初等代数习题解答

芜湖师専编印

1985.1.

初等代数习题解答

习题一

1、举例说明什么是基数？什么是序数？两者各反映事物数量的何种特征？

答：基数就是元素一样多的一类等价集合的共同标志。例如人体上眼睛的集合，耳朵的集合，手的集合和脚的集合是等价类集合，它们的共同特征——基数是"2"。序数是指排好顺序的自然数，例如数1，2，3，…，就得到由小到大的自然数列。皮亚诺于1889年提出自然数的公理，建立了自然数的序数理论。基数和序数从不同侧面反映事物数量的特征；基数回答的是"多少个"，序数回答的是"第几个"。

2、利用最小数原理证明数学归纳法原理（见§1、2、4）

证 用反证法，假设命题 $p(n)$ 不是对一切自然数都成立，用S表示使命题 $p(n)$ 不成立的自然数所成的集合，则 $S\neq\phi$。根据最小数原理，S中必有最小数 α。如果 $\alpha=1$，则与题设"1° $p(1)$ 成立"相矛盾。如果 $\alpha\neq1$，则 $\alpha-1$ 是一个自然数，由于 α 是S中最小数，所以 $\alpha-1\notin S$，也就是说，命题 $p(\alpha-1)$ 成立。但 $\alpha\in S$，所以 $p(\alpha)$ 不成立。这与题设2°"假定 $p(k)$ 成立则 $p(k+1)$ 也成立"矛盾。因此，命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 成立。

3、试以由标本数集扩充到有理数集为例说明数集扩展原则：

答：①向原有的数集（标本数集）里增添新的数（负有理数），新数与原有的数合在一起组成新的数集（有理数集）。

② 在有理数集里定义：有理数相等与不等，和四则运算。并使基本顺序律和运算律仍能保持。

③ 在有理数集里原来的算术数之间的运算关系仍旧不变。

④ 由算术数集扩充到有理数集，解决了减法运算不总能实施的矛盾，使方程 $x+a=b$ 永远有解。

4、试在有理数加法 $a+(-a)=0$ 这一规定的基础上，根据数集扩展原则探讨有理数乘法应如何定义。

答：由 $a+(-a)=0$ 有 $[a+(-a)]b=0$，假定分配律成立，则有 $ab+(-a)b=0$． 即 $(-a)b$ 是 ab 的相反数，而 ab 的相反数是 $-ab$，所以 $(-a)b=-ab$．

其次，在上式中以 $-b$ 代 b，得 $(-a)(-b)=-[a(-b)]$。但 $a(-b)=-ab$ 而 $-ab$ 的相反数为 ab，所以 $(-a)(-b)=ab$．

由以上探索知由非负有理数集扩张到有理数集，根据数集扩张原则乘法运算应定义如下：$(+a)(+b)=+ab$，$(-a)b=a(-b)=-ab$，$(-a)(-b)=+ab$．

5、证明：1° 若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 则 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$

2° 若 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 则 $\dfrac{a_1}{b_1}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$

证 1° $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1$，$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$，类似有 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$，比较两式，即得 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{a+d}{c-d}$．

2° 设 $\dfrac{a_1}{b_1}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=r$，则 $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}=\dfrac{(b_1+\cdots+b_n)r}{b_1+\cdots+b_n}$ $=r=\dfrac{a_1}{b}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$．

6、证明：1° 设 p，q，t 都是自然数，则 $\frac{p+t}{q+t}\begin{cases} > p/q & (若\ p<q) \\ < p/q & (若\ p>q) \end{cases}$

2° 设有 n 个正分数 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\cdots<\frac{a_n}{b_n}$，则分数

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 夹在这 n 个分数中的最大者与最小者之间。

证：1° 比较法，$\frac{p+t}{q+t}-\frac{p}{q}=\frac{t(q-p)}{q(q+t)}\begin{cases} >0 & (若\ p<q) \\ <0 & (若\ p>q) \end{cases}$

