文登学校数学辅导材料系列之一

线性代数、概率论与数理统计试题分析及解答

（1987年—2004年全国硕士研究生考试试题）

BEIJING WENDENG SCHOOL

北京文登学校

（内部资料　严禁复制）

北京文登培训学校

目　　录

第一章　行列式

一、填空题

1.(1988 数学一)　设 4×4 知阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4$，$|B|=1$，则行列式 $|A+B|=$ ___40___.

【解】　$|A+B|=|\alpha+\beta\ 2\gamma_2\ 2\gamma_3\ 2\gamma_4|=8|\alpha+\beta\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4|$

$=8(|A|+|B|)=8(4+1)=40.$

2.(1988 数学三、四)　$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=$ ___-3___.

【解】　原式$\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{c_i-c_1}3\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&0&-1&0\\1&-1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=-3.$

3.(1989 数学四)　行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}=$ ___x^4___.

【解】　原式$\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[c_4+c_1]{c_2+c_1\\c_3-c_1}x\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x^4.$

4.(1991 数学四)　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}=\underline{\quad a^n+(-1)^{n+1}b_n\quad}.$$

【解】　按第 1 列展开后，得到两个三角行列式，即可计算出结果.

$$原式=a\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\0&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b&0&\cdots&0&0\\a&b&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&b\end{vmatrix}$$

$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$

5.(1992 数学三)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$, $|\boldsymbol{B}|=b$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$ $\underline{\quad(-1)^{mn}ab\quad}$.

【解】　用一系列行初等变换把 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$变为$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}$,这相当于用一系列行交换矩阵 $\boldsymbol{E}(i,j)$ 左乘 $\boldsymbol{C}$. 现在来计算行交换矩阵的个数.

把 $\boldsymbol{B}$ 所在的 n 行元素向上与第 m 行元素进行交换的次数是 n. 因为要进行 m 次这样的交换,所以总交换次数为 mn. 又因为 $|\boldsymbol{E}(i,j)|=-1$,故

$$|\boldsymbol{C}|=(-1)^{mn}|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=(-1)^{mn}ab.$$

6.(1996 数学四)　五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=\underline{\quad 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5\quad}.$$

【解】　记 $D_5=D$. 按第 1 行展开,可得递推关系式,然后反复使用,有

$$\begin{aligned}\underline{D_5=(1-a)D_4+aD_3}&=(1-a)[(1-a)D_3+aD_2]+aD_3\\&=[(1-a)^2+a]D_3+a(1-a)D_2\\&=(1-a+a^2)[(1-a)D_2+a(1-a)]+a(1-a)D_2\\&=(1-a)\{(1-a+a^2)(1+a^2)+a[(1-a)^2+a]\}\\&=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.\end{aligned}$$

7.(1997 数学四)　设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$

,则 $|\boldsymbol{A}|=$ $\underline{\quad(-1)^{n-1}(n-1)\quad}$.

【解】　把行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 $2,3,\cdots,n$ 行加到第 1 行,然后从第 1 行提出 $(n-1)$,得

$$|\boldsymbol{A}|=(n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}(n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$= (-1)^{n-1}(n-1).$ $|A^*| = |A|^{n-1}$

8.(1998 数学四) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}| = 2$，$|\boldsymbol{B}| = -3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}| =$ $\underline{\quad -\dfrac{2^{2n-1}}{3} \quad}$.

【解】 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}| = 2^n\,\big|\,|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\big| = 2^n|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^{-1}|\,|\boldsymbol{B}^{-1}|$

$$= 2^n|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{B}|^{-1} = 2^n \cdot 2^n \cdot 2^{-1} \cdot (-3)^{-1} = -\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

9.(2001 数学四) 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

则第四行各元素余子式之和的值为 $\underline{\quad -28 \quad}$.

【解一】 直接写出第四行各元素余子式且相加，得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -56 + 0 + 42 - 14 = -28.$$

【解二】 设 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，则

$$M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_3 \text{ 展开}} 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 + \frac{1}{2}r_2} 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -28.$$

10.(2003 数学二) 设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}| =$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ 知，$(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$，易知矩阵 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 可逆，于是有 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$. 再两边取行列式，得 $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{B}| = 1$，
因为

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2,\text{所以 } |\boldsymbol{B}| = \frac{1}{2}.$$

二、选择题

1.(1987 数学一) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = a \neq 0$，而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于

(A) a. (B) $\dfrac{1}{a}$. (C) a^{n-1}. (D) a^n. 【C】

【解】 对 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式，得 $|A||A^*| = ||A|E| = |A|^n$，由此知 $|A^*| = |A|^{n-1} = a^{n-1}$. 故选 C.

