经济预测与决策

下册

厦门大学计统系

下册目录

第六章 马尔可夫预测法

马尔可夫（A·A·Марков）是俄国数学家，以他的名字命名的数学方法称为马尔可夫方法。在国外，这种方法在自然科学和社会科学方面都有着广泛的应用。在国内，六十年代已开始用于水文、气象等的预测研究，七十年代用于地震方面的预测研究，在社会经济领域方面的应用是近几年才开始的。主要应用于研究市场、预测利润等．

§6-1 马尔可夫链的基本原理

一、马尔可夫链的基本概念

马尔可夫方法的研究对象是一个运行系统的"状态"和运行状态"。在一系列试验中，出现可列个两两互斥的事件 S_1，S_2，… S_N，而且一次试验只出现其中的一个 S_i（$i=1, 2$，… N），这就称为状态。从一种状态变化到另一种状态，称为状态转移。例如机器有故障（S_1）和无故障（S_2）两种状态，由无故障（S_2）转为故障（S_1）就是状态转移。此处的机器称为系统。再如居民生活调查中，居民某年的生活水平可处于富裕（S_1）、中等（S_2）、贫困（S_3）三种状态之一，由其中的一种变成另一种，就是状态转移，此处的"居民"也称为系统。

为了更好地研究马尔可夫过程，我们需要引进概率向量和

概率矩阵的概念。

概率向量：在一个行向量（或列向量）中，如果每一个元素为非负，且其和等于1，就称该向量为概率向量。例如 $A=(\frac{1}{4},\frac{1}{2},0,\frac{1}{4})$，A就是概率向量。

由概率向量构成的方阵称为概率矩阵。如

$$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

B就是概率矩阵。

概率矩阵具有以下两个性质：

（1）若A，B都是概率矩阵，则 $A\cdot B$ 也是概率矩阵。

（2）若A为概率矩阵，则 A^n 也是概率矩阵。

系统取各种状态的可能性大小称为状态概率，用 $\pi_i(K)$ 表示，K代表时间。例如K期机器无故障的概率用 $\pi_1(K)$ 表示，有故障的概率用 $\pi_2(K)$ 表示，则 $\pi_1(K)$ 和 $\pi_2(K)$ 分别是状态概率。若系统在任意时期K取状态 S_1，S_2，…，S_N 的概率分别为 $\pi_1(K)$，$\pi_2(K)$，…，$\pi_N(K)$；而 $\pi_i(K)\geq 0$，$\sum_{i=1}^{N}\pi_i(K)=1$，则向量 $\pi(K)=[\pi_1(K),\pi_2(K),\cdots\pi_N(K)]$ 称为K期的状态概率向量，例如机器A在开始时期（$K=0$）无故障的概率 $\pi_1(0)$ 为0.7，有故障的概率 $\pi_2(0)=0.3$，则 $\pi(0)=(0.7,0.3)$ 是一个状态概率向量。

随着时间的推移，事物的状态将不断地转移。马尔可夫过程就是指时间转移和状态转移的过程。马尔可夫链是马尔可夫

过程的一种特殊情况。马尔可夫过程所研究的时间是无限的、是连续变量，其状态也是无限多的。而马尔可夫链的时间参数取离散数值（如日、月、年），其状态是有限的，只有可列个状态。马尔可夫链表明事物的状态由过去转变到现在，由现在转变为将来。一环接一环，象一根链条，其特点是“无后效性”。无后效性也叫马尔可夫性，是指事物第 n 次试验结果出现的状态，只与第 $n-1$ 次状态有关，与它以前所处的状态无关。例如，设味精销售状况分为“畅销”和“滞销”两种，以“S_1”代表畅销，“S_2”代表滞销。以 X_n 表示时间 t_n 味精的销售状况，则 X_n 可取 S_1 或 S_2 的值。若未来的味精市场状态，只与现在的市场状态有关，与以前的市场状态无关，则味精市场状态 $\{X_n,\ n\geq 1\}$ 就构成一个马尔可夫链。