2° 不妨设 $\frac{a_1}{a_1}=S$ 最小，$\frac{a_n}{b_n}=t$ 最大，则 $a_1=b_1S$，

$a_2\geqslant b_2S$，$a_n\geqslant b_nS$，…，$a_{n-1}\geqslant b_{n-1}S$，$a_n=b_nt$，因此 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n>(b_1+b_2+\cdots+b_n)S$，即

$\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}>S$，类似地可证 $\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}<t$。

7、证明：$\lg 5$，$\sqrt{3}$ 都是无理数。

证：$\lg 5$，$\sqrt{3}$ 都是无限小数，即实数，但都不是有理数。如若不然，设 $\lg 5=\frac{p}{q}$（p，q 互素），则 $10^{\frac{p}{q}}=5$，$10^p=5^q$，显然这是不可能的。同样，设 $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$（p，q 互素），则

$$=\frac{p^2}{q^2}，p^2=3q^2，$$

$\therefore$ $3|p$，设 $p=3t$，则 $9t^2=3q^2$，$3t^2=q^2$，$\therefore$ $3|q$，于是 p，q 都是 3 的倍数，与条件 p、q 互素矛盾。

8、回答下列问题：

1° 两个无理数的商能不能是奇数？举例说明。

2° 任意正负奇数能否表示成两个无理数的积？举例说明。

答：1°：能。例如 $\dfrac{-b+\sqrt{c}}{-\sqrt{c}+b}=-1$

2° 能。例如 $a=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\sqrt{ab}$ （a，b是正奇数）

$a=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\sqrt{ab}$ （a.b是负奇数）

9、证明 1° 所有形如 $a+b\sqrt{2}$ （a、b 是有理数）的数组成的集构成一个数域。

2° 所有形如 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ （a，b，c 都是有理数）的数组成的集不能构成一数域。

3° 无理数集不能构成一个数域。

证：1° 需要证明~~二个~~形如 $a+b\sqrt{2}$ 的两数的和、差、积及商仍是该形状的数。事实上，

$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}$；

$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+b_1b_2\cdot 2)+(a_2b_1+a_1b_2)\sqrt{2}$；

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}=\frac{a_1a_2-b_1b_2\cdot 2}{a_2^2-b_2^2\cdot 2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2-b_2^2\cdot 2}\sqrt{2}.$$

所以形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数集构成一数域，这个数域包含有理数域而被包含在实数域中，因此称为有理数域与实数域的中间数域。其实，一切可能的 $a+b\sqrt{K}$ 形状（a、b 是任意有理数，$K>0$ 是给定的不是某一有理数平方的有理数）的数构成一个域。

2° 形如 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$ 的数不能构成一数域，因为两数之积会出现形如 $a_1+b_1\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ 的数，乘法不是封闭的。

3° 因为无理数的四则运算不封闭，所以单独无理数集不能构成域。

10、证明：设 a，b，c，d 是有理数，且 b，d 不是

完全平方数，$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，则 $a=c$，$b=d$。

证：假若 $a\neq c$，由 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，有 $\sqrt{b}=(c-a)+\sqrt{d}$，等式两边平方后整理得 $\sqrt{d}=\dfrac{b-d-(c-a)^2}{2(c-c)}$。因 a，b，c，d 都是有理数，故右边是有理数，而左边 $\sqrt{d}$ 是无理数，显然矛盾。因此，$a=c$，从而又有 $b=d$

11、设 a，b，c，d 是有理数，x 是无理数，求证 $S=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 是有理数的充要条件是 $bc=ad$。

证：必要性 由 $ax+b=(cx+d)s=csx+ds$，得 $(a-cs)x=ds-b$。因为 a，b，c，d 是有理数，x 是无理数，如果 S 是有理数，则有 $a-cs=0$，$ds-b=0$，

$$\therefore\ s=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\quad 即\ ad=bc.$$

