黎曼几何的积分公式

[日] 矢野健太郎 著
王运达
王有道 译

东北工学院

黎曼几何的积分公式

[日] 矢野健太郎　著
王运达
王有道　译

东 北 工 学 院

前　　言

在经典微分几何里，自高斯以来，积分公式风行一时，使用这种公式已经得到许多很好的整体结果。

在黎曼几何里，约从三十年前 Bochner，陈省身，Hodge，Thomas 等开始使用积分公式。人们发现在黎曼几何中为得到整体结果积分公式是强有力的工具之一。

本书的主要目的是阐述黎曼几何中应用积分公式得到的某些重要结果，同时鼓励读者钻研这门有趣的数学分支。

在第一章我们重温黎曼几何的基本概念和公式，本书到处都要用到这些知识。

在第二章讨论调和 1- 形式与开玲向量场的理论，这种理论主要是 Bochner，Lichnerowicz 与著者发展起来的。

在第三章讨论容许一无穷小共形变换的常数数量曲率黎曼流形。本章结果是 Barbance，Bishop，Couty，Goldberg，熊全治，Kobayashi，Kurita，Lichnerowicz，Liu，Nagano，Obata，Satô，Sawaki，Tashiro，Weber 以及著者得到的。

在第四章我们将第二章中得到的诸结果推广到调和形式与开玲张量场上去。这些结果主要是 Bochner，Lichnerowicz 以及著者得到的。

在第五章讨论欧氏空间的超曲面并且证明闭凸曲面的一些经典定理的推广。因为在本书的剩余部分讨论黎曼流形的超曲面、有边黎曼流形的调合形式、开玲向量场与开玲张量场，所以复习了黎曼流形的超曲面中的一些基本公式。

经过这样准备后，在第六章讨论黎曼流形中的常数平均曲率闭超曲面。这里讲到的结果主要是 Alexandrov，熊全治，Katsurada， Kôjyô, Koyanagi, Liebmann, Nɛ

Tazawa 以及著者得到的。

在第七章研究有边黎曼流形中的调和 1- 形式与开玲向量场，在第八章研究这样流形里的调和形式与开玲张量场。这两章的结果主要是 Ako, Ba, Bochner, Duff, Hilt，熊全治，Nakae, Spencer, Takahashi 以及著者得到的。

在厄米几何（Hermitian geometry），凯拉几何（Kaelerian geometry）与殆切触流形（almost-contact manifold）的几何中也能找到积分公式的应用。在著者的 Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces (Pergamon Press, 1965) 中已阐述过某些应用，因此，本书不再讨论这些课题。

书末文献不仅包括课文中引用过的文章和书刊，也包括著者认为读者关心的那些资料。此外，尚有厄米几何，凯拉几何以及殆切触流形几何的重要文章。这些都加上了星号。

贯穿本书，著者不加区别地使用了无指标的和带指标的符号。

1968～69 学年第一学期 Samuel I. Goldberg 教授邀请著者在 Illinois 大学做 G. A. Miller 访问教授，Goldberg 教授审阅了本书手稿并提了宝贵意见，因此著者向 Illinois 大学，特别向 Goldberg 教授表示深切的谢意。

在校样方面，得到我的同事 M. Konishi, S. Kotō, Y. Kubo, M. Okumura, S. Sawaki 许多有价值的帮助。

著者也对 Marcel Dekker 公司的最令人愉快的合作表示感谢。

矢野健太郎 1970 年

中译本根据《Integral Formulas in Riemannian Geometry》Marcel Dekker Inc.（1970）全文译出，修改了个别错字并且补充了一个附录。

