数 学

高考复习资料

（一九八四年）

河南省教育厅高教二处
郑州大学函授部 编

一九八四年三月

代　　数

一、数的有关概念及运算

1、数概念的系统表

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
  - 虚数
    - 纯虚数
    - 非纯虚数

2、实数

（1）整数，正整数（自然数）、零、负整数、统称为整数。1是正整数中最小的数，－1是负整数中最大的数，0是绝对值最小的数。个位数字是b，十位数字是a的两位数表示为$10a+b$。

整数可分为偶数、奇数两类，每一个偶数可以表示为$2n$（n是整数）的形式；每一个奇数可以表示为$2n-1$（n是整数）的形式。反过来，$2n$（n是整数）是偶数，$2n-1$（n是整数）是奇数。

例1、三个连续整数的平方和是50，求这三个数。

解：设这三个连续整数为$R-1$、R、$R+1$，由题意，得

$(R-1)^2+R^2+(R+1)^2=50$　　整理、得　$R^2=16$

$R=\pm 4$　　∴三个连续整数是3、4、5或－5、－4、－3。

（2）有理数与无理数

整数、正负分数统称有理数，每一个有理数都可以表示为$\frac{n}{m}$的形式（其中m、n都是整数，且$m\neq 0$）反过来，每一个形如$\frac{n}{m}$的数（其中m、n都是整数，且$m\neq 0$）都是有理数。有限小数和无限循环小数都是有理数。

无限不循环小数称为无理数。如$\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{2}$、π（3.141592…），e（2.71828…）等都是无理数。

有理数和无理数统称实数

（3）数轴、绝对值

规定了方向，原点和长度单位的直线称为数轴。

实数集合和数轴上的点的集合具有一一对应的关系。

在数轴上原点的两旁，离开原点距离相等的两个点所表示的两个实数，叫做互为相反的数、实数a和$-a$（$a\neq 0$）是互为相反的实，零的相反数仍是零。

实数的绝对值，在数轴上表示一个数的点离开原点的距离叫做这个数的绝对值，正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，就是

$$|a| = \begin{cases} a & 当a>0时 \\ 0 & 当a=0时 \\ -a & 当a<0时 \end{cases}$$

因此 $|a|$ 总是一个非负数，遇到有关 $|a|$ 的绝对值的问题，一般要就 $a\geqslant 0$ 及 $a<0$ 的情况，按照上面的规定，分别脱去绝对值的符号，再分别作出解答。

例2、化简 $|X+3|-|2X-5|$

解：i) 当 $X\geqslant\frac{5}{2}$ 时　$X+3>0$　$2X-5\geqslant 0$

$$|X+3|-|2X-5|=X+3-(2X-5)=X+3-2X+5$$
$$=-X+8$$

ii) 当 $-3\leqslant X<\frac{5}{2}$ 时，$X+3\geqslant 0$，$2X-5<0$

$$|X+3|-|2X-5|=X+3+2X-5=3X-2$$

iii) 当 $X<-3$ 时　$X+3<0$　$2X-5<0$

$$|X+3|-|2X-5|=-(X+3)+(2X-5)$$
$$=-X-3+2X-5=X-8$$

例3，已知实数X、Y、Z满足：$\frac{1}{2}|X-Y|+\sqrt{2Y+Z}+Z^2-Z+\frac{1}{4}=0$

求 $(Z+Y)^X$ 的值

解：$\because \frac{1}{2}|X-Y|\geqslant 0$　$\sqrt{2Y+Z}\geqslant 0$，$Z^2-Z+\frac{1}{4}=(Z-\frac{1}{2})^2\geqslant 0$

且它们的和为0，所以只能有 $\begin{cases} X-Y=0 \\ 2Y+Z=0 \\ Z-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$

解出：$X=-\frac{1}{4}$，$Y=-\frac{1}{4}$，$Z=\frac{1}{2}$

$$\therefore (Z+Y)^X=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$$

（4）有理数的四则运算（运算法则略）

例4：计算 $\dfrac{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{17}-0.125\div\frac{17}{3}}{1.25\div 5\frac{2}{3}}-(-1)^{99}\times(-2)^2$

