

# 师范数学

(下 册)

4351

哈尔滨市教师进修学院  
哈尔滨市南岗教师进修学校

翻印

# 目 录

|                         |      |
|-------------------------|------|
| <b>第六章 有理数和集合</b> ..... | (1)  |
| 第一节 有理数的认识.....         | (1)  |
| 一、具有相反意义的量.....         | (1)  |
| 二、数轴.....               | (4)  |
| 三、相反数和绝对值.....          | (5)  |
| 第二节 有理数的运算.....         | (9)  |
| 一、有理数的加法.....           | (9)  |
| 二、有理数的减法.....           | (13) |
| 三、代数和.....              | (14) |
| 四、有理数的乘法.....           | (15) |
| 五、有理数的除法.....           | (17) |
| 第三节 集合和集合的运算.....       | (22) |
| 一、集合.....               | (23) |
| 二、集合的运算定律.....          | (32) |
| 三、集合上运算的封闭性.....        | (35) |
| <b>第七章 比和比例</b> .....   | (41) |
| 第一节 比.....              | (41) |
| 一、比的意义.....             | (41) |
| 二、比的性质.....             | (44) |
| 三、比例尺.....              | (45) |
| 第二节 比例.....             | (48) |
| 一、比例的意义.....            | (48) |

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 二、比例的基本性质       | (49)  |
| 三、解比例           | (50)  |
| 四、四个数组成比例的充要条件  | (51)  |
| 五、诱导比例          | (53)  |
| 六、等比的性质         | (55)  |
| 第三节 成比例的量       | (58)  |
| 一、成正比例的量        | (58)  |
| 二、成反比例的量        | (62)  |
| 三、两个量成比例的充要条件   | (66)  |
| 四、正反比例的图象       | (70)  |
| 第四节 比例应用题       | (75)  |
| 一、两个量成比例的应用题    | (75)  |
| 二、两个以上的量成比例的应用题 | (79)  |
| 三、按比例分配的应用题     | (82)  |
| <b>第八章 统计图表</b> | (91)  |
| 第一节 统计表         | (91)  |
| 第二节 统计图         | (94)  |
| 一、条形统计图         | (94)  |
| 二、折线统计图         | (97)  |
| 三、扇形统计图         | (98)  |
| <b>第九章 平面图形</b> | (104) |
| 第一节 直线、射线、线段和角  | (104) |
| 一、直线、射线和线段      | (104) |
| 二、直线的测定和测量      | (105) |
| 三、步测和目测         | (106) |
| 四、角的认识          | (106) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 五、角的度量·····              |       |
| 六、垂线和平行线·····            | (111) |
| 第二节 长方形和正方形·····         | (113) |
| 一、长方形和正方形的认识·····        | (113) |
| 二、长方形和正方形的周长·····        | (114) |
| 三、面积和面积(地积)单位·····       | (114) |
| 四、长方形和正方形的面积·····        | (117) |
| 第三节 平行四边形、三角形和梯形·····    | (121) |
| 一、平行四边形的认识·····          | (121) |
| 二、平行四边形的面积·····          | (123) |
| 三、三角形的认识·····            | (124) |
| 四、三角形的面积·····            | (126) |
| 五、梯形的认识·····             | (128) |
| 六、梯形的面积·····             | (129) |
| 第四节 圆·····               | (133) |
| 一、圆的认识·····              | (133) |
| 二、圆的周长·····              | (133) |
| 三、圆的面积·····              | (135) |
| 四、扇形的面积·····             | (136) |
| 第五节 组合图形·····            | (142) |
| <b>第十章 多面体和旋转体</b> ····· | (148) |
| 第一节 多面体·····             | (148) |
| 一、棱柱的认识·····             | (148) |
| 二、棱锥的认识·····             | (150) |
| 三、棱台的认识·····             | (152) |
| 第二节 旋转体·····             | (155) |