二、转移概率和转移概率矩阵

以记号 $P(X_{n+1}=S_j \mid X_n=S_i)=P_{ij},\quad i,j=1,2$

表示在时间 t_n 味精的市场销售为状态 S_i，在下一个时间 t_{n+1} 转变为状态 S_j 的可能性，称为从状态 S_i 经过一步转移到 S_j 的概率，即一步转移概率。P_{ij} 的具体含义如下：

P_{11} 表示味精 t_n 时在状态 S_1，t_{n+1} 时仍在状态 S_1，即连续畅销的可能性，例如 $P_{11}=\frac{1}{2}$。

P_{12} 表示味精 t_n 时在状态 S_1，t_{n+1} 时变成状态 S_2，即由畅销转为滞销的可能性，例如 $P_{12}=\frac{1}{2}$。

P_{21} 表示味精 t_n 时在状态 S_2，t_{n+1} 时仍在状态 S_2，即连续滞销的可能性，例如 $P_{22}=\frac{2}{5}$。

把这些一步转移概率 P_{ij} 依序排列起来，就构成一个矩阵，记为 P，则

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

称为一步转移概率矩阵。显然，矩阵P是一个概率矩阵，它的每一行是一个概率向量，具有下述性质：

(1) 每个元素均是非负的，即 $P_{ij} \geq 0$，$i,j=1,2$。

(2) 矩阵中每一行的各元素相加，其和等于1，即

$$P_{i1}+P_{i2}=\sum_{j=1}^{n} P_{ij}=1 \qquad i=1,2。$$

这说明在时间 t_{n+1} 时，味精的销售状态总在 S_1，S_2 中。

对于一般的情况，若 X_n 的可能值是 S_1，S_2，… S_N，有N种状态，则一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{pmatrix}$$

一步转移概率矩阵完全地描述了N个状态相互转移的概率分布。其对角线上的元素表示系统经过（$t_{n+1}-t_n$）时间之后，仍处在原状态的概率。

三、一步转移概率矩阵的求法

状态转移概率的理论分布是未知的，如何求得一步转移概率矩阵呢？概率论中已经证明：只要样本容量足够大，就可以用样本的分布情况近似地描述状态的理论分布，用状态相互转移的频率来近似地估计状态的转移概率。

假定系统有 S_1，S_2，…，S_N 个状态，在已知样本中状

态 S_i 出现的次数为 M_i，则 $\sum_{i=1}^{N} M_i = M$，M 为资料总个数。

若样本中状态由 S_i 转向 S_j 的个数为 M_{ij}，$F(x_{n+1}=S_j|x_i=S_i)$ 表示 t_n 时为状态 S_i、t_{n+1} 时转变为状态 S_j 的频率，则

$$F(x_{n+1}=S_j|x_n=S_i)=\frac{M_{ij}}{M_i}$$

而 $$P_{ij}=P(x_{n+1}=S_j|x_n=S_i)\approx\frac{M_{ij}}{M_i} \qquad (6\cdot1)$$

t_n 时处于状态 S_i 的系统，其转移概率分布为：

$$P_{i1}\approx\frac{M_{i1}}{M_i},\quad P_{i2}\approx\frac{M_{i2}}{M_i}\quad\cdots\quad P_{iN}\approx\frac{M_{iN}}{M_i}$$

它们构成了一步转移概率矩阵中的第 i 行。

应当注意的是，如若 S_i 是样本中系统所处的最后一个状态，此时无后继状态，所以系统由状态 S_i 转为状态 S_j 的概率应为

$$P_{ij}\approx F(x_{n+1}=S_j|x_n=S_i)=\frac{M_{ij}}{M_i-1} \qquad (6\cdot2)$$

例6·1 设味精的市场销售记录共有3年12个月的数据，如表6-1。试求味精销售状态转移概率矩阵。

表6·1 味精市场销售状态记录表

月份(t_n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售状态(x_n)	畅 S_1	畅 S_1	滞 S_2	畅 S_1	滞 S_2	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1	滞 S_2	滞 S_2	滞 S_2	滞 S_2

月份(t_n)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
销售状态 (X_n)	畅 S_1	畅 S_1	滞 S_2	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1	滞 S_2	滞 S_2	滞 S_2	滞 S_2