译者 1984年1月

目　　录

第四章　调和形式与开玲张量场

第五章　黎曼流形的超曲面

第六章　黎曼流形的常数平均曲率闭超曲面

第一章　黎曼几何中的基本概念与公式

在这章里复习以后要用到的黎曼几何中的一些基本概念与基本公式。(例如请看[1]：Auslander and MacKenzie〔1〕, Bishop and Crittenden〔1〕, Bishop and Goldberg〔2〕, Cartan〔1〕, Chern〔2, 3〕, Craig〔1〕, Eisenhart〔1〕, Flanders〔1〕, Gerretsen〔1〕, Guggenheimer〔2〕, Helgason〔1〕, Hicks〔1〕, Hodge〔1〕, Kobayashi and Nomizu〔1, 2〕, Lang〔1〕, Laugwitz〔1〕, Levi-Civita〔1〕, Lichnerowicz〔5, 10〕, McConnell〔1〕, Nomizu〔1〕, O'Neill〔1〕, de Rham〔3〕, Schouten〔1〕, Sokolnikoff〔1〕, Spain〔1〕, Springer〔1〕, Sternberg〔1〕, Struik〔1〕, Synge and Schild〔1〕, Thomas〔2〕, Veblen〔1〕, Weatherburn〔1〕, Weber and Goldberg〔1〕, Weyl〔2〕, Willmore〔1〕, Yano and Bochner〔1〕。)

§1　黎曼流形

我们考虑 n 维 C^∞ 级连通微分流形 M。设 M 由一坐标邻域系 $\{U;\ x^h\}$复盖，其中 U 表示一个邻域而 x^h 表示 U 里的局部坐标，指标 h, i, j, k 在 $1,2,\cdots,n$ 的范围内取值。

如果从复盖流形 M 的任何坐标邻域系能选出有限个坐标邻域复盖整个流形，就说流形是**紧致**的。

---

1) 可参看立花俊一著《黎曼几何》中译本　东北工学院 1981 年，
矢野健太郎著《黎曼几何学人门》中译本 东北工学院 1982年，
栗田稔著《黎曼几何》中译本 东北工学院 1982年，(译者注)。

如果能用一坐标邻域系复盖整个流形 M 使得在任意二坐标邻域 $\{U, x^h\}$与$\{U', x^{h'}\}$ 的非空交集中坐标变换

$$x^{h'}=x^{h'}(x^1,\cdots,x^n) \tag{1.1}$$

的雅可比行列式$|\partial x^{h'}/\partial x^h|$恒为正，就说流形 M **可定向。**

假设在M里给定一个 C^∞ 级(0,2)阶正定对称张量场 g，即一个(0,2)阶张量场 g 使得对于任意向量场X与Y

$$g(X,Y)=g(Y,X), \quad g(X,X)\geqslant 0 \tag{1.2}$$

而且当且仅当 $X=0$ 时 $g(X,X)=0$。人们说这样流形 M 是**黎曼流形。**

如果用

$$\partial_i=\partial/\partial x^i$$

表示自然标架的基底，则对于任何向量场X与Y有

$$X=X^h\partial_h, \qquad Y=Y^h\partial_h,$$

式中 X^h 与 Y^h 分别为 X 与 Y 关于自然标架的局部分量，在这里使用了关于重复指标的爱因斯坦求和规定。

于是得

$$g(X,Y)=g(X^j\partial_j, \ Y^i\partial_i)=g_{ji}X^jY^i, \tag{1.3}$$

式中 $g_{ji}=g(\partial_j,\partial_i)$是张量场 g 的局部分量。在 M 里可微分曲线

$$x^h=x^h(t) \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2)$$

的弧长用定积分

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ji}(x(t))\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}}dt \tag{1.4}$$

度量。

因此，有时张量场 g 叫做黎曼流形 M 的**基本度量张量。**

因为已经假设了二次形式 $g(X, X)$正定，所以可用

$$|X|=\sqrt{g(X,X)}$$

定义向量X的**长**或**模**，而二向量X与Y在同一点的**夹角** θ 是用

$$\cos\theta=\frac{g(X,Y)}{\sqrt{g(X,X)}\sqrt{g(Y,Y)}} \tag{1.6}$$

定义的。由此得

$$g(X,Y)=|X||Y|\cos\theta, \tag{1.7}$$

$g(X,Y)$ 叫做X与Y的**内积**。

因为二次形式 $g(X,X)$正定，所以由 g 的局部分量 g_{ij} 作成的行列式

$$\mathrm{g}=|g_{ij}| \tag{1.8}$$

总是正，从而能够找到 g^{ih} 满足

$$g_{ji}g^{ih}=\delta_j^h, \tag{1.9}$$

式中 δ_j^h 是 Kronecker δ，即

$$\delta_j^h=\begin{cases}1, & h=j,\\ 0, & h\neq j.\end{cases}$$

g^{ih} 是度量张量 g 的**反变分量**，g_{ji} 是**共变分量**．δ_j^h 是**单位张量** I 的局部分量。

设 S 为(1,2)阶张量场。于是对于任何向量场 X 与Y，$S(X,Y)$ 是一个向量场。如果令$X=X^h\partial_h$，$Y=Y^h\partial_h$，则 $S(X,Y)$ 关于局部标架的局部分量为