解：原式 $=\dfrac{\left(\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{17}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}+4=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}+4$

$$=\frac{6-1}{10}+4=4\frac{1}{2}$$

注意：①在做有理数运算时，如果既有分数，又有小数，常将小数化为分数，比较简便，最好能熟记下列换算：

$0.5=\frac{1}{2}$　$0.25=\frac{1}{4}$　$0.125=\frac{1}{8}$　$0.75=\frac{3}{4}$；

②几个有理数相加减，如果它们有公因数则提取公因数，可减少运算手续；

③如果分子、分母都是分数，则同乘以一个适当整数，也可简化运算。

3、复数

（1）复数的概念，形如$a+bi$（a、b都是实数）的数叫复数，a叫复数的实部，b叫复数的虚部，i叫虚数单位，规定：

(i) $i^2=-1$

(ii) i和实数在一起可以按照通常的四则运算的法则进行运算。

i的幂有下面的重要性质：

$$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2i=-i,\ i^4=(i^2)^2=1,\ \cdots$$

一般地，如果n是整数，那么

$$i^{4n+1}=i\quad i^{4n+2}=-1\quad i^{4n+3}=-i\quad i^{4n+4}=1$$

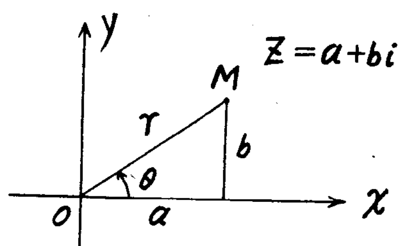
虚部等于零的复数就是实数，虚部不等于零的复数就是虚数，实数与虚数都是复数的特例：

$$\text{复数}(a+bi)\ (a、b\text{都是实数})\begin{cases}\text{实数}\ (a+0i=a)\\ \text{虚数}\ (a+bi,\ b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ (0+bi=bi,\ b\neq 0)\\ \text{非纯虚数}\ (a+bi,\ a\neq 0,\ b\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

（2）复数的相等和不等，对于两个复数，如果其中有虚数，则它们不能比较大小，两个复数$a+bi$和$c+di$相等的充要条件是$a=c$，$b=d$，复数$a+bi=0$的充要条件是$a=0$，$b=0$

（3）共轭复数：$a+bi$和$a-bi$称为共轭复数，两个共轭复数的和、积都是实数。

（4）复数的几何表示法：复数$a+bi$可用复平面内的点M（a、b）来表示，也可用以原点为起点，M（a、b）为终点的向量来表示图1，这样复数集合与坐标平面内的点的集合就建立了一一对应的关系，和实数对应的点的横轴上，和纯虚数对应的点在纵轴上，用来表示复数的平面叫复平面，横轴叫实轴，纵轴叫虚轴。



图一

复数$Z=a+bi$与复平面内的点M相对应也和平面向量$\overrightarrow{OM}$相对应。

（5）复数的绝对值（复数的模数）向量$\overrightarrow{OM}$的长r叫做复数$Z=a+bi$的模数，或绝对值，记作

$$|Z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$$

复数的绝对值（或模）是一个非负的实数，向量$\overrightarrow{OM}$与X轴的正方向所夹的角θ，叫做复数Z的幅角，不等于零的复数有无穷多个幅角，即$2K\pi+\theta$（K为整数），其中适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的幅角的值θ叫做幅角的主值，复数零没有确定的幅角。

（6）复数的三角形式：任何不等于零的复数$Z=a+bi$可以表示成$r(\cos\theta+i\sin)\theta$的形式，即 $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\text{其中}r=\sqrt{a^2+b^2}\quad \cos\theta=\frac{a}{r}\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$

式子$r(\cos\theta+i\sin\theta)$叫复数Z的三角式，而$a+bi$叫做复数Z的代数式。

例5、化简下列各式：

（1）$i^{97}+i^{102}+i^{303}-i^{27}$；（2）$i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$（K是自然数）

解（1）$i^{97}+i^{102}+i^{303}-i^{27}=i^{4\times24+1}+i^{4\times25+2}+i^{4\times75+3}-i^{4\times6+3}=i-1$

(2) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}=i^k(1+i+i^2+i^3)=i^K\cdot 0=0$

例6、把下列复数化为三角式

(1) $-\sqrt{3}+i$　　(2) -1　　(3) $-4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

解 (1) $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$　　$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ 幅角主值 $\theta=150°$

$\therefore -\sqrt{3}+i=2(\cos150°+i\sin150°)$

(2) $-1=-1+0i$

$r=1$　$\cos\theta=-1$　$\sin\theta=0$　幅角主值 $\theta=180°$

$\therefore -1=\cos180°+i\sin180°$

(3) $-4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

注意：复数的三角式必须为实部的三角函数是 θ 的余弦，虚部的三角函数是同一幅角 θ 的正弦；不等于零的复数的模数是正数，实部与虚部之间用"十"连接。

(7) 复数的运算

1° 加法和减法：按照多项式的运算法则进行

$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

2° 乘法：代数式：按多项式乘法进行，再把商的幂化简

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

三角函数式：$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

3° 除法

代数式：分子、分母都乘以分母的共轭复数

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\qquad(c+di\neq0)$$

三角函数式：

$$\frac{r^1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

4° 乘方

代数式 $(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

特殊的有 $(1\pm i)^2=\pm2i$

三角函数式：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$（棣莫弗定理）

5° 开方

复数的n次方根有n个值：

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2K\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2K\pi}{n}\right]$$