月份(t_n)	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
销售状态 (X_n)	滞 S_2	滞 S_2	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1	滞 S_2	滞 S_2	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1	畅 S_1

解：表中共有三年的数据，其中有 21 个月畅销，15 个月滞销，即 $M_1=21$，$M_2=15$。现分别统计出连续畅销次数 $M_{11}=14$，由畅销转入滞销的次数 $M_{12}=6$，由滞销转入畅销的次数 $M_{21}=6$，连续滞销的次数 $M_{22}=9$。

由（6·2）式得 $$P_{11}=\frac{M_{11}}{M_1-1}=\frac{14}{21-1}=0.7$$

$$P_{12}=\frac{M_{12}}{M_1-1}=\frac{6}{21-1}=0.3$$

由（6·1）式得 $$P_{21}=\frac{M_{21}}{M_2}=\frac{6}{15}=0.4$$

$$P_{22}=\frac{M_{22}}{M_2}=\frac{9}{15}=0.6$$

综合上述，得到销售状态转移概率矩阵为

$$p=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

事物的发展是随着时间的推移而不断地从一种状态转为另一种状态，为了满足预测工作的要求，只研究一步转移概率矩阵是不够的，还必须研究K步转移概率矩阵。

时间 t_n 上处于状态 S_i 的事物，经过K步转移以后达到状态 S_j 的概率，称为K步转移概率，记为

$$p(x_{n+K}=S_j \mid x_n=S_i)=p_{ij}(K) \qquad i,j=1,2,\cdots N。$$

以 $p_{ij}(K)$ 为元素的矩阵

$$P(K)=\begin{pmatrix} p_{11}(K), & p_{12}(K) & \cdots\cdots & p_{1N}(K) \\ p_{21}(K), & p_{22}(K) & \cdots\cdots & p_{2N}(K) \\ \vdots & & & \\ p_{N1}(K), & p_{N2}(K) & \cdots\cdots & p_{NN}(K) \end{pmatrix}$$

$$i,j=1,2,\cdots N。$$

称为K步转移概率矩阵。

数学上已经证明，如果一步转移概率矩阵不变，则K步转移概率矩阵具有以下两个重要性质：

(1) $P(K)=P^K$；

(2) $P(K)=P(K-1)\cdot P$。

依性质(1)，K步转移概率矩阵等于一步转移概率矩阵的K次方。

依性质(2)，K步转移概率矩阵可以逐步递推得到：

例如 $P(1)=P=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

则 $P(2)=P^2=P(1)\cdot P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0.7\times0.7+0.3\times0.4 & 0.7\times0.3+0.3\times0.6\\0.4\times0.7+0.6\times0.4 & 0.4\times0.3+0.6\times0.6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.61 & 0.39\\0.52 & 0.48\end{pmatrix}$$

$P(3)=P^3=P^2\cdot P=P(2)\cdot P$

$$=\begin{pmatrix}0.61 & 0.39\\0.52 & 0.48\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.583 & 0.417\\0.556 & 0.444\end{pmatrix}$$

§6·2 马尔可夫预测模型和马尔可夫过程的稳定状态

一、马尔可夫预测模型

马尔可夫预测模型是根据全概率公式建立起来的。从概率论中已经知道全概率公式是：设有一系列事件 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 组成事件完备群，另有一事件 B，它仅当 A_i 中的任一事件发生时才可能发生，那么事件 B 发生的概率

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}(A_i)P(B|A_i)$$

我们结合一个具体的例子来介绍马尔可夫预测模型。

例 6－2　工厂中的机器在生产过程中，总是处于"有故障"或"无故障"两种状态。设机器A，若从"无故障"状态

一天后仍为“无故障”的概率为0.6，一天后“有故障”的概率为0.4；若从“有故障”开始，一天后“无故障”的概率为0.5，一天后“有故障”的概率为0.5。设“无故障”为状态S_1，“有故障”为状态S_2。令机器A开始在状态S_1，试求二天后处在状态S_1和状态S_2的概率。

