数学分析講义 二

（解析几何部分）

北京电视大学数学系

序

随着技术革命、文化革命的蓬勃发展，学习文化、掌握科学技术已成为广大劳动人民刻不容缓的大事了，北京电视大学在这种形势下诞生了。这就要求有一个适合于当前技术革新、技术革命的形势、适合于电视大学的教材。我系十七位同学和講課教員一起在毛澤东思想指导下、大搞羣众运动、堅持同工农羣众相結合，以我系寒假編写的教材为素材，在短短的二十天时間內、編出了数学分析的教材，为此，我們曾訪問了北京的工厂、企业、学校，部队和科学研究机关等二十五个单位，收集数学题目两千余个。在此我們对这些单位的共产主义协作精神表示感謝。由于时間所限我們仅編写了数学分析。

在編写过程中我們一直是按照党对业余教育的指示进行的，貫徹学以致用，教育为生产服务的方針，因此給予旧的資产阶級的数学体系以巨大的冲击。首先，删掉了沒有实际应用意义的內容，我們認为对于数学的一些定理和結論，只要人們在实践中能够辯証的說明和証明的，那就不一定非經过形式邏輯的推演不可，例如对于 $\varepsilon-\delta$ 的說法，根据上面的原則，就不是什么定理都要用 $\varepsilon-\delta$ 来証明，教材中取消了連續函数的性質 $\varepsilon-\delta$ 的叙述或証明。其次，教材中大大加强了"实践——理論——实践"的观点：对于重要的概念如函数，极限，导数积分等都从大量的实际問題中抽出；这就有可能使讀者迅速掌握內容，加深对于內容的認識，并訓練了把数学应用于生产实际的能力。最后，教材中加强了解决实际問題及計算的能力的培养，把实际中极为有用的差分方法放入教材。

我們所作的，打破旧的資产阶級的数学体系的工作是教育革命的一部分，这还仅仅是开始，这里破的肯定是不够的，但是，我們希望这教材能起抛砖引玉的作用，我們热烈地盼望大家，提出自己的意見、体会和要求，从而共同改进这一工作，彻底实現教学改革，把毛澤东的思想紅旗插在数学的領域上。

北京大学数学力学系电視大学
教材編写組　1960.5.

緒　論

我們現在要講的課程內容是所謂高等数学，它与初等数学即常量的数学是不同的，初等数学时期人們对于周围世界的認識还是不够深刻，还不善于从現实世界的变化和发展中来考察事物，因此当时人們主要地只研究固定的量与固定的图形及它們之間的最简单最基本的关系。

十七世紀以来，社会生产力大大发展，要求人們研究运动，各种变化过程和各种变化着的量之間的依賴关系，（例如物体在液体中运动的規律，船只的稳定性，天体运行規律，抛射体的軌道等），而这些又要求运用全新的数学工具，数学对象的这种根本扩展，就飞跃到了变量的数学时期——高等数学。

这是个重大的轉折，恩格思說"……因此运动和辯証法便进入了数学"，世界本来是在永恆的变化中的，我們只有从运动，变化中才能对它获得更深刻的了解，和掌握它的規律。从而进一步改造客观世界。

从上述中我們看到高等数学的形成是由于生产实践的需要，而正是生产力飞跃发展的时代也就是数学兴旺及革命性的时代，因此在今天我国社会主义革命进入伟大的技术革命及技术革新的时代，必然会而且已經总結出和創造出具有中国特点的共产主义的新的数学面貌，这也就要求我們积极地投入这一伟大的羣众运动，而且有目的地去总結劳动人民的丰富智慧和新的数学思想創立更新的为社会主义服务的理論，从而更好地指导社会主义建設，在这方面，1958 年以来各高等学校及科研机关在大搞科研羣众运动中間已取得很大成績，例如对长江三峽問題，水壩問題，薄壳問題，产品检查产品質量控制等問題的解决过程都碰到新的前所未有的数学問題，因此学习高等数学的方法必須是理論联系实际的，目前来說特别是社会主义生产实际，这是必須坚持的方向。

最后必須彻底破除"高等数学深玄莫测、难学"等迷信，这是資产阶級的学术思想强加于我們头上的，我們知道数学作为科学是劳动人民創造的，是在生产实践斗爭中总結出来的智慧結晶，是有規律的，只要高举毛澤东思想紅旗，理論联系实际地，在战略上藐視战术上重視就一定能在較短的时間內多快好省地掌握它。

目　录

第一章　若干預备知識

§1. 数学归納法

在我們生产实践和日常生活中常常用归納的方法来判断某些事情，就是要把特殊的經驗，个别情形的結論推断出一般的結論．这种归納要成功就必須抓着事物的本質，把經驗經过提炼才能推广．