充分性：由 $ad=bc$ 有 $s=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{acx+bc}{c(cx+d)}$

$$=\frac{acx+ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}\ 为有理数。$$

12、求方程 $\dfrac{6x-iy}{5+2i}=\dfrac{15}{8x+3iy}$ 的实数解

解 化简得 $48x^2+3y^2+10iy=75+30i$，解方程组

$$\begin{cases}48x^2+3y^2=75\\10y=30\end{cases}，得\begin{cases}x_1=1,\\y_1=3\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-1\\y_2=3\end{cases}$$

13. 计算

1° $(\sqrt{3}-i)^6$　　2° $\sqrt[3]{1+i}$

解 1° $(\sqrt{3}-i)^6=\left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^6=64(\cos 11\pi+i\sin 11\pi)=-64$

2° $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$\therefore \sqrt[3]{1+i}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2K\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2K\pi}{3})$ $K=0,1,2.$

14、设1的立方根为1，$\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$，试证

1° $1+\omega+\omega^2=0$，　2° $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$.

证：1° $1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=0$

2° $(1-\omega)(1-\omega^5)=1-\omega-\omega^5+\omega^6=1-\omega-\omega^2+1=2-(\omega+\omega^2)=3.$

同理 $(1-\omega^2)(1-\omega^4)=3$　$\therefore(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$

或者 $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

$=[(1-\omega)(1-\omega^2)]^2=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2=3^2=9$。

15、1的n次根叫n次单位根，n次单位根有n个，证明

1° 两个n次单位根的积仍是一个n次单位根.

2° n次单位根的倒数仍是一个n次单位根.

3° 数α的n次方根的所有值，都可以从它的某一值乘以所有的n次单位根得到.

证：1° 设ω_1与ω_2都是单位根，则$\omega_1^n=1$，$\omega_2^n=$ ，从而$(\omega_1\omega_2)^n=\omega_1^n\omega_2^n=1$，所以$\omega_1\omega_2$仍是n次单位根。

2° 设ω是一个n次单位根，则$(\omega^{-1})^n=(\omega^n)^{-1}=1$，$\therefore\omega^{-1}$也是单位根.

3° 设ξ是α的一个n次方根：$\xi^n=\alpha$，ω是任一n次单位根，则$(\xi\omega)^n=\xi^n\omega^n=\alpha$，即$\xi\omega$是$\alpha$的n次方根，n次单位根有n个不同的值，因此，$\alpha$的n次方根可以由$\xi\omega$得到。

16、证明：

1° $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\qquad$ 2° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

3° $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\qquad$ 4° $z\overline{z} = |z|^2$

证：设 $z_1 = a_1 + b_1 i$，$\quad z_2 = a_2 + b_2 i$，则

1° $|z_1 z_2| = |(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)| = |(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i|$

$$= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|$$

2° $\because |z^{-1}| = \left|\dfrac{1}{a + bi}\right| = \left|\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |z|^{-1}$$

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1 z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2|^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3、$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

$\therefore \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

4、$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

17、证明棣美弗定理对于 n 是任何有理数都成立

证：设：$n = \dfrac{p}{q}$，（这里 q 是正整数，p 是整数）

$$\because \left(\cos\frac{\theta}{q} + i\sin\frac{\theta}{q}\right)^q = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\therefore \cos\dfrac{\theta}{q} + i\sin\dfrac{\theta}{q}$ 是 $\cos + i\sin\theta$ 的一个 q 次方

根．如用符号 $z^{\frac{1}{q}}$ 来表示 z 的 q 次方根，那么可以说，$\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}$ 是 $((\cos\theta+i\sin\theta))^{\frac{1}{q}}$ 的一个值．从而 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ 的一个值是 $(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q})^{p}$ 即 $\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta$．

18、试用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 来表示三角函数 $\sin 5x$ 和 $\cos 5x$