$$S_{ji}{}^hX^jY^i.$$

对于这个(1,2)阶张量场 S，任意的向量场 X，Y，Z；可以定义一个(0,3)阶张量场

$$g(S(X,Y),Z),$$

$g(S(X,Y),Z)$ 的分量表达式是

$$g_{th}S_{ji}{}^tX^jY^iZ^h.$$

因此，这个(0,3)阶张量的局部分量是

$$S_{jih}=S_{ji}{}^tg_{th}.$$

降标是一种运算，在这种运算下张量场 $S(X,Y)$ 的局部分量 $S_{ji}{}^h$ 按上述公式生成张量场 $g(S(X,Y),Z)$的局部分量 S_{jih}。

这个公式也写做

$$S_{ji}{}^h=S_{jit}g^{th}.$$

这种运算叫做**升标**。

当给定一张量场 S，例如是 (1,2) 阶的，由此张量可定义各种 (p,q) $(p+q=3)$阶张量使其分量为

$$S_{ji}{}^{h},\ S_{jih},\ S_{j}{}^{ih},\ S^{jih},\cdots,$$

其中

$$S_{j}{}^{ih}=S_{ji}{}^{h}g^{ti},\qquad S^{jih}=S_{t}{}^{ih}g^{tj},\cdots,$$

我们说这些张量互相**共轭**，或它们是共轭张量。令

$$|S|^{2}=S_{jih}S^{jih},$$

$|S|$叫做S的**长**或**模**。

推而广之，设二张量场S与T的分量分别是S_{jih}与T^{jih}，采用符号

$$\langle S,T\rangle=S_{jih}T^{jih}. \tag{1.10}$$

于是对于二向量场X，Y，

$$\langle X,Y\rangle=g(X,Y), \tag{1.11}$$

而对于张量场S，

$$\langle S,S\rangle=|S|^{2}. \tag{1.12}$$

设X为一向量场，T为一张量场（例如是(0,3)阶），它们的分量分别为 X^{h} 与 T_{jih}。定义一(0,2)阶张量场

$$i(X)T \tag{1.13}$$

为

$$X^{j}T_{jih}.$$

我们也用符号

$$X\lrcorner T \tag{1.14}$$

表示这个张量场，而用

$$T\llcorner X \tag{1.15}$$

表示分量为

$$T_{jih}X^{h}$$

的张量场。

设S为$(s,0)$阶张量场，T为$(0,t)$ $(s<t)$阶张量场，它们的分量分别是 $S^{i_1i_2\cdots i_s}$ 与 $T_{j_1j_2\cdots j_t}$。用

$$S \lrcorner T \tag{1.16}$$

表示分量为

$$\frac{1}{s!} S^{i_1 i_2 \cdots i_s} T_{i_1 i_2 \cdots i_s j_{s+1} \cdots j_t}$$

的$(0, t-s)$阶张量场，而用

$$T \llcorner S \tag{1.17}$$

表示分量为

$$\frac{1}{s!} T_{j \cdots j_{t-s} i_1 i_2 \cdots i_s} S^{i_1 i_2 \cdots i_s}.$$

的$(0, t-s)$阶张量场。我们还用

$$S \otimes T \tag{1.18}$$

表示S与T的**张量积**，即其分量为

$$S^{i_1 i_2 \cdots i_s} T_{j j_2 \cdots j_t}$$

的(s, t)阶张量场。

现在引进两个符号 $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 与 $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$，它们的定义是