$K=0、1、2、\cdots、n-1$）其中 $\sqrt[n]{r}$ 表示模数r的n次算术根

例7、计算（1）$\frac{1}{i}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5+(\frac{1}{1+i})^4+(\frac{1+i}{1-i})^7$

（2）$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{11}$　　　（3）$\sqrt[3]{i}$

解（1）原式$=\frac{i}{i\cdot i}(\sqrt{2})^5(1+i)^5+[\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}]^4+[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}]^7$

$$=-(\sqrt{2})^5 i(1+i)(1+i)^4+[\frac{1-i}{2}]^4+(\frac{2i}{2})^7$$

$$=-4\sqrt{2}\cdot(-1+i)\cdot(2i)^2+\frac{(-2i)^2}{2^4}+i^7$$

$$=16\sqrt{2}(-1+i)+\frac{-4}{2^4}-i$$

$$=-(16\sqrt{2}+\frac{1}{4})+(16\sqrt{2}-1)i$$

（2）$\because -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$

$\therefore$原式$=(\cos120^\circ+i\sin 120^\circ)^{11}$

$$=\cos 1320^\circ+i\sin 1320^\circ=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

（3）$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt[3]{i}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2K\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2K\pi}{3}\quad(K=0、1、2)$$

$K=0$、得　$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$K=1$、　得　$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$K=2$、　得　$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

$\therefore\sqrt[3]{i}$有三个值：$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$和$-i$

注意：进行复数运算时，了解并记住下面这些结果，将能简化运算的手续：

$\frac{1}{i}=-i$；$(1\pm i)^2=\pm 2i$；$\frac{1}{1\pm i}=\frac{1}{2}(1\pm i)$

$$\frac{1+i}{1-i}=i,\quad \frac{1-i}{1+i}=-i;\qquad \left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$$

例8、求适合下列各数的实数X和Y。

（1） $(1+2i)X+(3-10i)Y=5-6i$

（2） $\frac{X}{1-i}+\frac{Y}{1-2i}=\frac{5}{1-3i}$

解：（1）由 $(1+2i)X+(3-10i)Y=5-6i$，得

$$X+3Y+(2X-10Y)i=5-6i$$

$\therefore \begin{cases} X+3Y=5 \\ 2X-10Y=-6 \end{cases}$ 解这个方程组得 $\begin{cases} X=2 \\ Y=1 \end{cases}$

（2）由 $\frac{X}{1-i}+\frac{Y}{1-2i}=\frac{5}{1-3i}$，得

$$\frac{X(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{Y(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{5(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$$

即 $\frac{X(1+i)}{2}+\frac{Y(1+2i)}{5}=\frac{5(1+3i)}{10}$

$5X+2Y+(5X+4Y)i=5+15i$

$\therefore \begin{cases} 5X+2Y=5 \\ 5X+4Y=15 \end{cases}$ 解这个方程组，得 $\begin{cases} X=-1 \\ Y=5 \end{cases}$

注意：解这一类题目时，要先根据共轭复数之积是实数这个性质，然后再把式子展开并加以整理，最后再根据复数相等的条件求出X和Y的值。

例9已知 $|X+Yi|=2$，求表示复数X＋Yi的点的轨迹。

解：$\because |X+Yi|=2 \quad \therefore \sqrt{X^2+Y^2}=2$ 两边平方得 $X^2+Y^2=4$

所以，表示复数X＋Yi的点的轨迹是以原点为园心，以2半径的园。

练　习　一

一、计算

1、$3\frac{1}{7}\times(3\frac{1}{7}-7\frac{1}{3})\times\frac{7}{22}\div1\frac{1}{21}$ 〔答：-4〕

2、$1\frac{3}{5}\div(-\frac{4}{5})^2-[(5\sqrt{12}-12\sqrt{3})\div\sqrt{6}+|\frac{2}{3}-\sqrt{2}|]$

〔答 $3\frac{1}{6}$〕

3、$(-3\frac{1}{3})+(-5\frac{1}{2})\div1\frac{2}{9}-(-5\frac{1}{5})\times\frac{9}{16}$ 〔答 $-4\frac{5}{6}$〕