解：利用棣美弗定理和二项式定理

$(\cos x+i\sin x)^5=\cos 5x+i\sin x$，但

$$
\begin{aligned}
(\cos x+i\sin x)^5&=\cos^5 x+5\cos^4 x\cdot i\sin x+10\cos^3 x\ \ \ \sin^2 x\\
&+10\cos^2 x\cdot i^3\sin^3 x+5\cos x\cdot i^4\sin^4 x+\\
&i^5\sin^5 x=\\
&=(\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x)+i\\
&(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x$，

$\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x$

19、计算 $\sin\varphi+a\sin(\varphi+h)+a^2\sin(\varphi+2h)+\cdots+a^K\sin(\varphi+Kh)=\sum\limits_{n=0}^{K}a^n\sin(\varphi+nh)$

解：令 $T=\sin\varphi+a\sin(\varphi+h)+\cdots+a^K\sin(\varphi+Kh)$

$S=\cos\varphi+a\cos(\varphi+h)+\cdots+a^K\cos(\varphi+Kh)$

则 $S+Ti=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+a[\cos(\varphi+h)+i\sin(\varphi+h)]+a^2[\cos(\varphi+2h)+i\sin(\varphi+2h)]+\cdots+a^K[\cos(\varphi+Kh)+i\sin(\varphi+Kh)]$

令 $\cos\varphi+i\sin\varphi=\alpha$，$\cos h+i\sin h=\beta$ 则

$$
\begin{aligned}
S+Ti&=\alpha+a\alpha\beta+a^2\alpha\beta^2+\cdots+a^K\alpha\beta^K\\
&=\alpha[1+a\beta+a^2\beta^2+\cdots+a^K\beta^K]
\end{aligned}
$$

$$=\alpha\frac{1-a^{K+1}\beta^{K+1}}{1-a\beta}=\alpha\cdot\frac{1-a^{K+1}\beta^{K+1}}{1-a\beta}\cdot\frac{1-\frac{a}{\beta}}{1-\frac{a}{\beta}}$$

$$=\frac{\alpha(1+a^{K+2}\beta^{K}\frac{a}{\beta}-a^{K+1}\beta^{K+1})}{a^2-2a\cos h+1}$$

分子 $=\cos\varphi+i\sin\varphi+a^{K+2}[\cos(\varphi+Kh)+i\sin(\varphi+Kh)-a^{K+1}]$ $\cos(\varphi+\overline{K+1}h)+i\sin(\varphi+\overline{K+1}h)-a(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ $(\cos h-i\sin h)$

比较两边虚部系数，得

$$T=\frac{\sin\varphi+a^{K+2}\sin(\varphi+Kh)-a^{K+1}\sin[\varphi+(K+1)h]-a\sin(\varphi-h)}{a^2-2a\cos h+1}.$$

20、证明 $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$

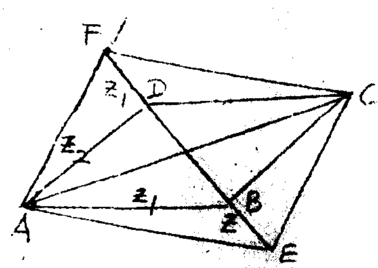
证 令 $T=\sum_{K=1}^{n}\sin Kx$，$S=\sum_{K=1}^{n}\cos Kx$，于是

$$S+Ti=\sum_{K=1}^{n}(\cos Kx+i\sin Kx)=\sum_{K=1}^{n}\alpha^{2K}\ (\text{其中}\ \alpha=\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})$$

$$=\frac{(\alpha^2)^{n+1}-\alpha^2}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^{2n+1}-\alpha}{\alpha-\frac{1}{\alpha}}=\frac{\alpha^n(\alpha^{n+1}-\frac{1}{\alpha^{n+1}})}{\alpha-\frac{1}{\alpha}}$$