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{当}(i_1, i_2, \cdots, i_n)\text{是}(1,2,\cdots,n)\text{的偶置换}, \\ -1 & \text{当}(i_1, i_2, \cdots, i_n)\text{是}(1,2,\cdots,n)\text{的奇置换}, \\ 0 & \text{其他情况。} \end{cases} \tag{1.19}$$

$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 是权 -1 相对共变张量的局部分量而 $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$是权$+1$相对反变张量的局部分量。有时，这些符号叫做**爱丁顿**(Eddington)**的爱泼西隆**（Epsilon）。

因为 $g = |g_{ji}| > 0$ 是权 2 相对数量的分量，所以

$$e_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \sqrt{g}\, \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n},$$

$$e^{i_1 i_2 \cdots i_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} \tag{1.20}$$

分别是（0，n）阶与（n，0）阶绝对张量的分量。此张量用 e 表示。

$e_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 与 $e^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 都是反称的，并且它们之间有关系：

$$e_{i_1 i_2 \dots i_n} = e^{t_1 t_2 \cdots t_n} g_{t_1 i_1} g_{t_2 i_2} \cdots g_{t_n i_n} \tag{1.21}$$

以及

$$e^{i_1 i_2 \cdots i_n} = e_{t_1 t_2 \dots t_n} g^{t_1 i_1} g^{t_2 i_2} \cdots g^{t_n i_n}. \tag{1.22}$$

当黎曼流形M可定向时，可用

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{1.23}$$

定义M的体积素，它总是正的。式中的“$\wedge$”表示外积。我们可定义一函数 f 在M的域D上的积分

$$\int_D f(x) dV. \tag{1.24}$$

现在来考虑 p- 形式

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

令

$$*\omega = \omega \lrcorner e \tag{1.25}$$

$*\omega$ 叫做 ω 的**对偶形式**。易证对于任意 p- 形式 ω 与 θ，

$$**\omega = (-1)^{p(n+1)} \omega \tag{1.26}$$

以及

$$\langle *\omega, *\theta \rangle = \langle \omega, \theta \rangle. \tag{1.27}$$

§2 共变微分

积分

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ji}(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt}}\, dt$$

的欧拉微分方程是测地线的方程

$$\frac{d^2 x^h}{ds^2} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds} = 0, \tag{2.1}$$

式中 s 为曲线的弧长，而

$$\left\{ {h \atop j\,i} \right\} = \frac{1}{2} g^{ht} (\partial_j g_{it} + \partial_i g_{jt} - \partial_t g_{ji}) \tag{2.2}$$

是**克氏三指标记号**（简称**克氏记号**）．

我们用 ∇_X 表示沿向量场X关于克氏记号求共变导数这个算子。

数量 f 沿向量场X的共变导数 $\nabla_X f$ 的局部分量是

$$\nabla_X f: Xf = X^i \partial_i f, \tag{2.3}$$

式中 f 与 X^i 分别是 f 与 X 的局部分量。$\nabla_X f$ 定义一个 1- 形式，记做 ∇f ，使$(\nabla f)(X) = \nabla_X f$。$\nabla f$ 具有局部分量

$$\nabla f: \nabla_i f = \partial_i f. \tag{2.4}$$

有时用 df 表示 ∇f。

向量场Y沿向量场X的共变导数 $\nabla_X Y$ 的局部分量是

$$\nabla_X Y: X^j \nabla_j Y^h = X^j (\partial_j Y^h + \{{}_j{}^h{}_i\} Y^i), \tag{2.5}$$

式中 X^h 与 Y^h 分别是 X 与 Y 的局部分量。$\nabla_X Y$ 定义一个(1，1）阶张量场，记做 ∇Y，使$(\nabla Y)X = \nabla_X Y$，∇Y 的局部分量是

$$\nabla Y: \nabla_j Y^h = \partial_j Y^h + \{{}_j{}^h{}_i\} Y^i. \tag{2.6}$$

在这里应注意

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0.$$

此式说明联络 ∇ 无挠率。式中$[X,Y]$表示由

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{2.7}$$

定义的向量场，f 是任意函数。其局部分量是

$$[X,Y]: X^i \partial_i Y^h - Y^i \partial_i X^h, \tag{2.8}$$

X^h 与 Y^h 分别是X与Y的局部分量。

1- 形式 ω 沿X的共变导数 $\nabla_X \omega$ 是由

$$(\nabla_X \omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \tag{2.9}$$

定义的 1- 形式，式中X与Y为任意向量场。$\nabla_X \omega$ 的局部分量是

$$\nabla_X \omega: X^j \nabla_j \omega_i = X^j (\partial_j \omega_i - \{{}_j{}^h{}_i\} \omega_h), \tag{2.10}$$