2、计算

i^{11}，i^{26}，i^{35}、i^{70}，i^{101}，i^{365}〔答 $-i$，i，1，-1，i，$-i$〕

3、求适合下列各式的实数X和Y的值

（1） $(3X+2Y)+(5X-Y)i=17-2i$

（2） $X^2+Xi+2-3i=Y^2+Yi+9-2i$

〔答（1）X＝7，Y＝7 （2）X＝4，Y＝3〕

4、m是什么实数时，$(m^2-3m+m^2i)-[(5m+6)i+4]$的值是（1）实数，（2）纯虚数，（3）等于零。

〔答：（1）$m=-1$或$m=6$时，是实数，（2）$m=4$时，是纯虚数，（3）$m=-1$时，等于零。〕

5、求下列各式的值：

（1）$12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

（2）$2\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

（3）$-1\div 2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$

答（1）$2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$　（2）$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

（3）$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}i}{4}$〕

6、利用棣莫弗定理导出下列公式。

（1）$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

（2）$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

7、设：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1$，求最小的正整数n。（答：$n=4$）

8、求$(1+i)^{2n}+(1-i)^{3n}$的值（n是自然数）

〔答：n为奇数时，等于零；n是4的倍数时，等于2^{n+1}，n是偶数时，但不是4的倍数时，等于-2^{n+1}〕

9、求1的三个立方根〔答：1、$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$〕

二、代　数　式

用代数运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号和顺序符号把数字和表示数字的字母连结起来的式子，叫做代数式，分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

1、整式

（1）单项式与多项式

单项式：由数字与字母的积组成的代数式叫做单项式。单项式中的数字因数叫做单项式的数字系数，简称系数，单项式中的所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数。

多项式：几个单项式的和叫做多项式，在多项式中的每个单项式叫做多项式的项。次数最高的项的次数就是这个多项式的次数，多项式里不含字母的项叫做常数项。单项式与多项式统称整式。

（2）乘法公式：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　　$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

（3）因式分解：

把一个多项式化为几个整式的积，叫做多项式的因式分解。一个多项式能不能分解因式，要根据所给的数的范围来决定。例如X^4-4，要在有理数范围内分解就是：

$X^4-4=(X^2-2)(X^2+2)$

在实数范围内分解就是：　$X^4-4=(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})(X^2+2)$

在复数范围内分解就是：

$X^4-4=(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)$

一般在题目没有附加要求时，都只限于在有理数范围内分解。

分解因式采用提取公因式法，公式法，十字相乘法，分组分解法，配方法等。一般步骤是：①先看多项式的各项有没有公因式可提，如果有就先提公因式；②没有公因式的式子（或提取公因式后得到的式子），就看能不能应用所学过的公式（或十字相乘法）来分解；③不能应用上面两种方法分解的式子，看它能不能用分组分解法；④分解所得的因式还可分解，就再继续分解，直到每一个因式都不能再分解为止。

例1、分解因式　$2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$

解　原式$=2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a+b)^2(a-b)^2$

$=(a+b)^2[2(a^2+b^2)-(a^2-2ab+b^2)]=(a+b)^2(a^2+2ab+b^2)$

$=(a+b)^2(a+b)^2=(a+b)^4$

注意：对分解出的因式要进行整理，1、最后不能带有中括号；2、因式内的同类项要合并，并且要不能再继续分解；3、相同的因式要写成幂的形式。

例2、分解因式　$4Y(X-Y)+(X+Y)(Y-X)^2+4(Y-X)$

解　原式$=4Y(X-Y)+(X+Y)(X-Y)^2-4(X-Y)$

$=(X-Y[4Y+(X+Y)(X-Y)-4]=(X-Y)(4Y+X^2-Y^2-4)$

$=(X-Y)[X^2-(Y^2-4Y+4)]=(X-Y)[X^2-(Y-2)^2]$

$=(X-Y)(X+Y-2)(X-Y+2)$

例3、分解因式　$3X^3+7X^2-4$

解　原式$=3X^3+3X^2+4X^2-4=3X^2(X+1)+4(X+1)(X-1)$

$=(X+1)(3X^2+4X-4)=(X+1)(Y+2)(3X-2)$

例4、分别在有理数、实数、复数范围内把多项式

$2X^5-X^4-8X+4$分解因式

解　原式$=(2X^5-X^4)-(8X-4)=X^4(2X-1)-4(2X-1)$

$=(2X-1)(X^4-4)$

∴在有理数范围内，原式$=(2X-1)(X^2+2)(X^2-2)$

在实数范围内。

原式$=(2X-1)(X^2+2)(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2}$

在复数范围内：

原式$=(2X-1)(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)$

（4）整式的四则运算：

整式的加减，实际上就是去括号后，合并同类项。整式乘除法的运算有两部分一是系

数的乘除，一是字母的乘除，系数的乘除是有理数的乘除，字母的乘除是幂的乘除，因此幂的运算法则必须熟悉。

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ （m、n都是自然数）

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ （$a \neq 0$，m、n都是自然数，并且$m>n$）