比较两边虚部系数，得 $T=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

21、在平行四边形ABCD的对角线BD的延长线上取点E、F，使BE＝DF，那么四边形AECF也是平行四边形。

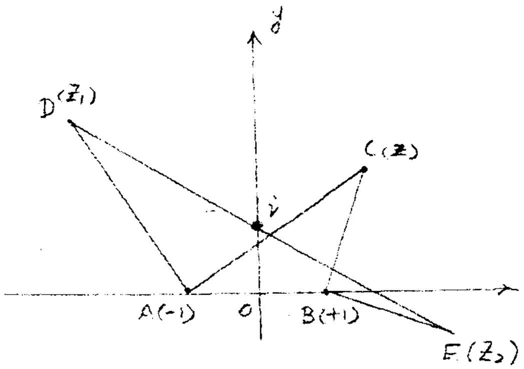


证：设向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、

$\overrightarrow{DF}$ 分别对应复数 z_1，z_2，z，$-z$。由于 $(z_1+z)+(z_2-z)=z_1+z_2$，即 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}$，根据复数和的几何意义，知 AECF 是平行四边形。

22、A、B 是两个定点，甲乙两人都从任意一点 C 出发。甲走到 A 以后向右拐个直角，再走到 D 点，使 AD＝AC。乙走到 B 以后向左拐个直角再走到 E 点，使 BE＝BC。求证不论 C 点在何位置，DE 的中点 M 是一个定点。

证：以过 A，B 的直线作为实轴，指向由 A 到 B。AB 的中点 O 作为复平面的原点。AB 长的一半取作长度单位，那么 A 位于点 -1 上，B 位于点 $+1$ 上，设向量 $\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$ 对应的复数分别是 z，z_1，z_2，



由于 $\overrightarrow{AC}$ 对应的复数是 $z-(-1)=1+z$，而 $\overrightarrow{AD}$ 是由 $\overrightarrow{AC}$ 按逆时针方向旋转 $90°$ 得来的，所以用 i 乘 $(1+z)$ 得 $(1+z)i$，就是 $\overrightarrow{AD}$ 对应的复数，于是

$$z_1=-1+(1+z)i.$$

同样，$\overrightarrow{BC}$ 对应的复数是 $z-1$，而 $\overrightarrow{BE}$ 是由 $\overrightarrow{BC}$ 按顺时针方向旋转 $90°$ 得来的，所以 $\overrightarrow{BE}$ 对应的复数是

$$(z-1)(-i)=(1-z)i, \quad 于是\ z_2=1+(1-z)i$$

设 DE 的中点 M 对应复数 z_3，因为 $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DM}$，可知 $z_2-z_1=2(z_3-z_1)$ 即 $z_3=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{1}{2}\left\{(-1)+(1+z)i-[1+(1-z)i]\right\}$ $=i$，所以 M 位于点 i 处是个定点。

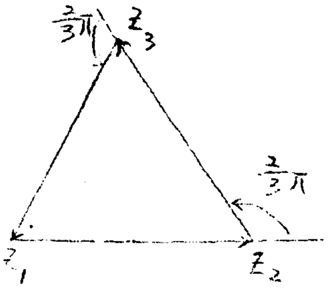
23、求证：三个复数 z_1，z_2，z_3 组成一正三角形的三

个顶点的充要条件是

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$$

证：必要性 先解释一下 $\frac{z_1}{z_2}$ 的幅角. 设 $z_1=\rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2=\rho_2 e^{i\theta_2}$

则 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$，由此可见 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2$（从略）由三点可得三边 (z_2-z_1)，(z_3-z_2) 和 (z_1-z_3). 由三边可得三个外角，然后利用边相等，外角相等，可得欲证等式。



设 $\triangle z_1z_2z_3$ 为正三角形（如图）外角都等于 $\frac{2\pi}{3}$，即 $\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

又由三边相等知 $|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|$ 从而

$$\left|\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right|$$

由此推出 $\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}\left(=e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$，将此式化简并整理即得

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2.$$

充分性：设等式 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$ 成立，

则有 $z_1^2-z_1z_2-z_3z_1+z_2z_3=2z_2z_3-z_2^2-z_3^2$. 即

$$(z_1-z_3)(z_2-z_1)=+(z_3-z_2)^2,$$ 由此得

$$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_2},$$ 当然有

$$\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}\right)=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}\right)=\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}\right)$$

这说明 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 三外角相等，故为正三角形。

习题二

1、已知 1° $p|(p+8)$，2° $(m-1)|(m+1)$ 求自然数 p 和 m.