ω_i 与 X^h 分别是 ω 与 X 的局部分量。$\nabla_X \omega$ 定义一个 (0,2) 阶张量场，记做 $\nabla \omega$，使 $(\nabla\omega)(X,Y) = (\nabla_X \omega)(Y)$。$\nabla\omega$ 的局部分量是

$$\nabla\omega: \nabla_j \omega_i = \partial_j \omega_i - \{{}_j{}^h{}_i\} \omega_h. \tag{2.11}$$

在这里应注意

$$(\nabla\omega)(X,Y) - (\nabla\omega)(Y,X) \tag{2.12}$$

的局部分量是

$$\partial_j\omega_i - \partial_i\omega_j,$$

因此与克氏记号无关。

一般张量场 S，例如(1,2)阶的，沿一向量场X的共变导数 $\nabla_X S$ 是由

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \nabla_X(S(Y,Z)) - S(\nabla_X Y,Z) - S(Y,\nabla_X Z) \qquad (2.13)$$

定义的(1,2)阶张量，其中 X,Y,Z 是任意向量场。$\nabla_X S$ 的局部分量是

$$\nabla_X S\text{：}\ X^k\nabla_k S_{ji}{}^h = X^k(\partial_k S_{ji}{}^h + \{{}_k{}^h{}_t\}S_{ji}{}^t - \{{}_k{}^t{}_j\}S_{ti}{}^h - \{{}_k{}^t{}_i\}S_{jt}{}^h), \qquad (2.14)$$

$S_{ji}{}^h$ 与 X^h 分别是 S 与 X 的局部分量。$\nabla_X S$ 定义一个(1,3)阶张量场，记做 ∇S，使$(\nabla S)(X,Y,Z) = (\nabla_X S)(Y,Z)$。$\nabla S$ 的局部分量是

$$\nabla S\text{：}\ \nabla_k S_{ji}{}^h = \partial_k S_{ji}{}^h + \{{}_j{}^h{}_t\}S_{ji}{}^t - \{{}_k{}^t{}_j\}S_{ti}{}^h - \{{}_k{}^t{}_i\}S_{jt}{}^h. \qquad (2.15)$$

我们也能定义相对张量场的共变导数。例如，权 +2 相对数量 g 的共变导数是

$$\nabla_i \mathrm{g} = \partial_i \mathrm{g} - 2\{{}_i{}^t{}_t\}\mathrm{g}.$$

人们知道

$$\nabla g = 0\text{：}\ \begin{aligned}&\nabla_k g_{ji} = \partial_k g_{ji} - \{{}_k{}^t{}_j\}g_{ti} - \{{}_k{}^t{}_i\}g_{jt} = 0,\\ &\nabla_k g^{ih} = \partial_k g^{ih} + \{{}_k{}^i{}_t\}g^{th} + \{{}_k{}^h{}_t\}g^{it} = 0,\end{aligned} \qquad (2.16)$$

$$\nabla \mathrm{g} = 0\text{：}\ \nabla_i \mathrm{g} = \partial_i \mathrm{g} - 2\{{}_i{}^t{}_t\}\mathrm{g} = 0, \qquad (2.17)$$

$$\nabla I = 0\text{：}\ \nabla_j \delta_i^h = \partial_j \delta_i^h + \{{}_j{}^h{}_t\}\delta_i^t - \{{}_j{}^t{}_i\}\delta_t^h = 0, \qquad (2.18)$$

$$\nabla e = 0\text{：}\ \begin{aligned}&\nabla_j e_{i_1 i_2\ldots i_n} = \partial_j e_{i_1 i_2\ldots i_n} - \{{}_j{}^t{}_{i_1}\}e_{t i_2\ldots i_n} - \cdots - \{{}_j{}^t{}_{i_n}\}e_{i_1 i_2\ldots t} = 0,\\ &\nabla_j e^{i_1 i_2\cdots i_n} = \partial_j e^{i_1 i_2\cdots i_n} + \{{}_j{}^{i_1}{}_t\}e^{t i_2\cdots i_n} + \cdots + \{{}_j{}^{i_n}{}_t\}e^{i_1 i_2\cdots t} = 0.\end{aligned} \qquad (2.19)$$

