宿 1 3 7 2 宿

韓譯

范氏高等代數學

上卷

韓桂叢 譯述

傅種孫
程廷熙 校訂

算學叢刻社
附中

韓譯

范氏高等代數學

再版

譯述者　韓桂叢

校訂者　傅種孫　程廷熙

北平厰甸師大附中

算學叢刻社印行

序

范氏高等代數學(Fine—A College Algebra)一書,近十數年,風行海內,中學敎以斯,大學試以斯,蓋其理論謹嚴,材料豐富,誠中學敎科之一善本也. 顧中學算學,授以西文,事倍而功半,矧敎部明令必用中文課本乎,於是譯述尙已.

嚴幾道先生謂: 譯書須信,達,雅. 竊怪坊間譯本,有於其內容任意改削,而猶剽范氏之名者,「信」已不足示於人,「達,雅」云乎哉? 滿廬學長設講席於師大附中,授范氏原著十餘過,大之全部線索,小之一字精微,無不融貫焉,推敲焉,以明其究竟. 課暇迻譯,易稿再三;復由仲嘉學長,悉心校訂;余間亦妄參末議:總期於「信」之中以求「達」,不敢於「信」之外而言「雅」,此堪爲讀者告也. 付梓伊始,聊綴數言以爲序.

民國二十四年八月程廷熙

本書簡稱「辰」字
電報號碼 6591

目　錄

第一編——數

V. 虛數及複素數

第二編——代數

面數

I. 研究初步

II. 基本演算

高等代數學

第一編—數

I. 自然數—數法 加法及乘法

事物之羣及其基數

1. 事物之羣. 世間事物,萬有紛孳,非皆塊然孤存,孑然獨立已也,要亦有類從而羣居者.

如手指,羊羣,多邊形之頂點,皆事物之羣 (groups of things) 也.

夫一事一物,必有其所以異於他事他物者固矣. 即一組事物亦有其所以別於其他事物者存焉. 當吾人思及此等事物之有以別於其他事物也,常認彼等組成一羣 (group).

凡組成一羣之事物,為便利計,稱之為此羣之原素 (elements).

2. 相等羣 一一對應. ABC 及 DEF 二文字羣有一種關係,即若將此羣之諸原素與他羣之諸原素,一一配合,則可將二羣所有之原素配合成對. 例如 A 與 D 配, B 與 E 配, C 與 F 配是也.

凡二羣之原素可如此配合者,則此二羣稱為相等 (equivalent);其配合原素之法則,即所以生該一

對一之關係，或一一對應(one-to-one correspondence)之關係者也.

3. 定理 若二羣均與同一第三羣相等，則彼此相等.

因由題設，二羣各與第三羣有一一對應之關係．若將二羣中與第三羣同一原素相配之二原素，各配合成對，則此二羣亦生一一對應之關係矣.

4. 基數. 凡相等之羣，可合爲一類(class)．則一切之羣，遂皆分隸於各類矣．二羣是否同隸一類，即視其間有無一一對應之關係以定之.

例如 $ABCD$ 與 $EFGH$ 隸於同類，$ABCD$ 與 EFG 則隸於異類.

凡同類諸羣所共有而異類任何羣所必無之性質，即此類之羣所以別他類之羣者，是爲羣中事物之數(number of things)，或曰基數(cardinal number)．換言之，

一羣中事物之數或其基數，即該羣自身及與之有一一對應關係之一切羣所共有之性質也.

此猶謂"羣之基數云者即羣中事物任意重行排列或一一替以其他事物時，所常存不變之性質也"又可述爲"羣之基數云者，該羣與其中事物之種類及排列無關之性質也".

因將其中事物重行排列，或一一替以其他事物，僅將此羣變爲另一相等之羣，§2．且當經此種變替

時,其常存不變之性質必與事物之種類及其排列無關也.

5. **部份.** 若甲羣之原素爲乙羣之若干原素而非其全部時,則甲羣爲乙羣之一部份 (part).

例如 ABC 羣爲 $ABCD$ 羣之一部份.

由此定義立得

6. 甲乙丙三羣若甲爲乙之一部份,乙爲丙之一部份,則甲爲丙之一部份.

7. **有窮羣及無窮羣.** 一羣當其不能與其任何部份相等時,稱爲有窮羣 (finite group),當等於其某部份時,稱爲無窮羣 (infinite group) (註)

例如 ABC 爲有窮羣;因其不能與 BC 或其他任何部份生一一對應之關係也.

然任何有首無尾之一串記號,如 1, 2, 3, 4,⋯, 則係無窮羣.