解：1° $\because p|(p+8)$，$p|p$，$\therefore p|8$ $\therefore p=1,2,4,8$.

2° $\because (m-1)|(m+1)$，$(m-1)|(m-1)$，$\therefore (m-1)|2$，

$\therefore m=2,3$。

2、举例说明素数、素因数、互素的三个数、两两互素的四个数。

解：能只能被1和本身整除的大于1的自然数是素数，如2，3，5等．一个数的因数如果是素数叫素因数。如2，3都是12的素因素，而6就不是12的素因数，三个数互素是指它们的最大公因数1，而不是说这三个数都是素数。如4，6，27三个数互素。其中每一个数都不是素数。互素与两两互素也是不同的两个概念，如4，5，11，21是两两互素的，而互素的四个数4，6，11，27则不是两两互素。

3、相邻两数必互素，相邻的两个奇数亦必互素。

证：设相邻两数 a 与 $a+1$ 的最大公因数为 d：$(a,a+1)=d$，则 $d|a$，$d|(a+1)$，从而 $d|(a+1-a)$，即 $d|1$，$\therefore d=1$，即 a 与 $a+1$ 互素，同样，设两个相邻奇数的最大公因数是 d：$(2n-1,2n+1)=d$，则 $d|(2n+1)$，$d|(2n-1)$，因此 $d|2$，$\because d\neq 2$，$\therefore d=1$，故相邻两奇数必互素。

4、利用欧几里得标法求 $(315,120)$ 和 $[315,120]$

解：

2	120	315	
	75	245	
1	45	75	1
	30	45	
2	15	30	1
		30	
		0	

$\therefore (315,120)=15$

$[315,120]=\dfrac{315,120}{15}=2520$

5. 利用数的标准分解求 $(315, 120)$ 和 $[315, 120]$.

解: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore (120, 315) = 3 \cdot 5 = 15$. $[120, 315] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

6. 判别 542850, 140829 能否为 11, 13, 21 所整除.

解 1° $850 - 542 = 308$. $\because 11 \mid 308$, $\therefore$ 11能整除542850.

$\because 13 \nmid 308$, $\therefore$ 13不能整除542850.

又 $\because 7 \mid 308$, $\therefore 7 \mid 542850$, 且 $5+4+2+8+5 = 24$, $3 \mid 24$, $\therefore 3 \mid 542850$, 而 $(3,7)=1$, $\therefore 21 \mid 542850$.

2° $829 - 140 = 689$. $\because 13 \mid 689$, $\therefore 13 \mid 140829$.

$\because 7 \nmid 689$, $11 \nmid 689$, $\therefore$ 11和21都不能整除140829.

7. 证明 1° $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ 能被13整除

2° $S = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ 能被19整除

证: 1° 凑合法: $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4 \cdot 16^n + 9 \cdot 3^n = 4(16^n - 3^n) + 13 \cdot 3^n$.

$\because 16^n - 3^n = (16-3)(16^{n-1} + \cdots + 3^{n-1})$ $\therefore 13 \mid (16^n - 3^n)$,

$\therefore 13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$

读者再用数学归纳法证

2°. 用数学归纳法: 当 $n=1$ 时, $S = 1216$, $19 \mid S$.