2.(1989 数学三) 设 A 和 B 均为 $n \times n$ 矩阵，则必有

(A) $|A+B| = |A| + |B|$. (B) $AB = BA$.

(C) $|AB| = |BA|$. (D) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. 【C】

【解】 因为 $|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA|$，所以选(C).

3.(1990 数学四) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则

(A) $|A^*| = |A|^{n-1}$. (B) $|A^*| = |A|$.

(C) $|A^*| = |A|^n$. (D) $|A^*| = |A^{-1}|$. 【A】

【解】 因为 A 可逆，所以 $A^* = |A|A^{-1}$. 两边取行列式，得 $|A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n|A^{-1}| = |A|^{n-1}$. 故选(A).

4.(1991 数学四) 设 A,B 为 n 阶方阵，满足等式 $AB = O$，则必有

(A) $A = O$ 或 $B = O$. (B) $A + B = O$.

(C) $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$. (D) $|A| + |B| = 0$. 【C】

【解】 对 $AB = O$ 两边取行列式，根据 $|AB| = |A| \cdot |B|$，有 $|A| \cdot |B| = 0$，由此得知 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$. 故选(C).

5.(1993 数学四) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1| = m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3| = n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|$ 等于

(A) $m+n$. (B) $=-(m+n)$.

(C) $n-m$. (D) $m-n$. 【C】

【解】 由行列式的性质，有

$$\begin{aligned}|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)| &= |\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1| + |\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2| \\ &= -|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1| + |\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3| = n-m,\end{aligned}$$

故选(C).

6.(1996 数学一) 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$.

(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$.

(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$. 【D】

【解一】 (排除法) 令 $b_1 = 0$，可得(原式) $D = a_1a_4(a_2a_3 - b_2b_3)$. 经比较，选项 A,B 和 C 全错误. 只有 D 正确.

【解二】 也可以将行列式按第一行展开. 但此法计算量略大些. 请读者自己完成.

7.(1998 数学三) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为 A. 若存在三阶矩阵 $B \neq O$ 使得 $AB = O$，则

(A)$\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$.　　(B)$\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$.

(C)$\lambda = 1$ 且 $\boxed{|\boldsymbol{B}| = 0}$.　　(D)$\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$.　　【C】

【解】　由于 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$,表明 $\boldsymbol{A}x = 0$ 有非零解,则必有 $|\boldsymbol{A}| = 0$,即

$$0 = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

解得 $\lambda = 1$. 排除(A)和(B).

若 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$,则 $\boldsymbol{B}$ 可逆,用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 右乘 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$,得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ABB}^{-1} = \boldsymbol{OB}^{-1} = \boldsymbol{O}$,而这与 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵相矛盾. 故 $|\boldsymbol{B}| = 0$,应选(C).

8.(1999 数学二)　记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.　　【B】

【解】　$$f(x) \xlongequal[i=2,3,4]{c_i - c_1} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 + c_2} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = 5x(x-1).$$

由此可知,$f(x) = 0$ 的根有 2 个. 故选 B.

9.(1999 数学一)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵,则

(A) 当 $m > n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$.

(B) 当 $m > n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}| = 0$.

(C) 当 $n > m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$.

(D) 当 $n > m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}| = 0$.　　【B】

【解】　$\boldsymbol{AB}$ 是 $m \times m$ 矩阵,因此 $|\boldsymbol{AB}|$ 是否等于 0,取决于 $\boldsymbol{AB}$ 的秩是否小于 m.

因为　秩$(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{$秩$(\boldsymbol{A})$,秩$(\boldsymbol{B})\} \leqslant n$,所以当 $m > n$ 时 $\boldsymbol{AB}$ 的秩小于 m,必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$. 故应选 B.

10.(2000 数学三)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,则对于线性方程组(Ⅰ):$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ):$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$,必有

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解.

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解.