何以知其然?因此羣與其一部份可生一一對應之關係也. 例如此全羣 1, 2, 3, 4,⋯ 與自 2 以後之部份可配成一對一之關係,即

1, 2, 3, 4, 5,⋯　(a)

與　2, 3, 4, 5, 6,⋯⋯　(b)

(註) 無窮羣中之原素,自然不能一一遍舉,然若能述一種法則,可使說明各事物孰屬此羣孰不屬此羣,亦足認爲此羣有定義也.

之間 將 (a) 中 1 與 (b) 中之 2 配，(a) 中之 2 與 (b) 之 3 配．依此類推，——即 (a) 中任選一數均可在 (b) 中得一數與之相對應也．

於是 (a) 羣與其部份 (b) 相等．故 (a) 爲無窮羣．

8　基數之大小．設 M 及 N 表任意二有窮羣．則其情形必爲

1. M 與 N 相等，

或　2. M 與 N 之一部份相等，

或　3. N 與 M 之一部份相等．

第一情形謂之 M 與 N 有同一基數，§4，或相等 (equal) 基數；第二情形謂之 M 之基數小於 (less than) N 之基數；第三情形謂之 M 之基數大於 (greater than) N 之基數．

如以 M 表文字羣 abc 而 N 表 $defg$，則 M 與 N 之一部份，如 def，相等．

於是 M 之基數小於 N 之基數，而 N 之基數大於 M 之基數．

9．註　由有窮羣之定義，§7，可知上述"等""大"及"小"之定義，確切分明，不至相混．

換言之大者不能爲等，等者不能爲小……．蓋若 M 與 N 相等且與 N 之一部份相等，則 N 與其一部份相等，§3，於是 N 爲無窮羣矣，§7．

10　系．甲乙丙三基數，若甲小於乙，乙小於丙，則甲亦小於丙．

因若M; N, P各表某事物之羣, 而上述甲乙丙爲其基數, M與N之一部份相等, 且N與P之一部份相等; 則M與P之一部份相等, §§3,6.

11. 基數系. 自含一單獨原素之羣起始, 逐次遞"加"一新事物, 則得下列之基數表:

1. 祇含一單獨原素之羣如|之基數.
2. 加一原素於第一種羣所得之羣如||之基數.
3. 加一原素於第二種羣所得之羣如|||之基數.
4. 依此類推, 以至無窮.

如此依次所得諸基數名之爲"一" "二" "三"...., 並以1, 2, 3,... 記號表之.

12. 對此基數系之探討. 任何有窮羣之基數均名之爲有窮基數 (finite cardinal), 茲就上述之基數表, 作下列之探討.

第一. 凡此表中之基數均爲有窮.

羣|爲有限, 因其無一部份與之相等也, §7; 且因由加一事物於有窮羣所得之羣亦自爲有窮, (註) 而其後各羣亦爲有窮. 即如因|爲有窮, ||亦有窮, 因||有窮, |||亦有窮; 依此類推.

(註) 茲證之如下 (見 G. Cantor, Math. Ann. 第46卷, 第490面):

若M表一有限羣, e表一單獨事物, 則加e於M所得之Me羣亦爲有限.

蓋設G≡H表示G與H爲相等之羣.

若Me非有窮, 則必與其某一部份相等, §7. (下面底註續)

第二. 凡有窮基數均含於此表之中.

蓋由定義，凡有窮基數均為有窮羣如 M 之基數. 但若令每一記號|各與 M 中一物相當，則可得一有窮羣|||……|與此有窮羣相等. 且此記號羣必有一最末記號，故必含於§11所述之表中. 否則此羣與 M 將同為無窮也，§7.

第三. 表中基數無相等者.

此由§8之定義可以知之. 因上證所有|，||，|||，…各羣均為有窮；且其中每一羣均係其後各羣之一部份，故不得相等.

(續上面底註)

設P表此部份，則 $Me \equiv P$.

(1) 假設P中不含有e.

設f表P中與Me中之e相配合之原素，且以 P_1 表P中之其他原素

因 $Me \equiv P_1f$，且 $e \equiv f$，則 $M \equiv P_1$.

此殊不合理，蓋因M為有窮而 P_1 為M之一部份也，§7.

(2) 假設P中含有e.

P中之e不能與Me中之e相配合，因果如此則P之其餘原素，乃M之一部份，將必與M相等矣.

設P中之e與Me中其他原素如g相配合，而Me中之e與P中之f相配合，Me中之其他原素 M_1 與P中之其他原素 P_1 配合. 則由 $Me \equiv P$，可知 $M_1ge \equiv P_1ef$. 故 $M_1ge \equiv P_1fe$. 故 $M_1g \equiv P_1f$，即 $M \equiv P_1f$，但 P_1f 為P之一部份，P為M之一部份，故 P_1f 為M之一部份，不得與M相等(因M為有窮).