$a^m \div a^m = 1$ （$a \neq 0$，m是自然数）

$(ab)^m = a^m b^m$ （m是自然数）

整式的四则运算法则（略）

例5、计算 $(-8X+X^3-3) \div (3-X)$

先把多项式按X的降幂排列，被除式中有缺项留出空位，演算如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & -X^2-3X-1 \\
\hline
-X+3 & X^3 \qquad\qquad -8X-3 \\
 & \underline{X^3-3X^2} \\
 & 3X^2-8X \\
 & \underline{3X^2-9X} \\
 & X-3 \\
 & \underline{X-3} \\
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ $(-8X+X^3-3)\div(3-X)=-X^2-3X-1$

例6、（1）$(-2a+4b)-(-5a-6b)$

（2）$(3a+2b-3c)+(5a-3b+2c)$

（3）$(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)$

（4）$(-8X+X^3-3)\div(3-X)$

解：（1）$(-2a+4b)-(-5a-6b)=-2a+4b+5a+6b=3a+10b$

（2）$(3a+2b-3c)+(5a-3b+2c)$

$=3a+2b-3c+5a-3b+2c=8a-b-c$

（3）$(3a+4b-5c)(3a-4b-5c)$

$=[(3a-5c)+4b][(3a-5c)-4b]=(3a-5c)^2-(4b)^2$

$=9a^2-30ac+25c^2-16b^2$

练习二

1、计算：

（1）$(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)-(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

（2）$(X+2Y)^2(X-2y)^2-(2X+Y)^3(2X-Y)^3$

〔答（1）$-16b^3$

（2）$-63X^6+36X^4Y^2+36X^2Y^4-63Y^6$〕

2、计算：$(X^4+X+4-10X^2-4X^3)\div(5X+4-X^2)$

〔答：$-X^2-X+1$〕

3、化简：

（1）$\{3X-[X-1-(2X+1)+3]-3\}+(X+1)$

〔答 $5X-3$〕

（2）$2X^2(-3Y)+7XY(-Y)-[\frac{1}{5}XY(-3X)+\frac{X}{3}\cdot 2Y^2]$

〔答　$-5\frac{2}{5}X^2Y-7\frac{2}{3}XY^2$〕

（3）$(X-1)\ (X+1)\ (X^2+X+1)\ (X^2-X+1)$

〔答　X^6-1〕

（4）$[(3X^n\ Y^{m+1})^2\cdot(-X^n\ Y^m)^3]^2$　〔答：$81X^{10n}\ Y^{10m+4}$〕

4、分解因式（在有理数范围内）

（1）$m^3-3n^2+3mn-m^2n$　〔答：$(m-n)(m^2+3n)$〕

（2）$X^2-70Y+10XY-49$　〔答：$(X-7)(X+10Y+7)$〕

（3）aX^3-1+X^3-a　〔答：$(a+1)(X-1)(X^2+X+1)$〕

（4）$(X+1)^2-9(X-1)^2$　〔答：$-4\ (X-2)(2X-1)$〕

（5）$X^{n+5}+9X^{n+6}-162X^{n+1}$　〔答：$X^{n+1}\ (X+3)(X-3)(X^2+18)$〕

（6）X^4+X^2+1　〔答：$(X^2+X+1)(X^2-X+1)$〕

（7）$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$　〔答：$3(a-b)(b-c)(c-a)$〕

5、在复数范围内分解因式：

（1）X^4-4X^2+3　〔答：$(X+1)(X-1)(X+\sqrt{3})(X-\sqrt{3})$〕

（2）$X^4-\frac{1}{9}Y^4$

〔答：$(X+\frac{\sqrt{3}}{3}Y)(X-\frac{\sqrt{3}}{3}Y)(X+\frac{\sqrt{3}}{3}Yi)(X-\frac{\sqrt{3}}{3}Yi)$〕

（3）X^3-4X^2+2X-8

〔答：$(X-4)(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)$〕

2、分式：

（1）分式的基本性质

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}\quad(m\neq 0)\qquad\qquad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}\quad(m\neq 0)$$

（2）分式的四则运算　分式的通分、约分、四则运算等法则，完全类似于分数的相应法则：

$$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}\qquad \frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}\qquad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