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解,但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解.　　【A】

【解】 设 X_0 是（Ⅰ）的解，则 $AX_0=0\Rightarrow A^TAX_0=A^T0=0$，表明 X_0 也是（Ⅱ）的解．反之，设 X_0 是（Ⅱ）的解，则

$$A^TAX_0=0\Rightarrow X_0^TA^TAX_0=0\Rightarrow (AX_0)^T(AX_0)=0\Rightarrow AX_0=0.$$

表明 X_0 也是（Ⅰ）的解．故选(A)．

11．(2002 数学三) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解． (B) 当 $n>m$ 时必有非零解．

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解． (D) 当 $m>n$ 时必有非零解． 【D】

【解】 当 $m>n$ 时，秩$(AB)\leqslant \min\{$秩(A)，秩$(B)\}\leqslant \min\{m,n\}=n<m$．而 AB 是 $m\times m$ 矩阵，方程组 $(AB)x=0$ 必有非零解，故选(D)．

三、计算证明题

1．(1988 数学三) 设 A 是三阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$ 的值．

【解】 因为 $(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$，$A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$，所以

$$\begin{aligned}|(3A)^{-1}-2A^*|&=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|\\&=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|A^{-1}|=-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{|A|}=-\frac{16}{27}.\end{aligned}$$

2．(1990 数学四) 设 A 为 10×10 矩阵，

$$A=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix},$$

计算行列式 $|A-\lambda E|$，其中 E 为 10 阶单位矩阵，λ 为常数．

【解】 将 $|A-\lambda E|$ 按第 1 列展开后，得到两个三角行列式，即可计算出结果．

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\0&-\lambda&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-\lambda&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&-\lambda\end{vmatrix}\\&=(-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\0&-\lambda&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-\lambda&1\\0&0&0&\cdots&0&-\lambda\end{vmatrix}-10^{10}\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\-\lambda&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\10^{10}&0&0&\cdots&-\lambda&1\end{vmatrix}\\&=(-\lambda)(-\lambda)^9-10^{10}=\lambda^{10}-10^{10}.\end{aligned}$$

3．(1992 数学四) 已知实矩阵 $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ 满足条件：

(1) $a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；(2) $a_{11}\neq 0$．计算行列式 $|A|$．

【解】 由 $a_{ij}=A_{ij}$ 知，$A^*=A^T$．将此式代入 $AA^*=|A|E$ 中后，两边取行列式，得

$$|AA^{\mathrm{T}}| = ||A|E| \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 1 \text{ 或 } |A| = 0.$$

因为 $a_{11} \neq 0$，将 A 依第 1 行展开，得

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0.$$

再由前边的推导结果，必有 $|A| = 1$.

4.（1995 数学一） 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA' = I$（I 是 n 阶单位矩阵，A' 是 A 的转置矩阵），$|A| < 0$，求 $|A + I|$.

【解】 因为 $|A + I| = |A + AA'| = |A(I + A')|$

$$= |A||(I + A)'| = |A||I + A| = |A||A + I|$$

所以 $\quad (1 - |A|)|A + I| = 0.$

由题设 $|A| < 0$，有 $1 - |A| > 0$. 故

$$|A + I| = 0.$$

5.（2004 年数学一、数学二） 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B| = \dfrac{1}{9}$.

【分析】 可先用公式 $A^*A = |A|E$ 进行化简

【解】 已知等式两边同时右乘 A，得

$ABA^*A = 2BA^*A + A$， 而 $|A| = 3$，于是有

$3AB = 6B + A$， 即 $(3A - 6E)B = A$，

再两边取行列式，有 $|3A - 6E||B| = |A| = 3$，

而 $|3A - 6E| = 27$，故所求行列式为 $|B| = \dfrac{1}{9}$.

【评注】 先化简再计算是此类问题求解的特点，而题设含有伴随矩阵 A^*，一般均应先利用公式 $A^*A = AA^* = |A|E$ 进行化简。

第二章　矩　阵

一、填空题

1.（1988 数学三、四）$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}}$.

【解】 用初等变换求逆

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\text{ 与 }r_3\text{ 交换}]{r_1\text{ 与 }r_4\text{ 交换}}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right].$$

2.（1989 数学一）　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

则逆矩阵　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$.

【解】计算 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，然后用初等变换求逆.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2/2]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right].$$

3.（1991 数学一）　设 4 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}，\text{则 }\boldsymbol{A}\text{ 的逆阵 }\boldsymbol{A}^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}}.$$

【解】　设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix}，\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}，\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}.$$

于是 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{bmatrix}.$$

4.(1991 数学三) 设 A 和 B 为可逆矩阵，$X=\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}$ 为分块矩阵，则 $X^{-1}=$ $\underline{\begin{bmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{bmatrix}}$.

