

$=\psi_1(x)\cdot\psi_2(x)=S(x)$

所以$S(x)$为偶函数。

令$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$

则$f(-x)=\varphi(-x)\cdot\psi(-x)$

$=\varphi(x)\cdot[-\psi(x)]$

$=-\varphi(x)\cdot\psi(x)=-f(x)$

所以$f(x)$是奇函数。

34、下列函数，哪个是周期函数？对周期函数指出它的周期。

（1）$y=\sin^2 x$，　　（2）$y=\sin x^2$

（3）$y=\sin x+3\sin\frac{2x}{7}$　（4）$y=\sin\frac{1}{x}$

解：（1）是周期函数，周期为π，

因为$y(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)$

$=(-\sin x)^2=\sin^2 x=y(x)$

（2）不是周期函数。

因为$\sin(x+T)^2=\sin(x^2+2Tx+T^2)$

$=\sin x^2$只有在$T=0$时才成立。

（3）是周期函数，周期为14π，（2π与7π的最小公倍数）。

因为$\sin(x+14\pi)+3\sin\frac{2}{7}(x+14\pi)$

$=\sin x+3\sin(\frac{2}{7}x+4\pi)$

$=\sin x+3\sin\frac{2}{7}x$，

（4）不是周期函数，证法同（2）。

35、下列每对函数是否相同？为什么？

（1）$y=\frac{x}{x}$与$y=1$

（2）$y=2\ln x$与$y=\ln x^2$

（3）$y=x$与$y=\arcsin(\sin x)$

解：（1）$y=\frac{x}{x}$与$y=1$不是同一函数。

因为 $y=\frac{x}{x}$在$x=0$处无定义，

$y=1$在$x=0$处有定义。

（2）$y=2\ln x$与$y=\ln x^2$不是同一函数，

因为：$y=2\ln x$只在（0，$+\infty$）上有定义，而且非奇非偶，但$y=\ln x^2$的定义域为（$-\infty$ 0），（0，$+\infty$），且是偶函数（当$x>0$时，$y=2\ln x=\ln x^2$）

（3）$y=x$与$y=\arcsin(\sin x)$不是同一函数，

因为$y=x$不是周期函数，且值域为（$-\infty$，$+\infty$），而$y=\arcsin(\sin x)$是周期函数，

周期为2π，值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

〔当$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$y=x=\arcsin(\sin x)$〕

36、证明$y=x^2$在（0，5）区间内是增函数。

证明：设$0<x_1<x_2<5$

又$y_1=x_1^2$　$y_2=x_2^2$

$y_2-y_1=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)$

由已知条件　　$x_2+x_1>0$，$x_2-x_1>0$，

所以$y_2-y_1>0$

则$y=x^2$在（0，5）区间内为增函数。

37、求$y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数，并指出直接函数与反函数的定义域和值域。

解：$y=\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为$(-\infty,-1),(-1,+\infty)$，

值域为$(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$

求反函数：

$(1+x)y=1-x$　　$x=\dfrac{1-y}{1+y}$，即反函数为

$y=\dfrac{1-x}{1+x}$　定义域也为$(-\infty,-1),(-1,+\infty)$

值域$(-\infty,-1)(-1,+\infty)$

38、建立$y=1+lg(x+2)$的反函数，并指出直接函数与反函数的值域和定义域。

解：$y=1+lg(x+2)$的定义域为$x>-2$，

值域为　$(-\infty,+\infty)$

求反函数：

$y-1=lg(x+2)$，$x=10^{y-1}-2$

即反函数为　$y=10^{x-1}-2$，定义域为

$(-\infty,+\infty)$　值域为$y>-2$

39、已知函数$y=x^n$，$x>0$，当x与n为何值时，这个函数的值大于（或小于）其反函数的值。

解：考虑到 $x=1$时 $y=1$及$n=0$时 $y=1$，对于n的取值情况，分下列几种情况考虑：

n	$0<x<1$	$x>1$
$n<-1$	大于其反函数	小于其反函数
$-1<n<0$	小于其反函数	大于其反函数
$0<n<1$	大于其反函数	小于其反函数
$1<n$	小于其反函数	大于其反函数

40、指出下列函数是怎样复合而成的。

（1）$y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$，（2）$y=2^{\sin^2 x}$

（3）$y=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$

解：（1）$y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$是由 $y=u^2$，

$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1-x^2$ 复合而成。

（2）$y=2^{\sin^2 x}$是由$y=2^u$，$u=v^2$ $v=\sin x$ 复合而成。

（3）$y=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$是由 $y=\sqrt{u}$

$u=v+\sqrt{v}$，$v=\dfrac{1}{x}$复合而成。

41、把y表示成x的函数：

（1）$v=1+x$，$u=\cos v$，$y=\sqrt{1-u^2}$

（2）$y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=1+lg v$，$v=3+\cos w$，$w=a^x$