自然數序列 等式及不等式

13. 自然數. 記號 1, 2, 3,⋯——或其名"一", "二","三",⋯——稱爲正整數或自然數 (natural numbers). 故

一自然數乃表一基數之記號或符號也.

14. 自然數序列. 按§11所述基數之順序, 將此等自然數排成一種順序,則得無窮序列

1, 2, 3, 4, 5,⋯⋯,

或"一", "二", "三", "四", "五",⋯,稱之爲自然數序列 (natural scale).

15. 自然數序列中每段(從首數至某數)之末數卽該段中記號之個數.

例如 1, 2, 3, 4 中有記號4個. 因 1, 2, 3, 4 之記號數與|, ||, |||, ||||之羣數相同,且此羣數復與最末羣||||中之符號數相同. 推之一般情形亦同此.

16. 自然數序列之順序性質. 自然數序列就其本身論之,僅爲一不同記號之羣集 (assemblage), 其中第一記號爲1; 次於1者爲2; 次於2者爲3; 依此類推,無有限止.

換言之,自然數序列僅爲一不同記號之集羣,

依一固定已知順序蟬聯排列,且有首而無尾者也.

由此點觀之,自然數亦自不過有順序之符號而已,其順序即當默念自然數序列時,其發現前後——按時間言——之順序也.

17. 自然數序列以及凡其原素依一固定已知順序排列之一切集羣,顯然同有下列諸性質:

1. 其中任二原素,可稱其一"在前"而其他"在後",且此"在前"及"在後"二語,用之於任何一對原素時,同一意義.

2. 若已知任何二原素,則永可決定何者在前何者在後.

3. 若 a, b, c 表任意三原素,且 a 在 b 前,b 在 c 前,則 a 在 c 前.

凡羣之本自具有上述諸性質,或可由吾人擇定一種排列法則以令其具有上述諸性質者,均稱爲一順序系 (ordinal system).

第一種之例,如 (1) 自然數序列本身;(2) 按時間先後相次之事件;(3) 在一水平直線上自左向右排列之諸點皆是.

第二種之例,如一羣人以姓名筆畫多少爲序者是也.

18. 一羣亦可有"相合" (coincident) 原素. 例如

按時間先後相次之諸事件中,其同時發生之事件即相合者也.

凡一羣中之"不相合"(non-coincident)諸原素適合上列1, 2, 3三關係時,而相合原素適合下列諸條件者為順序系.

4. 若a與b相合,且b與c相合,則a與c相合.

5. 若a與b相合,且b在c前,則a在c前.

19. 基數中之大小關係,乃由自然數序列中之先後關係而定者也.

因任二已知基數中之較大者,其在自然數序列中發現必較後也.

而"若三基數第一小於第二,第二小於第三,則第一小於第三"之關係,在自然數序列中則以"若a在b前,且b在c前,則a在c前"之關係表示之.

其實,比較基數之大小,除此法外,鮮有用其他任何方法者. 有二羣於此,吾人決不直接用§8所述之法以比較二羣之基數. 而先各以適宜之自然數表二羣之基數,再由此二自然數在序列中之順序關係以推定其孰大孰小.

因吾人當聞任何二自然數時,立卽知其何者在前何者在後,自然數序列在吾人心中之印象既如是之深,故比較其大小極不費力. 例如一聞人云,甲市居民120000人,乙市居民125000人,因在序列中熟知125000後於120000,立可斷定乙市人口多於甲市.

20. 數之等式及不等式. 此後之"數"字乃指自然數而言，§13；而 a, b, c 各字母乃表任意自然數者.

21. 若 a, b 表同一數或在自然數序列"相合"時，則用下列等式 (equation) 表示之:

$a=b$, 讀為"a 等於 b".

22. 但若序列中 a 在前，b 在後，則用下列二不等式 (inequality) 之一表示之:

$a<b$, 讀為"a 小於 b";

$b>a$, 讀為"b 大於 a".

23. 嚴格言之，"等""小""大"云者指 a, b 所表之基數而言，無與於 a, b 記號之本身也、例如"a 小於 b"一語僅為"a 所表之基數小於 b 所表之基數"之簡語耳.

就 a, b 二記號之本身言，則不等式 $a<b$ 所表者，僅謂在自然數序列中 a 在 b 前也.

24. 等式及不等式之規則. 由§§17, 18及上述諸定義，§§21, 22，立得

1. 若 $a=b$ 且 $b=c$ 則 $a=c$.
2. 若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$.
3. 若 $a=b$ 且 $b<c$，則 $a<c$.