【解】 设 X 的逆矩阵为 $X^{-1}=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}$，则由 $XX^{-1}=\begin{vmatrix}I_1 & O\\ O & I_2\end{vmatrix}$ 可知

$$\begin{vmatrix}O & A\\ B & O\end{vmatrix}\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1 & O\\ O & I_2\end{bmatrix}(I_1,I_2\text{ 为分块单位矩阵}),$$

即 $$\begin{bmatrix}AX_{21} & AX_{22}\\ BX_{11} & BX_{12}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}I_1 & O\\ O & I_2\end{vmatrix}.$$

从而 $AX_{21}=I_1,AX_{22}=O,BX_{11}=O,BX_{12}=I_2$. 由于 A,B 可逆，故 $X_{21}=A^{-1},X_{12}=B^{-1}$，且 $X_{11}=O,X_{22}=O$.

5.(1992 数学一) 设 $A=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，则矩阵 A 的秩 $r(A)=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

【解一】 因为 A 是非零矩阵，且 A 的任意 2 阶子式皆为 0，所以秩 $(A)=1$.

【解二】 对矩阵 A 施用初等行变换：第 1 行乘以 $\left(-\dfrac{a_i}{a_1}\right)$ 加到第 i 行去 $(i=2,\cdots,n)$，可把 A 化为除第 1 行元素不为 0 外，其余各行元素皆为 0 的矩阵. 故秩 $r(A)=1$.

6.(1993 数学三、四) 设四阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为 $\underline{\quad 0\quad}$.

【解】 由于 A 的所有三阶子式均为 0，故 A^* 为零阵，因此 A^* 的秩为 0.

7.(1994 数学三、四) 设 $a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$，且

$$A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}，\text{则 } A^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a_n}\\ \dfrac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0\end{bmatrix}}$$

【解一】 (用初等变换) 构造矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc:ccccc}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right]$$

第 1 步：依次进行如下行交换：第 n 行与第 1 行，第 n 行与第 2 行，…，第 n 行与第 $n-1$ 行.

第 2 步：第 1 行除以 a_n，第 2 行除以 a_1，…，第 n 行除以 a_{n-1}. 最后即可得到 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【解二】 （用分块矩阵）把 $\boldsymbol{A}$ 分为 4 块；$(n-1)\times 1$ 零矩阵，$(n-1)\times(n-1)$ 对角方阵（记为 $\boldsymbol{B}$），1×1 方阵（记为 $\boldsymbol{C}=[a_n]$），$1\times(n-1)$ 矩阵.

再根据公式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}$，即得 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

8.（1994 数学一） 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]$，$\boldsymbol{\beta}=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}'$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 是转置，则

$$\boldsymbol{A}^n=\quad 3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

【解】 注意到 $\boldsymbol{\beta\alpha}'=3$（是个数），有

$$\boldsymbol{A}^n=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})}_{\text{共 } n \text{ 个}}=\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\beta\alpha}')(\boldsymbol{\beta\alpha}')\cdots(\boldsymbol{\beta\alpha}')\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

9.（1995 数学三、四） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ $\begin{bmatrix}1/10 & 0 & 0\\ 1/5 & 1/5 & 0\\ 3/10 & 2/5 & 1/2\end{bmatrix}$.

【解】 因为 $|\boldsymbol{A}|=10\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1/10 & 0 & 0\\ 1/5 & 1/5 & 0\\ 3/10 & 2/5 & 1/2\end{bmatrix}.$$

10.（1995 数学一） 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}，\text{则 } \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

【解】 原方程 $\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{I}$.

故
$$\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I})^{-1}=6\left[\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

11.（1996 数学一）设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，而 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{AB})=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

【解】 $|\boldsymbol{B}|\xlongequal{r_3+r_1}10\neq 0$，因此 $\boldsymbol{B}$ 是满秩矩阵. 而满秩矩阵去乘某矩阵，不改变它的秩. 即秩 $(\boldsymbol{AB})=$ 秩 $(\boldsymbol{A})=2$.

12.（1997 数学一） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$ $\underline{\quad -3\quad}$.

【解】 由 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵，得 $Ax=0$ 有非零解，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

$$0=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+2r_3}\begin{vmatrix}7&0&0\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=7(t+3)\text{，故 } t=-3.$$

13.（1998 数学三、四） 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{B}=$ $\underline{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}}$.

【解】 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{E}\xrightarrow{\text{右乘 }\boldsymbol{A}^{-1}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}-8\boldsymbol{A}^{-1}\xrightarrow{\text{左乘 }\boldsymbol{A}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{AB}=-8\boldsymbol{E}\Rightarrow(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=-8\boldsymbol{E}$（$(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})$ 可逆）.