解：1）先将已知的概率列表如下：

表6-2　机器A的概率表

从＼至	无故障（状态S_1）	有故障（状态S_2）
无故障（状态S_1）	0.6	0.4
有故障（状态S_2）	0.5	0.5

这就是一步转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$

2）先求一天后机器所处于状态S_1和状态S_2的概率

以$K=0$表示0期，即开始时。因开始时机器处于状态S_1，所以0期机器A运行的状态概率向量$\pi(0)=(\pi_1(0),\ \pi_2(0))=(1,0)$。

根据全概率公式，一天后机器处于状态S_1的概率

$$\pi_1(1)=\pi_1(0)\cdot p(X_1=S_1\mid X_0=S_1)+\pi_2(0)\cdot p(X_1=S_1\mid X_0=S_2)$$
$$=1\times0.6+0\times0.5=0.6$$

一天后机器A也可能处于状态S_2，其概率

$$\pi_2(1)=\pi_1(0)\cdot P(X_1=S_2\mid X_0=S_1)+\pi_2(0)\cdot P(X_1=S_2\mid X_0=S_2)$$

$$= 1\times 0.4 + 0\times 0.5 = 0.4$$

所以一天后机四A运行的状态概率向量

$$\pi(1) = (\pi_1(1),\ \pi_2(1)) = (1, 0)\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$= (0.6,\ 0.4)$$

$$= \pi(0)\cdot P$$

它表示机四A从无故障开始，一天后机四处于状态 S_1 和状态 S_2 的概率分别为 0.6 和 0.4.

3) 求二天后机四A处于状态 S_1 和 S_2 的概率

两天后机四A处于状态 S_1 的概率

$$\pi_1(2) = \pi_1(1)\cdot P(X_2=S_1 \mid X_1=S_1) + \pi_2(1)\cdot P(X_2=S_1 \mid X_1=S_2)$$

$$= 0.6\times 0.6 + 0.4\times 0.5 = 0.56$$

两天后机四A处于状态 S_2 的概率

$$\pi_2(2) = \pi_1(1)\cdot P(X_2=S_2 \mid X_1=S_1) + \pi_2(1)\cdot P(X_2=S_2 \mid X_1=S_2)$$

$$= 0.6\times 0.4 + 0.4\times 0.5 = 0.44$$

所以两天后，机四A运行的状态概率向量

$$\pi_2(2) = (\pi_1(2),\ \pi_2(2)) = (0.6,\ 0.4)\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$= (0.56,\ 0.44) = \pi(1)\cdot P$$

它表示机四A从无故障开始，二天后仍为无故障的概率为 0.56，转为有故障的概率为 0.44。

综合上述，当系统在 $K=0$ 的初始状态概率 $\pi_i(0)$ 为已知时，且有 $\sum_{i=1}^{N}\pi_i(0)=1$，经过K次转移后，系统取状态 S_i 的概率为 $\pi_i(K)$，且有 $\sum_{i=1}^{N}\pi_i(K)=1$．N 为系统中互斥的状态

[redacted]，则马尔可夫预测模型

$$\pi(K+1)=\left[\pi_1(K+1),\ \pi_2(K+1),\ \cdots,\ \pi_N(K+1)\right]$$

$$=\pi(K)\cdot P \qquad K=0,1,2,\cdots \qquad (6\cdot3)$$

其中P为一步转移概率矩阵。

根据递推关系式：

$$\pi(1)=\pi(0)\cdot P$$

$$\pi(2)=\pi(1)\cdot P=\pi(0)P^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此 $\pi(K+1)=\pi(0)\cdot P^{K+1}$ $\qquad (6\cdot4)$

其中，一步转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots\cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots\cdots & P_{2N} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots\cdots & P_{NN} \end{pmatrix}$$

所以，

$$\pi(K+1)=\pi(0)\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots\cdots & P_{1N} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots\cdots & P_{2N} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots\cdots & P_{NN} \end{pmatrix}^{K+1}$$

二、马尔可夫过程的稳定状态

（1）什么是马尔可夫过程的稳定状态

例6·3　根据调查资料整理，得知某企业的产品本月处于

畅销（S_1）时，下个月仍为畅销的概率为 0.7，转为滞销的概率为 0.3；本月处于滞销时，下个月转为畅销的概率是 0.4，仍为滞销的概率为 0.6。现在要求分别两种情况：