解：（1）$y=\sqrt{1-\cos^2(1+x)}=|\sin(1+x)|$

（2）$y=u^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+lg v}=\sqrt{1+lg(3+\cos w)}$

$=\sqrt{1+lg(3+\cos a^x)}$

42、画出$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的图形。

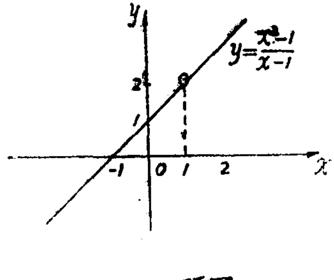
解：1、定义域：$x\neq 1$

2、$x\neq 1$时，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$

故 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的图形　除 $x=1$无定义外，

完全和$y=x+1$一致，

见图



42题图

43、画出 $y=\frac{1}{x^2}$ 的图形。

解：（1）定义域：$x \neq 0$

（2）值域：$0 < y < +\infty$

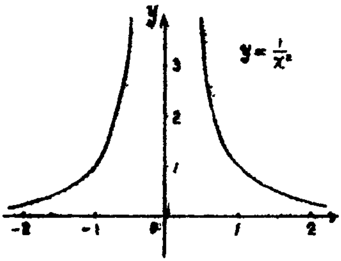
（3）偶函数、对称y轴。

（4）渐近线：

$x \to 0$ 时，$y \to +\infty$

$x \to \pm\infty$ 时，$y \to 0$

（5）与坐标轴无交点。



43 题图

（6）描点：

x	…	$\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	4	1	$\frac{1}{4}$	…

见图。

44. 画出$y=\dfrac{x^2+1}{x}$的图形。

解：（1）定义域$x\neq 0$

（2）值域：由$xy=x^2+1$即$x^2-xy+1=0$

可知，$|y|\geqslant 2$时，方程有解，故值域为

$|y|\geqslant 2$。

（3）奇函数对称于原点，

（4）渐近线：

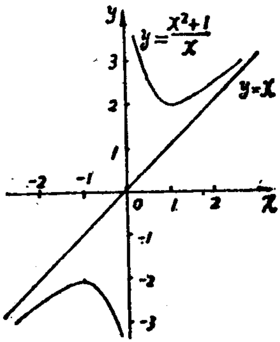
$x\to 0^+$，　$y\to +\infty$，

$x\to 0^-$，　$y\to -\infty$，

又$y=x+\dfrac{1}{x}$，

故当$x\to\pm\infty$时$y\to x$，

（5）无截距，



44题图

（6）描点，

x	…	$\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	…

见图。

45、画出$y=1-\cos x$的图形。

解：（1）定义域$(-\infty,+\infty)$

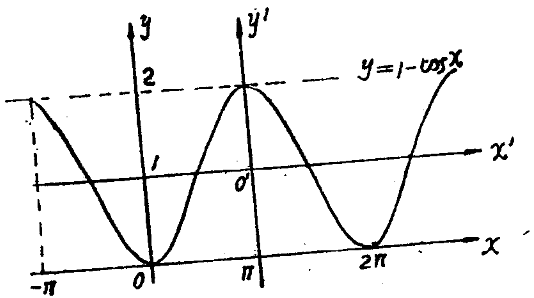
（2）值域：$[0,2]$

（3）偶函数，

（4）周期为2π，

（5）因为$y=1-\cos x=1+\cos(x-\pi)$

所以可先作$y'=\cos x'$的图形，然后把$O'x'$轴向下平移1个单位得ox轴，$o'y'$轴向左平移π得oy轴，见图。



45题图

46、画出$y=\arcsin(\sin x)$的图形

解：（1）定义域$(-\infty,+\infty)$

（2）值域$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

（3）奇函数，

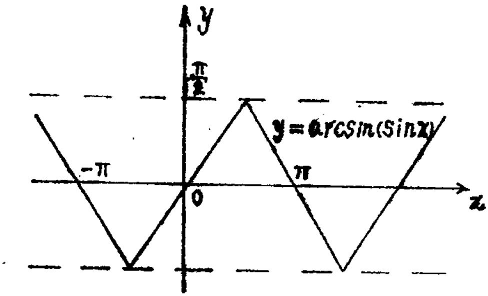
（4）周期为2π，

（5）$x=k\pi$时，$y=0$

（6）在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$内，函数为：

$$y=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

见图。



46题图

47、画出$y=|x+1|+|x-1|$的图形

