高师函授教材

解析几何习题解

第一册

辽宁教育学院
铁岭地区教育学院 编

高师函授教材

解析几何习题解

（第一册）

前　　言

为了配合东北三省高师函授教材协编组编写的《解析几何讲义》的学习，由辽宁教育学院郝成玉和铁岭地区教育学院武成荣、张九赋、安禹天同志合编了这套《解析几何习题解》。

分两册：第一册为平面部分，第二册为空间部分。

为了培养学员独立思考和解题能力，有利于自学，我们在编写过程中，尽力做到通俗易懂，解答规范，并对其中某些题目，给出了几种解答方法。

由于时间仓促加之水平所限，错误难免，恳请批评指正！

一九八〇年十一月

目　　录

第一章　二、三阶行列式

1　说明为什么下列等式成立。

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 \\ -1 & \frac{5}{8} & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$。

〔答〕（1）根据在行列式里，行与列对调，行列式的值不变，此题即是行列对调；

（2）根据在行列式里对调两行（或两列），行列式的值变号，此题是二、三行对调；

（3）根据在行列式里，同一行（或同一列）各元素的公因子可提到行列式符号外面来，此题是提出了第二列的公

因子 $\frac{1}{8}$；

（4）根据若将行列式中某一行（或某一列）的各元素加上另一行（或另一列）的相应元素的 λ 倍（λ 为任何常数），行列式的值不变，此题是第三行各元素减去第一行各元素的 2 倍；

（5）根据若行列式中某一行（或某一列）的元素都是两项的和，则该行列式可表示为两个相应行列式的和，此题是第三行都是两项的和。

2　下列行列式为什么都为零？

（1）$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 4 & -10 & 6 \\ 6 & -15 & 9 \end{vmatrix}$。

〔答〕（1）根据在行列式里，两行（或两列）成比例，行列式的值等于零，此题第二、三列成比例；

（2）根据行列式里，若某一行（或某一列）的元素全为零，行列式的值等于零，此题第三列的元素全为零；

（3）根据同（1），此题第二、三行成比例。

3　不展开行列式，证明下列各行列式的值等于零：

（1）$\begin{vmatrix} 8 & -6 & 14 \\ -5 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} 0 & -ma & mab \\ c & 0 & -mb \\ -c & m & 0 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$。

〔证〕（1）$\begin{vmatrix} 8 & -6 & 14 \\ -5 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-14 & -6 & 14 \\ -5+5 & 0 & -5 \\ 6-7 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -6 & -6 & 14 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0；$$

（2）$\begin{vmatrix} 0 & -ma & mab \\ c & 0 & -mb \\ -c & m & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -ma & mab \\ 0 & m & -mb \\ -c & m & 0 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & -mb \\ -c & m & 0 \end{vmatrix} = 0；$$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4　利用行列式的性质，计算下列各行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 56 & 125 \\ 72 & 175 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} k+1 & k-1 \\ k^2+1 & k^2-1 \end{vmatrix}$；（4）$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$；（6）$\begin{vmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a-b & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix}$；

（7）$\begin{vmatrix} \sin\alpha-\sin\beta & \cos\alpha+\cos\beta \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha+\sin\beta \end{vmatrix}$；

（8）$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$；（9）$\begin{vmatrix} 3 & lg3 \\ 6 & lg9 \end{vmatrix}$.

〔解〕

（1） $\begin{vmatrix} 56 & 125 \\ 72 & 175 \end{vmatrix} = 8 \times 25 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$

$= 200 \times (49-45) = 200 \times 4 = 800$；

（2） $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13547 & 100 \\ 28423 & 100 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 13547 & 1 \\ 28423 & 1 \end{vmatrix}$

$= 100 \times (13547 - 28423) = 100 \times (-14876)$

$= -1487600$；

（3） $\begin{vmatrix} k+1 & k-1 \\ k^2+1 & k^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & k-1 \\ 2 & k^2-1 \end{vmatrix}$

$= 2(k-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} = 2(k-1)k$。

（4） $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2$；

（5） $\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & 0 \\ 3a & b \end{vmatrix} = -b^2$；

（6） $\begin{vmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a-b & a^2-ab+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b^2 \\ a-b & b^2 \end{vmatrix}$

$= b^2 \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ a-b & 1 \end{vmatrix} = b^2(a+b-a+b) = 2b^3$。

（7） $\begin{vmatrix} \sin\alpha - \sin\beta & \cos\alpha + \cos\beta \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha + \sin\beta \end{vmatrix}$

$= (\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)$

$- (\cos\beta - \cos\alpha)(\cos\alpha + \cos\beta)$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 0$；

(8) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

(9) $\begin{vmatrix} 3 & lg\,3 \\ 6 & lg\,9 \end{vmatrix} = (3 + lg3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

5 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & lg2 \\ 2 & lg2 & lg2 \\ 4 & lg16 & 0 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a+\frac{1}{2} & a^{\frac{3}{2}}+2 \\ a^2 & a^{\frac{3}{2}}-2 & a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$；

(8) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$； (9) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$；

(10) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$；

(11) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}$.