众所周知，由克氏记号定义的联络是无挠率又满足 $\nabla g = 0$ 的唯

一联络。此种联络叫做**黎曼联络**。

现在考虑 p- 形式

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

或$(0,p)$阶反称张量场。$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}$ 是 p- 形式的或 $(0, p)$ 阶反称张量场的局部分量。

ω 的**外微分**或简称**微分** $d\omega$ 是$(p+1)$-形式，其局部表达式是

$$d\omega = \frac{1}{(p+1)!}(\partial_i \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} - \partial_{i_1} \omega_{i i_2 \dots i_p} - \partial_{i_2} \omega_{i_1 i i_3 \dots i_p} - \cdots - \partial_{i_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \qquad (2.20)$$

此式也能写做

$$d\omega = \frac{1}{(p+1)!}(\nabla_i \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_1} \omega_{i i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_2} \omega_{i_1 i i_3 \dots i_p} - \cdots - \nabla_{i_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \qquad (2.21)$$

如所周知，对于任意 p- 形式 ω，

$$d(d\omega) = 0. \qquad (2.22)$$

从 p- 形式

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

作$(p-1)$- 形式

$$\delta\omega = -\frac{1}{(p-1)!}(g^{ji} \nabla_j \omega_{i i_2 \dots i_p}) dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \qquad (2.23)$$

它叫做 p- 形式 ω 的**上微分**。如果 ω 是函数 f，则令 $\delta f = 0$。

对于任何 p- 形式可以证明

$$\delta(\delta\omega) = 0. \qquad (2.24)$$

我们也定义更一般张量场S的上微分。例如，设S为 $(0,3)$ 阶张量场并用 S_{jih} 表示它的局部分量。这时，δS 是$(0, 2)$阶张量场

$$\delta S_{ih} = -g^{kj} \nabla_k S_{jih} \qquad (2.25)$$

或

$$\delta S_{:}\ -\nabla^l S_{lik}, \tag{2.26}$$

式中

$$\nabla^l = g^{li}\nabla_i.$$

当 p- 形式 ω 或$(0,p)$阶反称张量场满足

$$d\omega = 0 \text{ 与 } \delta\omega = 0 \tag{2.27}$$

时，ω 叫做**调和形式**[1]。

如果令

$$\Delta = \delta d + d\delta, \tag{2.28}$$

则对于调和 p- 形式 ω，

$$\Delta\omega = 0。 \tag{2.29}$$

如果有一向量场 X，设其局部分量为 X^h，则存在它的联带1-形式

$$\xi = g_{ji}X^j dx^i = X_i dx^i.$$

ξ 的上微分 $\delta\xi$ 是

$$\delta\xi = -\nabla_i X^i = -g^{ji}\nabla_j X_i. \tag{2.30}$$

它也用 δX 表示。

现在叙述

格林定理[2]. 在无边紧致可定向黎曼流形 M 里，对于任意向量场X，

$$\int_M (\delta X)\, dV = 0$$

或

$$\int_M (\nabla_i X^i)\, dV = 0 \text{ 或 } \int_M (g^{ji}\nabla_j X_i)\, dV = 0$$

成立，式中 X^i，X_i 是 X 的局部分量。

如果有一函数 f，则可作 f 的微分 df 的上微分 δdf。其局部表示为 $-g^{ji}\nabla_j\nabla_i f$。令

$$\Delta f = -g^{ji}\nabla_j\nabla_i f \tag{2.31}$$

1) 这个定义是 W. V. D. Hodge 给出的，与 K. Kodaira 定义的 $\Delta\omega = 0$ 不同，然而，对于紧致可定向流形，二定义等价。

2) 此定理的证明见前出立花俊一著书 p.171.（译者注）