|                     |       |
|---------------------|-------|
| 一、圆柱的认识             | (155) |
| 二、圆锥的认识             | (155) |
| 三、圆台的认识             | (157) |
| 第三节 柱、锥、台的侧面展开图和侧面积 | (159) |
| 一、直棱柱和圆柱的侧面展开图和侧面积  | (159) |
| 二、正棱锥和圆锥的侧面展开图和侧面积  | (163) |
| 三、正棱台和圆台的侧面展开图和侧面积  | (166) |
| 第四节 柱、锥、台的体积        | (173) |
| 一、体积和体积单位           | (173) |
| 二、柱、锥、台的体积          | (174) |
| 第五节 球               | (188) |
| 一、球的认识              | (188) |
| 二、球的体积              | (189) |
| <b>附录 1 球缺和球冠</b>   | (190) |
| 一、球缺和球冠的体积          | (190) |
| 二、球冠和球冠的面积          | (191) |
| <b>附录 2 直观图</b>     | (192) |
| 一、斜二轴测直观图           | (194) |
| 1. 斜二轴测直观图的画法规定     | (194) |
| 2. 画法举例             | (195) |
| 二、正等轴测直观图           | (202) |
| 1. 正等轴测直观图的画法规定     | (203) |
| 2. 画法举例             | (204) |
| 三、组合体的直观图           | (208) |

## 第六章 有理数和集合

### 第一节 有理数的认识

在上册中，我们已经研究了非负的整数和分数，以及它们的运算。这些数(通常就叫做**算术数**)只能表示量的大小，不能同时表示量的方向，仅有这些数还不能满足生产和生活的实际需要，这就要求引进新的数，数集也就进一步扩展了。

数集的扩展必须遵循以下几条原则：

(1) 增添了新的元素，新旧元素一起构成了新的数集，新的数集解决了旧数集所不能解决的矛盾。

(2) 在新的数集里，规定了一些基本关系和运算，使原有的一些主要性质仍旧能适用。

(3) 旧元素作为新数集里的成员，原有的运算关系仍保持。

#### 一、具有相反意义的量

温度计上的零上10度和零下10度，虽然都是10度，但它们的意义却是相反的，我们把这样的两个量叫做**具有相反意义的量**。

客观世界中具有相反意义的量是大量存在的，例如，多余与不足，增加与减少，上升与下降，前进与后退，收入与支出，向东与向西等都是具有相反意义的量。

为了区别这些具有相反意义的量，我们把其中的一个量(通常是零上、增加、收入、前进、上升等)规定为正的，

而把另一个和它意义相反的量（通常是零下、减少、支出、后退、下降等）规定为负的。

正的量仍用算术数来表示，负的量就在算术数的前面添上符号“-”（读作负）来表示。例如，零上 $10^{\circ}\text{C}$ 记为 $10^{\circ}\text{C}$ ，零下 $10^{\circ}\text{C}$ 记为 $-10^{\circ}\text{C}$ 。

算术数的前面添上“-”号的数（零除外），叫做**负数**。

如 $-5$ ， $-1.5$ ， $-1\frac{2}{3}$ 等都是负数，为了与负数相区别，不

是零的算术数就叫做**正数**。例如 $5$ ， $1.5$ ， $1\frac{2}{3}$ 等都是正数。

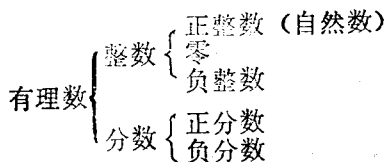
有时为了强调正数对于负数的相反意义，在正数的前面添上符号“+”（读作正）来表示，例如 $4$ 可以写成 $+4$ ，但在一般情况下，写正数时，都把“+”号省略。

正数和负数是从数量这个侧面来反映客观世界中具有相反意义的量，它不仅反映了数值的大小，而且也反映了数值的方向。

**零**是一个特殊的数，零既不是正数，也不是负数，是唯一的中性数。

我们把正整数（自然数）、零、负整数统称为**整数**，把正分数和负分数都叫做**分数**。这样，所有的整数和分数就组成了一个新的数集——**有理数集**。

有理数集里的所有的数可以按整数和分数的区别进行分类：



有理数集里的所有的数还可以按正数与负数的区别进行分类：

$$\text{有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数 (自然数)} \\ \text{正分数} \end{array} \right. \\ \text{零} \\ \text{负有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{负整数} \\ \text{负分数} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

自然数集合、分数集合都是有理数集合的子集。

负数的引进,对学生来说已是数的概念的第三次扩展(前二次是引进零和分数),这次扩展比前两次要困难得多,这是因为:

(1) 负数的应用与学生日常生活的联系,不象零和正分数那样密切。例如,向东走 3 公里,向西走 3 公里,如果以向东的方向作为正方向,而向西走 3 公里说成走了 - 3 公里,学生就会感到不习惯,再如,利用正负数把“收入”和“支出”统一地说成“收入”(例如支出 3 元,改说成收入 - 3 元),“上升”和“下降”统一地说成“上升”(例如下降 3 度,改说成上升 - 3 度)等等,与学生的已有常识不一致。