故
$$\boldsymbol{B}=-8(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}$$
$$=-8\left[\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

14.（1999 数学四） 已知 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$ $\underline{\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$.

故
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

15.(1999 数学三、四)　设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,而 $n\geqslant 2$ 为正整数,则 $A^n-2A^{n-1}=$ $\underline{\ \boldsymbol{O}\ }$.

【解】　当 $n=2$ 时,$A^2-2A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2-2\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$.

当 $n>2$ 时,原式 $=A^{n-2}(A^2-2A)=A^{n-2}O=O$. 故 $n\geqslant 2$ 时,$A^n-2A^{n-1}=O$.

16.(2000 数学二)　设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$,$E$ 为 4 阶单位矩阵,且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,则　$(E+B)^{-1}=$ $\underline{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}}$.

【解】　$B=(E+A)^{-1}(E-A)\Rightarrow(E+A)B=E-A\Rightarrow B+AB+A=E\Rightarrow E+B+A(E+B)=2E\Rightarrow(E+B)(E+A)=2E$

$$\Rightarrow(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}.$$

17.(2001 数学三、四)　设矩阵 $A=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}$ 且秩$(A)=3$,则 $k=$ $\underline{\ -3\ }$.

【解】　$|A|\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{c_i-c_1}(k+3)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&k-1&0&0\\1&0&k-1&0\\1&0&0&k-1\end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3.$$

令 $|A|=0$,得 $k=-3$ 或 $k=1$. 但是,当 $k=1$ 时,秩$(A)=1$,这与秩$(A)=3$ 相矛盾. 故 $k=-3$.

18.(2001 数学一)　设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$,其中 E 为单位矩阵,则 $(A-E)^{-1}=$ $\underline{\frac{1}{2}(A+2E)}$.

【解】　设 a 和 b 为待定常数. 将题给方程化为如下形式:

$$(A-E)(A+aE)=bE, 即 A^2+(a-1)A-(a+b)E=O.$$

与题给方程比较，得 $a-1=1$，$-(a+b)=-4$. 由此解得 $a=2, b=2$. 于是，题给方程化为

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$$

故 $$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}).$$

19.（2002 数学四） 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$ $\underline{\begin{bmatrix}0 & 1/2\\ -1 & -1\end{bmatrix}}$.

【解】 应先计算 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，再求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

20.（2003 数学四） 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为三阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵.

已知 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ $\underline{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}}$.

【分析】 应先化简，从 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 中确定 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$

【解】 由 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，知 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}$，

即有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\text{，可见}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

21.（2003 数学三、四） 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，$a<0$；$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则 $a=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

【解】 由题设，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-2a\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &=\boldsymbol{E}+(-1-2a+\frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

于是有 $-1-2a+\frac{1}{a}=0$，即 $2a^2+a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，$a=-1$. 由于 $a<0$，故 $a=-1$.

22.（2003 数学二） 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置. 若 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ $\underline{\quad 3 \quad}$.

【解】 由 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，

$$(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})^2=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ -3 & 3 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$.

23.（2004 年数学四） 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为三阶可逆矩阵，则

$$B^{2004}-2A^2=\underline{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}$$

【分析】 将 B 的幂次转化为 A 的幂次，并注意到 A^2 为对角矩阵即得答案．

【解】 因为

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}，B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P.$$

故

$$B^{2004}=P^{-1}(A^2)^{1002}P=P^{-1}EP=E,$$

$$B^{2004}-2A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

二、选择题

1.（1991 数学一） 设 n 阶方阵 A,B,C 满足关系式 $ABC=E$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则必有

(A)$ACB=E$.　(B)$CBA=E$.　(C)$BAC=E$.　(D)$BCA=E$　【D】

【解】 由 $ABC=E$ 知，A 与 BC，或 AB 与 C 是互逆矩阵．两者之积为单位矩阵，且可交换位置，故只有 D 正确．

2.（1992 数学四） 设 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于

(A)$A^{-1}+B^{-1}$.　(B)$A+B$.

(C)$A(A+B)^{-1}B$.　(D)$(A+B)^{-1}$.　【C】

【解】 设 $X=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\Leftrightarrow X^{-1}=A^{-1}+B^{-1}\Leftrightarrow BX^{-1}A=B+A\Leftrightarrow(BX^{-1}A)^{-1}=(A+B)^{-1}\Leftrightarrow A^{-1}XB^{-1}=(A+B)^{-1}\Leftrightarrow X=A(A+B)^{-1}B$.