假设 $n = K$ 时, $19 \mid S$, 即 $19 \mid (5^{2K+1} \cdot 2^{K+2} + 3^{K+2} \cdot 2^{2K+1})$

要证 $n = K+1$ 时 $19 \mid S$, 事实上, $5^{2K+3} \cdot 2^{K+3} + 3^{K+3} \cdot 2^{2K+3} = 2 \cdot 5^2 (5^{2K+1} \cdot 2^{K+2}) + 3 \cdot 2^2 (3^{K+2} \cdot 2^{2K+1}) =$

$= 50(5^{2K+1} \cdot 2^{K+2} + 3^{K+2} \cdot 2^{2K+1}) - 38 \cdot 3^{K+2} \cdot 2^{K+1}$.

根据归纳假设，第一项被19整除。又第二项显然也能被19整除。所以当 $n=K+1$ 时，$19|S$。因此对于任意自然数 n，$19|S$。

8. 三个连续自然数的立方和必是9的倍数。

证：设三个连续自然数为 $a-1$，a，$a+1$ 则

$$
\begin{aligned}
(a-1)^3+a^3+(a+1)^3 &= 3a^3+6a = 3a(a^2+2) \\
&= 3a(a^2+3a+2-3a) \\
&= 3a[(a+1)(a+2)-3a] \\
&= 3a(a+1)(a+2)-9a^2.
\end{aligned}
$$

$\because 3|a(a+1)(a+2)$，$\therefore 9|[3a(a+1)(a+2)-9a^2]$

9、1984年是农历甲子年，问下一个甲子年是哪一年？

答：“甲子”是由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸、十个字和子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥十二个字依次搭配而得的。$\because [10,12]=60$ $\therefore$ 下一个甲子年应是公元2044年。

10、一箱手榴弹，设每颗的重量都是超过一斤的整数斤。去掉箱子重量后净重201斤，然后拿出若干颗后，净重183斤。求每颗手榴弹的重量。

解：每颗手榴弹的重量（斤数）应是201与183的公因数。$\because (201,183)=3$，而3的因数只有1和3，据题意，可知每颗手榴弹的重量为3斤。

11、已知全部数码由1组成的 n 位数：$P_n=\underbrace{111\cdots111}_{n个1}$

如果 P_n 是素数，证明 n 也是素数

证：假若 n 不是素数，则 n 必为1或为合数，若 $n=1$，则 $P_1=1$ 不是素数，与已知条件矛盾。若 n 是合数，设 $n=ab$，

其中 a、b 为自然数，且 $1 < a < n$.

$$p_n = 111\cdots111 = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1 =$$

$$\frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{ab} - 1}{9}$$

由于 $10^{ab} - 1 = (10^a)^b - 1 = (10^a - 1)[(10^a)^{b-1} + \cdots + 10^a + 1]$,

于是 $10^a - 1$ 是 $10^n - 1$ 的因数，又由 $1 < a < n$ 可得 $1 < 10^a - 1 < p_n$. 于是 p_n 有大于 1 又不等于它本身的因数，就是说 p_n 不是素数，这与已知条件矛盾，所以 n 一定是素数。

注意，这个命题的逆命题不成立。例如 $n = 3$ 是素数，但 $p_3 = 111$ 并不是素数。目前我们知道的这样的素数只有 p_2，p_{19}，p_{23}，p_{317}。

12、满足 $xy = 27000$ 的自然数对 (x, y) 有多少对？

解：因 x，y 是 27000 的因数，当 x 的值确定后，y 就随之有一个确定的值，因此，满足 $xy = 27000$ 的数对 (x, y) 的对数与 27000 的因数的个数是一致的。

由 $27000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$. 由组合知识可知 27000 的因数有 $(3+1)(3+1)(3+1) = 64$ 个，从而数对 (x, y) 有 64 对。

13、已知对任何整数 x，整系数多项式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 能被 5 整除，求证所有系数 a、b、c，d 都能被 5 整除.

证：取 $x = 0$，则多项式 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的值为 d，按题设条件，$5 \mid d$. 设 $d = 5d_1$，再取 $x = 1$ 和 $x = -1$，得关系式

$$\begin{cases} a + b + c + 5d_1 = 5m \\ -a + b - c + 5d_1 = 5n \end{cases}$$