(2) 学生对于数的概念的扩展,还缺少体会,引进零和分数学生感到很自然,引进负数,情况就有些不同,那些必须用负数来解决的问题,他们认为用算术里的数同样可以解决,因此,容易产生为什么要引进这种新数的问题。

使学生体会引进负数的必要性,是有理数教学中的一个难点和重要关键,解决这个问题,我们可以首先从整理学生已经学过的算术数着手,例如:

a. 指出算术数的产生与发展都是人类的实践(如测量等)的需要。



b. 在自然数、零、分数之间可以进行加法、减法、乘法、除法等运算。

c. 由于解决实际问题（如研究一些数值方向、小数减大数等）的需要，还要学习一种新的数。

接着，我们可以转到负数的学习。举出一些具有相反意义的量的实际问题，研究怎样用数来表示，引进负数的概念。

在引进负数并给出有理数的定义以后，为了使学生对有理数这一概念所包括的整数、分数、正数、负数、零等概念之间的关系有明确的认识，要对有理数进行分类。通过分类，应着重使学生弄清楚：

正整数就是自然数；

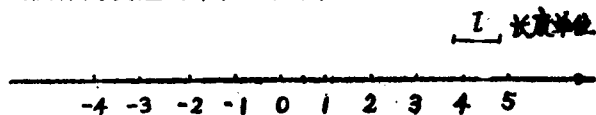
有理数不仅包括正数和负数，而且还包括数零，零既不是正数，也不是负数。

整数里不仅包括自然数和零（这是学生已有的知识），还包括负整数。

## 二、数轴

在日常生活中，用直尺上的刻度表示物体的长度，用温度计上的刻度表示温度的高低，这就启发我们，可以把有理数直观地用一条规定了正方向的直线上的点表示出来。

规定了正方向（用箭头表示）的直线叫做有向直线。在有向直线上取一点0作为起点，表示数零，叫做原点，再取一个线段作为度量的单位。如图



这样，规定了原点和长度单位的表示数的有向直线就叫

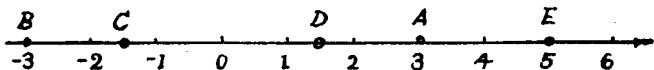
**做数轴。**原点、方向和长度单位是数轴的三个要素。

建立了数轴以后，所有的有理数都可以用数轴上的点来表示。

例如，把下列各数用数轴上的点表示出来：

3      -3      -1.5      1.5      5

解：先画出数轴，然后在数轴上找出相应的点



如图所示，A、B、C、D、E 各点分别表示 3、-3、-1.5、1.5 和 5。

注意：任何一个有理数都可以用给定数轴上的唯一的点表示出来，但是数轴上的任意一点却不都表示有理数，也就是说，有理数与数轴上的点不是一一对应的。

选择的例题、习题既要全面（正整数、正分数、零、负整数、负分数都要涉及到），同时又要学生容易画出，还可以指出，用数轴上的点表示有理数，通常只要求近似地表示出来。

### 三、相反数和绝对值

#### 1. 相反数

把 3 与 -3，-1.5 与 1.5 在数轴上表示出来，就得到 A、B、C、D 四点（如上图所示），A、B 两点与原点的距离相等，同样，C、D 两点与原点的距离也相等。

数轴上与原点距离相等的两点所表示的两个数，叫做互为相反的数。

3 与 -3 是互为相反的数，-1.5 与 1.5 也是互为相反的数。

相反数是对两个数的关系而言的，孤立地说“-3 是相

反数”是错误的,应指出 $-3$ 是 $+3$ 的相反数,或 $+3$ 是 $-3$ 的相反数。一般地,  $+a$ 的相反数是 $-a$ ,  $-a$ 的相反是 $+a$ 。