故选(C).

3.（1993 数学一） 已知 $Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$P$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $PQ=O$，则

(A)$t=6$ 时 P 的秩必为 1.　(B)$t=6$ 时 P 的秩必为 2.

(C)$t\neq 6$ 时 P 的秩必为 1.　(D)$t\neq 6$ 时 P 的秩必为 2.　【C】

【解】 显然，当 $t=6$ 时，秩$(Q)=1$. 由于 $PQ=O$，有秩$(P)+$秩$(Q)\leqslant 3$，而 P 为非零矩阵，因此

$$1\leqslant 秩(P)\leqslant 3-1=2.$$

例如，取 $P=\begin{bmatrix}0&0&0\\-3&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，秩$(P)=1$，且满足 $PQ=O$.

取 $P=\begin{bmatrix}0&0&0\\-3&0&1\\-2&1&0\end{bmatrix}$,秩$(P)=2$,且满足 $PQ=O$.

因此排除 A 和 B.

当 $t\neq 6$ 时,秩$(Q)=2$,再由秩$(P)+$秩$(Q)\leqslant 3$ 推知非零矩阵 P 的秩必为 1. 故选 C.

4.(1994 数学三)　设 A 是 $m\times n$ 矩阵,C 是 n 阶可逆矩阵,矩阵 A 的秩为 r,矩阵 $B=AC$ 的秩为 r_1,则

(A)$r>r_1$.　(B)$r<r_1$.　(C)$r=r_1$.　(D)r 与 r_1 的关系依 C 而定.　【C】

【解】　因为满秩矩阵去乘某矩阵,不改变该矩阵的秩,所以 $r_1=$ 秩$(AC)=$ 秩$(A)=r$.

5.(1994 数学四)　设 A,B 都是 n 阶非零矩阵,且 $AB=O$,则 A 和 B 的秩

(A) 必有一个等于零.　(B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n,一个等于 n.　(D) 都等于 n.　【B】

【解】　因为 A 和 B 都是非零矩阵,所以秩$(A)\geqslant 1$,秩$(B)\geqslant 1$. 排除(A)

若 A 和 B 中至少有一个矩阵的秩为 n,例如设秩$(A)=n$,则 A^{-1} 存在. 于是

$$B=A^{-1}(AB)=A^{-1}O=O.$$

这与 B 是非零矩阵矛盾. 因此秩$(A)<n$,秩$(B)<n$. 故选(B).

6.(1995 数学四)　设 n 维行向量 $\alpha=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})$,矩阵 $A=I-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$,$B=I+2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$,其中 I 为 n 阶单位矩阵,则 AB 等于

(A)O.　(B)$-I$.　(C)I.　(D)$I+\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$.　【C】

【解】　注意到 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}$(是个数),由下式知应选(C).

$$AB=(I-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)(I+2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=I-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha+2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha-2\alpha^{\mathrm{T}}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha=I.$$

7.(1995 数学一)　设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$,

$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,则必有

(A)$AP_1P_2=B$.　(B)$AP_2P_1=B$.　(C)$P_1P_2A=B$.　(D)$P_2P_1A=B$.　【C】

【解】　B 是由 A 依次通过两次行初等变换而得到的:把 A 的第 1 行加到第 3 行,相当于用初等矩阵 P_2 左乘 A;把 P_2A 的第 1、3 行对调,这相当于用 P_1 左乘 P_2A,故得到 $P_1P_2A=B$,应选 C.

8.(1996 数学四)　设 n 阶矩阵 A 非奇异($n\geqslant 2$),A^* 是 A 的伴随矩阵,则

(A)$(A^*)^*=|A|^{n-1}A$.　(B)$(A^*)^*=|A|^{n+1}A$.

(C)$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.　(D)$(A^*)^*=|A|^{n+2}A$.　【C】

【解】　由于 $|A|\neq 0$,有 $A^*=|A|A^{-1}$. 把这个公式中的所有 A 都换成 A^*,即

$$\begin{aligned}(A^*)^*&=|A^*|(A^*)^{-1}=||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}\\&=(|A|^n\cdot|A^{-1}|)(|A|^{-1}A)=|A|^{n-2}A.\end{aligned}$$

故选(C).

9.(1998 数学三)　设 $n(n\geqslant 3)$ 阶矩阵