分式的乘法、除法(化成乘法)应首先考虑约分，分式运算的结果必须化为最简分式。

例7、计算　$\frac{X^4+X^2+1}{X^3-1}+\frac{X(X-2)-2(X-2)}{X^2-3X+2}$

分析：这里两个分式都不是最简分式，可先分别约简后再计算

解：原式$=\frac{X^4+2X^2+1-X^2}{X^3-1}+\frac{(X-2)^2}{(X-1)(X-2)}$

$$=\frac{(X^2+1+X)(X^2+1-X)}{(X-1)(X^2+X+1)}+\frac{X-2}{X-1}$$

$$=\frac{X^2+1-X+X-2}{X-1}=\frac{X^2-1}{X-1}=X+1$$

例8、计算 $\frac{5}{X^2+4-4X}+\frac{8}{4X-X^3}-\frac{5}{X^2-X-6}$

解：原式 $=\frac{5}{(X-2)^2}-\frac{8}{X(X+2)(X-2)}-\frac{5}{(X+2)(X-3)}$

$$=\frac{5X(X+2)(X-3)-8(X-2)(X-3)-5X(X-2)^2}{X(X+2)(X-2)^2(X-3)}$$

$$=\frac{7X^2-10X-48}{X(X+2)(X-2)^2(X-3)}=\frac{(X+2)(7X-24)}{X(X+2)(X-2)^2(X-3)}$$

$$=\frac{7X-24}{X(X-3)(X-2)^2}$$

例9、化简 $\frac{X+2}{X+1}-\frac{X+3}{X+2}-\frac{X-4}{X-3}+\frac{X-5}{X-4}$

解：原式 $=(1+\frac{1}{X+1})-(1+\frac{1}{X+2})-(1-\frac{1}{X-3})+(1-\frac{1}{X-4})$

$$=\frac{1}{X+1}-\frac{1}{X+2}-\frac{1}{X-3}-\frac{1}{X-4}$$

$$=\frac{X+2-X-1}{(X+1)(X+2)}+\frac{X-4-X+3}{(X-3)(X-4)}$$

$$=\frac{1}{(X+1)(X+2)}-\frac{1}{(X-3)(X-4)}$$

$$=\frac{(X-3)(X-4)-(X+1)(X+2)}{(X+1)(X+2)(X-3)(X-4)}$$

$$=\frac{X^2-7X+12-X^2-3X-2}{(X+1)(X+2)(X-3)(X-4)}$$

$$=\frac{-10(X-1)}{(X+1)(X+2)(X-3)(X-4)}$$

例10、计算 $\frac{(a^2-b^2)^3}{a^3+b^3}\div\frac{(b+a)^2}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{1}{(b-a)^3}$

解：原式 $=\frac{[(a+b)(a-b)]^3}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{(b+a)^2}\cdot\frac{1}{(b-a)^3}$

$$=\frac{(a+b)^3(a-b)^3\cdot(a^2-ab+b^2)}{(a+b)^3(a^2-ab+b^2)(b-a)^3}=-1$$

例11：化简 $\dfrac{1+\frac{1}{X}}{\frac{2}{X^2}}$

解： $\dfrac{1+\frac{1}{X}}{\frac{2}{X^2}}=\dfrac{(1+\frac{1}{X})\cdot X^2}{\frac{2}{X^2}\cdot X^2}=\dfrac{X^2+X}{2}$

3、根式

形如$\sqrt[n]{a}$的式子，叫做根式，当n是奇数时，被开方数a可以是任何实数；当n为偶数时，a必须是非负的实数。

（1）正数的平方根与算术平方根。正数的平方根是两个互为相反的数，负数没有平方根。正数的正的平方根叫做算术平方根。

（2）关于二次方根的几个公式：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a，当a>0时\\0，当a=0时\\-a，当a<0时\end{cases}$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\qquad(a\geqslant0，b\geqslant0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}\qquad(a\geqslant0，b>0)$$

（3）最简根式，同类根式

最简根式：如果一个根式适合下面三个条件①被开方数的指数和根指数没有公约数；②被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；③被开方数不含有分母，这样的根式叫做最简根式。

同类根式，几个根式化成最简根式以后，如果被开方数相同，根指数也相同，那么这几个根式就叫做同类根式。

（4）二次根式的四则运算及分母有理化。

加法与减法，先把各个根式化成最简根式，再把同类根式分别合并。

乘法：同次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变；异次根式相乘，先化成同次根式，再进行相乘。