## 2. 绝对值

在数轴上表示一个数的点, 它到原点的距离叫做这个数的绝对值。

一个数的绝对值, 我们可在这个数的两旁各画一条竖线来表示, 如表示 $+3$ 和 $-3$ 的点到原点的距离都是3个单位。它们的绝对值都是3, 记作:

$$|+3| = 3 \quad |-3| = 3$$

同理,  $|+1.5| = 1.5 \quad |-1.5| = 1.5 \quad |0| = 0$

由此可知, 正数的绝对值是它本身; 负数的绝对值是它的相反数; 零的绝对值是零。

例如, 求下列各数的绝对值:

$$7 \quad -1\frac{2}{3} \quad 0.25 \quad -0.01$$

解:  $|7| = 7 \quad \left| -1\frac{2}{3} \right| = 1\frac{2}{3}$

$$|0.25| = 0.25 \quad |-0.01| = 0.01$$

一般地, 如果用 $a$ 代表任意有理数, 则

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{如果} a \text{ 是正数}) \\ 0 & (\text{如果} a \text{ 是零}) \\ -a & (\text{如果} a \text{ 是负数}) \end{cases}$$

记号 $|a|$ 就表示数 $a$ 的绝对值。

从数轴上可以看出, 越是右边的点, 它所表示的数越大, 由此可以得出有理数大小比较的法则:

**正数都大于零, 正数和零都大于负数;**

**正数中, 绝对值大的数大;**

负数中，绝对值大的数小。

例如，比较下列各组数的大小：

(1)  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{3}$       (2)  $-9$  和  $-1$       (3)  $4$  和  $-12$

(4)  $0$  和  $-100$       (5)  $-\frac{5}{6}$  和  $-\frac{3}{4}$       (6)  $8$  和  $0$

解：(1)  $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

(2)  $|-9| = 9$

$|-1| = 1$

$\therefore 9 > 1$

$\therefore -9 < -1$

(3)  $\therefore$  正数大于负数

$\therefore 4 > -12$

(4)  $\therefore$  零大于负数

$\therefore 0 > -100$

(5) 先求绝对值，再通分

$$\left| -\frac{5}{6} \right| = \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$\therefore \frac{10}{12} > \frac{9}{12} \quad \therefore -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4}$$

(6)  $\therefore$  正数大于零  $\therefore 8 > 0$

### 练 习 一

1. 用正数和负数表示下列具有相反意义的量：

(1) 货物进仓100吨，货物出仓80吨；

(2) 农业收入1500元，农业支出1200元；

(3) 向南行8公里，向北行10公里（以从南向北为正方向）；

(4) 最高温度零上10度, 最低温度零下2度;

(5) 面积增加5平方米, 面积减少8平方米;

(6) 比100斤少3斤, 比100斤多5斤。

2. 下列数集里有没有最小数和最大数?

(1) 自然数集 (2) 非负数集 (3) 有理数集

3. 写出大于-3而小于4的所有整数。

4. 写出下列各数的相反数:

$$-\frac{1}{2} \quad 0 \quad -2\frac{1}{10} \quad 0.1 \quad 1$$

5. 把下列各数及其相反数分别在数轴上表示出来:

$$0.5 \quad -1\frac{2}{3} \quad 3.1 \quad -5\frac{1}{4}$$

6. 什么数的相反数(1)是它本身? (2)比它自身大?

(3)比它自身小?

什么数的倒数(1)是它本身? (2)比它自身大?

(3)比它自身小?

7. (1) 已知  $|a| = |b|$ , 能否断定  $a = b$ ? 为什么?  
试举例说明。

(2) 已知  $|a| > |b|$ , 能否断定  $a > b$ ? 为什么?  
试举例说明。

(3) 已知  $|a| < |b|$ , 能否断定  $a < b$ ? 为什么?  
试举例说明。

8. 把下列各数按照从小到大的顺序用不等号连接起来:

$$-76 \quad 3.6 \quad 2\frac{1}{3} \quad -4.8 \quad -4\frac{5}{6} \quad 0 \quad 12 \quad -1 \quad \frac{1}{2}$$

9. 不用绝对值的符号表示下列各式:

(1)  $|x - 2|$

(2)  $|3 - 2x|$

## 第二节 有理数的运算

### 一、有理数的加法

#### 1. 有理数加法的法则

有理数的加法法则如下：

同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加；

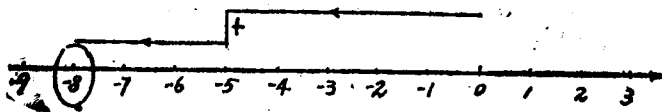
异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值；

互为相反数相加得零；

一个数和零相加，仍得这个数。

这个法则我们可以用从起点出发，经过两次运动（规定向东为正）所得的结果来加以说明。

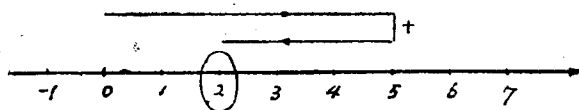
例如，向西 5 公里，再向西 3 公里。



即

$$\begin{array}{c} | - 5 | + | - 3 | \\ \downarrow \\ (- 5) + (- 3) = - 8 \\ \uparrow \\ \text{取原来的符号} \end{array}$$