解：（1）定义域：$(-\infty,+\infty)$

（2）偶函数，

（3）截距：$x=0$时$y=2$，

以下分别考虑对于x的不同取值，

函数的表达式：

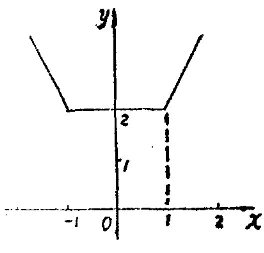
$x\geqslant 1$时，$y=x+1+x-1=2x$

$-1<x<1$时，$y=x+1+1-x=2$

$x\leqslant -1$时，$y=-(x+1)+(-x+1)=-2x$

即：$y=\begin{cases}2x & x\geqslant 1\\ 2 & -1<x<1\\ -2x & x\leqslant -1\end{cases}$

见图



47题图

48、如果已知f(x)的图形，下列函数的图形如何？

（1）$y=\dfrac{1}{2}\left[|f(x)|+f(x)\right]$

（2）$y=\frac{1}{2}\left[|f(x)|-f(x)\right]$

解：（1）当$f(x)\geqslant 0$时，

$$y=\frac{1}{2}\left[|f(x)|+f(x)\right]=f(x),$$

即函数y的图形与f(x)的图形重合，

当$f(x)<0$时，$y=0$

（2）当$f(x)\geqslant 0$时，$y=0$，

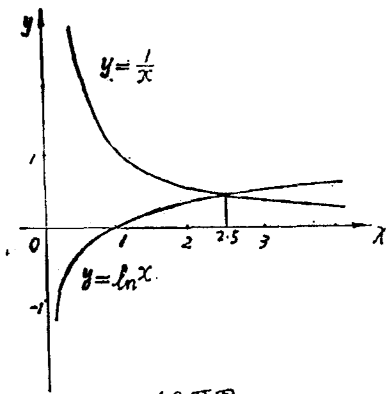
当$f(x)<0$时，函数y的图形与f(x)的图形关于轴对称。

49、用图解法求方程$x\ln x=1$的近似解

解：因为$x=0$时，$\ln x$无定义，

所以可考虑$x\neq 0$的情况，

则$x\ln x=1$　可变为$\ln x=\frac{1}{x}$，



49题图

设$y_1 = \ln x$，　$y_2 = \dfrac{1}{x}$

分别作y_1、y_2的图形，从图上可看出函数图形的交点的横坐标$x \approx 2.5$，则方程$x\ln x = 1$的近似解为$x = 2.5$见图。

50、用图形叠加法作$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$的图形，

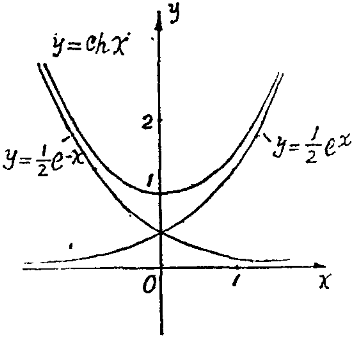
解： 作$y_1 = \dfrac{1}{2}e^x$及$y_2 = \dfrac{1}{2}e^{-x}$的图形，

因为y_1与y_2关于y轴对称，故y的图形关于y轴对称，

$x \to +\infty$时，$y_2 \to 0$，

故$y \to y_1$，又$x \to -\infty$时，$y_1 \to 0$，故$y \to y_2$

如图。



50题图

二　数列的极限及函数的极限

1° 数列（函数）极限的ε—N法（ε—δ法）定义，是对数列（函数）的极限的精确阐述。由定义，可以证明某些数列（函数）的极限，但并未提供一种如何求已知数列（函数）的极限的方法。用定义证明极限，主要就是对任意给定的$\varepsilon>0$，能否确定确实存在一个正整数N（正数δ），使得$n>N$（$|x-x_0|<\delta$）时，$|x_n-a|<\varepsilon$（$|f(x)-A|<\varepsilon$）成立。

2° 关于无穷小量。（1）有限个无穷小量的和（代数和）也是无穷小量；（2）有界函数与无穷小的积是无穷小；（3）无穷小量的阶的比较，一般通过求比值的极限确定。（4）如果函数$f(x)$为无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小量；如果$f(x)\neq 0$为无穷小量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量。

3° 极限的四则运算。

有限个具有极限的函数之和、差、积、商（分母极限不为零）仍有极限，反之不一定成立。

4° 极限的求法：（1）利用极限的四则运算求极限；（2）由极限存在的两个准则求极限；（3）对$\frac{0}{0}$型和