除法：同次根式相除，把被开方数相除，根指数不变；异次根式相除，化成同次根式后，再相除。

从上面的运算法则可知，非同次根式，不能进行运算。

例12、计算：

（1）$\sqrt{a^2-2ab+b^2}\quad(a<b)$　　（2）$\sqrt{(\lg3)^2-\lg9+\lg10}$

解：（1）$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$

$\because a<b\qquad\therefore a-b<0$

$\therefore\sqrt{a^2-2ab+b^2}=|a-b|=-(a-b)=b-a$

解（2）

$$\sqrt{(\lg3)^2-\lg9+\lg10}=\sqrt{(\lg3)^2-2\lg3+1}$$

$$=\sqrt{(\lg3-1)^2}=1-\lg3$$

例13、计算$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+20\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)$

解：原式$=\left(\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1}+\frac{20}{2\sqrt{2}}-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}\right)$

$$=\left((\sqrt{2}-1)^2+5\sqrt{2}-\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$=[3-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})^2]$

$=(3+3\sqrt{2}-3-2\sqrt{2})=\sqrt{2}$

例14：已知 $X=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ 求 $\frac{2b\sqrt{X^2-1}}{X-\sqrt{X^2-1}}$ 的值

解：$X=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$

$$\sqrt{X^2-1}=\sqrt{\frac{(\ +b)^2}{4ab}-1}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}=\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}$$

$$\therefore\frac{2b\sqrt{X^2-1}}{X-\sqrt{X^2-1}}=(2b\sqrt{X^2-1})(X+\sqrt{X^2-1})$$

$$=2b(X\sqrt{X^2-1}+X^2-1)$$

$$=2b\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}+\frac{(a-b)^2}{4ab}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}[(a+b)|a-b|+(a-b)^2]$$

当 $a\geqslant b$ 时，原式 $=\frac{1}{2a}(a^2-b^2+a^2-2ab+b^2)=a-b$

当 $a<b$ 时，原式 $=\frac{1}{2a}(b^2-a^2+a^2-2ab+b^2)=\frac{b}{a}(b-a)$

例15、把下列各式的分母有理化：

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\quad\frac{1}{2-\sqrt{3}},\quad\frac{1}{\sqrt{2}+1},\quad\frac{1}{\sqrt{X}-\sqrt{X-1}}.$$

解：$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$$

练习三

1、化简

（1）$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{2ab}{b^2-a^2}$ （答 $\frac{a+b}{a-b}$ ）

（2）$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ （答 $\frac{b-a}{a+b}$ ）

（3） $\dfrac{1}{(a-b)(a-C)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-C)}+\dfrac{1}{(C-a)(C-b)}$ （答 0）

（4） $a-a+\left\{\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\left[(a-\dfrac{a^2+b^2}{b})\div(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b})\right]\right\}$ （答 $a-1$）

（5） $\dfrac{X^{2n+1}-6X^{2n}+9X^{2n-1}}{X^{n+1}-4X^{n}+3X^{n-1}}$ （答 $\dfrac{X^n(X-3)}{X-1}$）

2、化简

（1） $\sqrt{(2X-3)^2}$ （答 $X\geqslant\dfrac{3}{2}$时，$2X-3$、$X<\dfrac{3}{2}$时，$3-2X$）

（2） $\sqrt{\left(\dfrac{X+2}{X-1}\right)^2}$ （答 $X>1$或$X\leqslant-2$时，$\dfrac{X+1}{X-1}$

$-2<X<1$时，$\dfrac{X+2}{1-X}$）

（3） $\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{(a-7)^2}$ （答 当$a\leqslant1$时，$8-2a$

当$1<a<7$时，6、当$a\geqslant7$时，$2n-8$）

3、计算：

（1）$\sqrt{12}-\sqrt{48}-3\sqrt{3}$ 〔答$-5\sqrt{3}$〕

（2）$5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{20}-\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\sqrt{45}$ 〔答$4\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$〕

（3）$\dfrac{2}{3}\sqrt{27x^3}+6x\sqrt{\dfrac{x}{3}}-X^2\sqrt{\dfrac{3}{x}}$ 〔答$3x\sqrt{3x}$〕

（4） $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$

〔答$-18-11\sqrt{6}$〕

4、化简：

（1） $(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}})\div(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}})$

〔答$\sqrt{b}-\sqrt{a}$〕

（2） $\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\div4\sqrt{ab}$

〔答$\dfrac{\sqrt{a}}{2a(a-b)}$〕

三、指数与对数

有理指数幂的概念

（1）定义：正整数指数幂$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n个}$ （n是正整数）

零指数幂$a^0=1$　　负整数指数幂$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$（$a\neq0$，m为正整数）

分数指数幂　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　（$a>0$、m、n为正整数且$n>1$；$a<0$，$n>1$奇数m是正整数）

（2）有理指数幂的运算法则

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　$(a^m)^n=a^{mn}$　$(ab)^n=a^nb^n$