又如，向东 5 公里，再向西 3 公里。



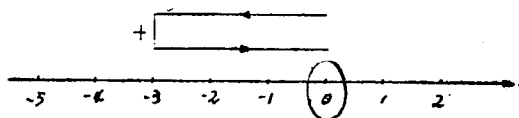
即

$$|+5| - |-3|$$

$$(+5) + (-3) = +2$$

取绝对值较大的数的符号

再如，向西 3 公里，再向东 3 公里。



即

$$(-3) + (+3) = 0$$

从有理数加法的法则可以知道，对于任意两个有理数，它们的和存在而且唯一；同时，有理数的加法满足加法交换律和结合律。但是，算术数具有的两数之和大于或等于加数的特点不再永远存在。

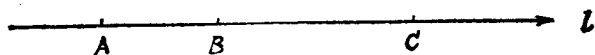
根据加法的交换律和结合律可以推出，三个以上有理数相加，可以任意交换加数的位置，也可先把其中几个数相加。

## 2. 有向线段求和

在有向直线上，线段也有方向，有方向的线段，叫做**有向线段**。有向线段可以用它的两个端点来表示。例如，A、B、C表示某有向直线L上的三个点，那末，由这三个点组成

的有向线段有六条，即

AB、BC、AC、BA、CB、CA



AB代表以A为起点，以B为终点的有向线段；以由A到B的方向作为有向线段AB的方向。

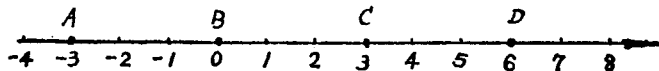
上图所示，有向线段AB、BC、AC的方向与有向直线L的正方向一致，叫做**正线段**；有向线段BA、CB、CA的方向与有向直线L的正方向相反，叫做**负线段**，起点与终点重合的有向线段叫做**零线段**。它的方向可以是任意的，所以它既不是正线段，也不是负线段。

有向线段既有方向也有长度。有向线段的起点与终点之间的距离就是有向线段的长度，也叫做**有向线段的绝对值**，有向线段AB的绝对值记作： $|AB|$ 。

这样，有理数就可以用有向线段来表示。

通常，我们规定绝对值相等，方向也相同的有向线段是**相等的有向线段**；而绝对值相等，方向相反的有向线段叫做**互为相反的有向线段**。这样，一个有理数可以用绝对值相等，方向也相同的有向线段来表示。

例如，我们可以用有向线段AB表示有理数3。也可以用有向线段BC或CD表示有理数3。

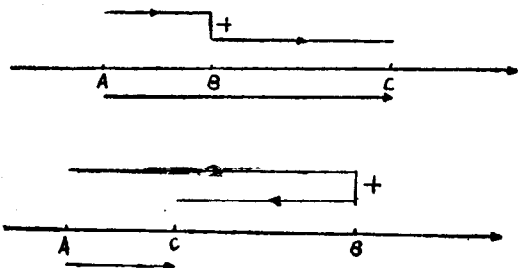


同样，我们可以用有向线段BA表示有理数-3，也可以用有向线段CB或DC表示有理数-3。



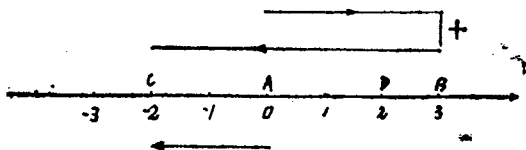
有理数加法运算的意义，可以用直线上两次运动为例加以说明，也可以用水库水位两次变化或温度两次变化为例加以说明。通过这些实例，我们可以看出，有理数加法的理论基础，就是直线上有向线段求和。

有向线段求和，是以各有向线段首尾相接的方式实现的。如图所示，有向线段AC就是有向线段AB与BC的和。



用有向线段表示有理数，我们就可以用有向线段求和来导出有理数加法的法则。

例如， $(+3) + (-5) = -2$



即  $AB + BC = AC$

有向线段AB表示有理数+3，有向线段BC表示有理数-5，AB和BC的和为AC，有向线段AC所表示的有理数-2就是有理数+3与-5的和。