〔解〕

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$

$+\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -4;$

(2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 16\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8;$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3\times 18 - 4\times 25 + 2\times(-1) = -48;$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = ab,$

(5) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$= (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$

$= (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$

$= 2(x+y)\begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix}$

$$= 2(x+y)(-x^2+xy-y^2)$$

$$= -2(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$= -2(x^3+y^3);$$

(6) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & lg2 \\ 2 & lg2 & lg2 \\ 4 & lg16 & 0 \end{vmatrix} = (lg2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (lg2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = (lg2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

(7) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a+\frac{1}{2} & a^{\frac{3}{2}}+2 \\ a^2 & a^{\frac{3}{2}}-2 & a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+\frac{1}{2} & a^{\frac{3}{2}}+2 \\ a^{\frac{3}{2}}-2 & a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$= \left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)$$

$$-\left(a^{\frac{3}{2}}-2\right)\left(a^{\frac{3}{2}}+2\right) = \left(a^3+\frac{1}{8}\right)-(a^3-4)$$

$$= a^3+\frac{1}{8}-a^3+4 = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8},$$

(8) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-abc-abc-abc$

$= a^3+b^3+c^3-3abc;$

(9) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -abc+abc=0;$

(10) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$

$= (a+b)(b+c)(c+a)+2abc-bc(b+c)$

$-ac(c+a)-ab(a+b)=4abc;$

(11) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$= (b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)+ab\cdot cb\cdot ac$

$+ca\cdot ab\cdot bc-ac\cdot ca\cdot(c^2+a^2)-cb\cdot bc(b^2$

$+c^2)-ab\cdot ab(a^2+b^2)=4a^2b^2c^2.$

6　不展开行列式，证明下列等式成立：

(1) $\begin{vmatrix} a+b-c & c & -a \\ a-b+c & b & -c \\ -a+b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & a^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a);$

(3) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$;

(5) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l & m \\ n & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} al+bn & am+bf \\ cl+dn & cm+df \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$;

(8) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix} = a^3$;

(9) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

(10) $\begin{vmatrix} a_1+nb_1 & a_1-nb_1 & c_1 \\ a_2+nb_2 & a_2-nb_2 & c_2 \\ a_3+nb_3 & a_3-nb_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2n\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

〔解〕

(1) $\begin{vmatrix} a+b-c & c & -a \\ a-b+c & b & -c \\ -a+b+c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$;

(3) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & a^2+x^2 & 1 \\ y-x & y^2-x^2 & 0 \\ z-x & z^2-x^2 & 0 \end{vmatrix}$

$= a\begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$

$= a(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix}$

$= a(y-x)(z-x)(z-y)$

$= a(x-y)(y-z)(z-x)$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & b^2-a^2-ca+bc \\ 0 & c-a & c^2-a^2-ab+bc \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix} = 0$;

(5) $\begin{vmatrix} al+bn & am+bf \\ cl+dn & cm+df \end{vmatrix} = l\begin{vmatrix} a & am+bf \\ c & cm+df \end{vmatrix}$

$$+n\begin{vmatrix} b & am+bf \\ d & cm+df \end{vmatrix}=lm\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}+lf\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$+nm\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}+nf\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}=lf\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}-nm\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$=(lf-nm)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l & m \\ n & f \end{vmatrix};$$

(6) $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

(7) $$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$=8\cos^3\theta-4\cos\theta=4\cos\theta(2\cos^2\theta-1)$$

$$=4\cos\theta\cos2\theta=\frac{2\sin2\theta}{\sin\theta}\cos2\theta=\frac{\sin4\theta}{\sin\theta};$$

(8) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a+b \\ 1 & 2a & 3a+2b \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 2 & 3a+2b \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 3a \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=a^3;$$

(9) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$；

(10) $\begin{vmatrix} a_1+nb_1 & a_1-nb_1 & c_1 \\ a_2+nb_2 & a_2-nb_2 & c_2 \\ a_3+nb_3 & a_3-nb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+nb_1 & a_1 & c_1 \\ a_2+nb_2 & a_2 & c_2 \\ a_3+nb_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= 2n\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2n\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$。

7　求出满足下列各方程的 x 的值：

(1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$；　(2) $\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$；

(3) $\begin{vmatrix} x & x-2 & 0 \\ x+2 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$；

(4) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$；　(5) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 5 \\ 4 & x & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$。

〔解〕

(1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

展开后整理，得：$x^2-5x+6=0$

∴　$x=2$ 或 $x=3$；

（2）$\begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$

展开后整理，得$-18x+36=0$　∴　$x=2$；

（3）$\begin{vmatrix} x & x-2 & 0 \\ x+2 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

展开后整理，得$(x+1)(-x+4)=0$

∴　$x=-1$或$x=4$

（4）$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

展开后整理，得：$2x^2-9x+10=0$.

∴　$x=2$或$x=\dfrac{5}{2}$；

（5）$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 5 \\ 4 & x & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$

展开后整理，得：$7x^2-19x+12=0$，

∴　$x=1$或$x=\dfrac{12}{7}$.

8　写出下列行列式中第一行各元素的余子式和代数余子式：

（1）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & y & 1 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 5 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.