（其中$a>0$，$b>0$，m、n为有理数）

例1、计算 $(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+(\frac{1}{10})^{-2}-(3.14)^0+(-\frac{27}{8})^{\frac{1}{3}}$

解：原式$=(\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}}+(10^{-1})^{-2}-1+(-\frac{3}{2})$

$$=\frac{3}{2}+10^2-1-\frac{3}{2}=99$$

例2、计算 $\dfrac{(a^{\frac{8}{5}}\cdot b^{-\frac{6}{5}})^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$　解：原式$=\dfrac{a^{\frac{8}{5}\times(-\frac{1}{2})}b^{(-\frac{6}{5})\times(-\frac{1}{2})}\cdot a^{\frac{4}{5}}}{b^{\frac{3}{5}}}$

$=a^{-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}}\cdot b^{\frac{3}{5}+(-\frac{3}{5})}=1$

2、对数与指数的关系，对数的基本运算法则，换底公式。

（1）对数与指数的关系。

对数的定义：如果$a^b=N$（$a>0$且$a\neq1$），那么b就叫做以a为底N的对数，记作$\log_a N=b$，a叫底数，N叫真数。

由对数的定义可知式子$a^b=N$和$\log_a N=b$所表达的a、b、N三个数之间关系是一样的，而只是形式不同。

$a^b=N$叫指数式，a叫底数，b叫指数，N称为幂，其意义是a的b次幂等于N。$\log_a N=b$叫对数式，a叫底数，b叫对数，N称为真数，其意义是以a为底N的对数等于b。

从对数的定义可以得到一个很重要的恒等式。

$$a^{\log_a N}=N\quad(a>0\text{且}a\neq1,\ N>0)$$

（2）对数的基本运算法则

i）由对数的定义易得出零和负数没有对数，1的对数永远是0，即$\log_a 1=0$，底的对数为1，即$\log_a a=1$。

ii）积、商、幂、方根的对数

$\log_a(N_1\cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$（$N_1$、$N_2$都是正数，并且$a\neq1$）

$\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right)=\log_a N_1-\log_a N_2$（$N_1$、$N_2$都是正数，$a>0$，且$a\neq1$）

$\log_a(N^n)=n\log_a N$（N是正数，$a>0$且$a\neq1$）

$$\log_a\sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N\ （N是正数，a>0且\neq 1）$$

（3）换底公式 以a为底的N的对数，可以变换成其他任何一个不等于1的正数为底的对数，这是因为：对式子

$$N=a^{\log_a N}\ （a>0且a\neq 1，N>0）$$

两边取以b（b>0且b≠1）为底的对数、得 $\log_b N=\log_a N\cdot\log_b a$

$\therefore\ \log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$ 这个式子叫做对数的换底公式（其中a>0且a≠1，b>0且b≠1、N>0）

例3、设a、b、c都是正数，求证：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

证明 由对数的换底公式：

$$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{\lg c}{\lg b}\cdot\frac{\lg a}{\lg c}=1$$

例4、已知$\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求$\log_{36}45$

解：$\because 18^b=5$ $\quad\therefore\log_{18}5=b$

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}18+\log_{18}2}=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}$$

$$\log_{18}2=\log_{18}\frac{18}{9}=\log_{18}18-\log_{18}9=1-a\quad\therefore\ \log_{36}45=\frac{a+b}{2-a}$$

3、常用对数及其性质，常用对数表的用法。

（1）常用对数及其性质

1° 常用对数，以10为底的对数，称为常用对数，N的常用对数记为lgN。

2° 常用对数除具有一般对数的性质外，还有下面的性质

i）$\lg 10^n=n$（n是正整数）

ii）大于1的数的对数，首数等于真数的整数部分的位数减1；小于1的正数的对数，首数是负数，这个负数的绝对值等于真数里第一个不是零的数字前连续所有零的个数（包括小数点前那一个零）。如$\lg 51.23=1.7096$ $\lg 0.05123=\overline{2}.7096$，

iii）只有小数点位置不同的数，它们的对数的尾数相同，只是首数不同。尾数可以从对数表中查得。

（2）常用对数表的用法（略）

4、常用对数在数值计算中的应用。

根据常用对数的性质，可以不查表求一些对数式的值，也可以根据对数的运算法则，把一些较复杂数字的乘除、乘方、开方等运算，化成对数计算较为方便。

例5，不查表计算$\lg 25+\lg 2\lg 50+\lg^2 2$

解：$\lg 25+\lg 2\lg 50+\lg^2 2$

$$=2\lg\frac{10}{2}+\lg 2\lg\frac{100}{2}+\lg^2 2$$

$$=2(1-\lg 2)+\lg 2(2-\lg 2)+\lg^2 2$$