（i）该企业的产品现在（0期）的销售处于畅销（S_1）状态

（ii）该企业的产品现在（0期）的销售处于滞销（S_2）状态

试用马尔可夫预测模型计标今后半年各个月该企业产品的销售状态概率。

解：根据上述资料，得到销售状态转移概率矩阵：

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

（i）　已知该企业的产品，现在（$K=0$）处于畅销状态，则畅销的概率 $\pi(0)=1$，滞销的概率 $\pi_2(0)=0$。0期状态概率向量 $T(0)=[\pi_1(0), \pi_2(0)]=(1,0)$

由（6·3）式

$$\pi(1)=\pi(0)\cdot P=(1,0)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}=(0.7 \quad 0.3)$$

$$\pi(2)=\pi(1)\cdot P=(0.7.0.3)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}=(0.61 \quad 0.39)$$

$$\pi(3)=\pi(2)\cdot P=(0.61 \quad 0.39)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}=(0.583 \quad 0.417)$$

$$\pi(4)=\pi(3)\cdot P=(0.583 \ 0.417)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}=(0.5749 \quad 0.4251)$$

$$\pi(5)=\pi(4)\cdot P=(0.5749 \quad 0.4251)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$=(0.57247 \qquad 0.42753)$$

$$\pi(6)=\pi(5)\cdot P=(0.57247\quad 0.42753)\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$=(0.571741\quad 0.428259)$$

- - - - - - - - - - - -

将计标结果列入下表：

表6·3　工厂开始时处于状态 S_1 的逐月销售状态概率

K(月)	0	1	2	3	4	5	6	…
$\pi_1(K)$	1	0.7	0.61	0.583	0.5749	0.57247	0.571741	…
$\pi_2(K)$	0	0.3	0.39	0.417	0.4251	0.42753	0.428259	…

从上表可以看出，随着K的增大，$\pi_1(K)$趋近0.571，$\pi_2(K)$趋近0.429。

(ii) 如果该厂开始时（$K=0$时）的商品处于滞销（S_2）状态，则：

$$\pi_1(0)=0 \qquad \pi_2(0)=1$$

$$\pi(0)=[\pi_1(0)\quad \pi_2(1)]=(0\quad 1)$$

同样可计标出该厂逐个月的销售状态概率如下：

$$\pi(0)=(0\quad 1)$$

$$\pi(1)=\pi(0)P=(0\quad 1)\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}=(0.4\quad 0.6)$$

$$\pi(2)=\pi(1)P=(0.4\quad 0.6)\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}=(0.52\quad 0.48)$$

$$\pi(3)=\pi(2)P=(0.52\quad 0.48)\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.4 & 0.6\end{pmatrix}=(0.556\quad 0.444)$$

$$\pi(4)=\pi(3)P=(0.556\quad 0.444)\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$=(0.5668\quad 0.4332)$$

$$\pi(5)=\pi(4)P=(0.5668\quad 0.4332)\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$=(0.57004\quad 0.42996)$$

$$\pi(6)=\pi(5)P=(0.57004\quad 0.42996)\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$$

$$=(0.571012\quad 0.428988)$$

将计标结果列入下表。

表6·4 工厂开始时处于状态S_2的逐个月销售状态概率

K(月)	0	1	2	3	4	5	6
$\pi_1(K)$	0	0.4	0.52	0.556	0.5668	0.57004	0.571012
$\pi_2(K)$	1	0.6	0.48	0.444	0.4332	0.42996	0.428988

从上表可以看出，随着K的增大，$\pi_1(K)$趋近于0.571，$\pi_2(K)$趋近于0.429。

根据上述例子，可以粗略地说，该厂经过多个月经营以后，它处于状态S_1的概率，即产品畅销的概率为0.571，处于状态S_2的概率，即产品滞销的概率为0.429。不管该企业的产品现在是处于畅销或滞销，经过多期转移后的情况大致相同。说明当K很大时，状态概率趋向于一个和初始状态概率无关的值，并稳定下来，以后不再随时间的变化而变化。