数学归納法是从数量側面来进行归納的一种方法，要把个别的数学結論推广到一般的情形，例如：

(1)
$$1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$$
$$1+q+q^2=\frac{1-q^3}{1-q}$$
$$1+q+q^2+q^3=\frac{1-q^4}{1-q}$$

(2)
$$100\times1-1^2>0,\quad 100\times2-2^2>0,\quad 100\times3-3^2>0.$$

是个别結論，而

(1)′
$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.\qquad q\neq1.\ n=1,2,3,\cdots$$

(2)′
$$100\times n-n^2>0.\qquad n=1,2,3,\cdots$$

是一般結論．个别到一般需要哪些条件呢？

这結論是否能成立呢？(1)′我們早在中学就知道是成立的．至于(2)′对 $n=1,2,3,\cdots,99$，都成立，但对 $n=100$ 就不成立了．

(2)′为什么不成立呢？$n=1$ 对了，不知 $n=2$ 是否对；$n=2$ 对了，不知 $n=3$ 是否对，总之，一个对了不能判断下一个是否对．

至于(1)′分析一下它的过程：

$n=1.\qquad 1+q=\dfrac{1-q^2}{1-q}.$

$n=2.\qquad 1+q+q^2=\dfrac{1-q^2}{1-q}+q^2=\dfrac{1-q^2+q^2(1-q)}{1-q}=\dfrac{1-q^3}{1-q}.$

$n=3.\qquad 1+q+q^2+q^3=\dfrac{1-q^3}{1-q}+q^3=\dfrac{1-q^4}{1-q}.$

…………………………………………

$n=k+1\qquad 1+q+q^2+\cdots+q^k+q^{k+1}=\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}+q^{k+1}=\dfrac{1-q^{k+2}}{1-q}.$

还可算下去，可以看出規律：n 每增加 1，总是多加一項，通分一下就够了，規律是(能

推广的原因)：前面一项对了就能保証后面一项对。这个規律就保証推广的可能性。当然不限于这个具体的例子，由此我們得到数学归納法原理：

要証明一个結論象上面例子一样，对一切自然数成立，只需下面两点满足：

(I) 結論对 $n=1$ 成立。

(II) 如果結論对 $n=k$ 成立，能推出 $n=k+1$ 也成立，

回过来考虑 $(1)'$，現在用数学归納法来証明它，作为例 1.

(I) $n=1$. 卽： $1+q=\dfrac{1-q^2}{1-q}$ 显然成立.

(II) 設 $n=k$ 己成立，卽：

$$1+q+q^2+\cdots+q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}.$$

証明它对 $n=k+1$ 也成立，这不难.

$$1+q+q^2+\cdots+q^k+q^{k+1}=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}+q^{k+1}=\frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}(1-q)}{1-q}$$

$$=\frac{1-q^{(k+1)+1}}{1-q}.$$

因此 $(1)'$ 对任何自然数都成立.

[例 2]：設 $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},\cdots$

証明：(i) $x_n<x_{n+1}$ $n=1,2,\cdots$

(ii) $x_n<2$ $n=1,2,\cdots$

(i), (ii) 均用数学归納法来証明：

(I) $n=1$. 不等式变成

$$\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

自然成立.

(II) 設 $n=k$ 不等式成立，卽：

$$x_k<x_{k+1}.$$

两边加 2，开方，不等式保持(因 $x_k>0$)。卽：

$$\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+x_{k+1}}.$$

卽：

$$x_{k+1}<x_{(k+1)+1}.$$

(ii) $n=1$. 不等式变成： $\sqrt{2}<2$

当然成立.

設 $n=k$ 不等式成立，卽：

$$x_k<2.$$

两边加 2. 开方，得：

$$\sqrt{2+x_k}=x_{k+1}<\sqrt{2+2}=2.$$

卽不等式 对 $n=k+1$ 也成立.

§2. 絕对值

实际是常常发生这样的事情，不需要我們去考虑一量是正还是負，而只需知道它的大小，如允許誤差等于10厘米，意思是可以多10厘米或少10厘米(−10).

去开一数的正負号，所得的正数就称原来数的絕对值，数 a 的絕对值記作 $|a|$.

$$|a|=\begin{cases} a, & 当\ a\geqslant 0; \\ -a & 当\ a<0. \end{cases}$$

例如: $|-5|=5$, $|5|=5$, $|-10|=10$, 等. 而 $|0|=0$.

絕对值在估計一些量的大小时常常用到，因此把它的一些性質，陈述出来:

(i) $|a|\geqslant 0$.

(ii) $|a|\geqslant a$, $|a|\geqslant -a$, 或統一写成 $|a|\geqslant \pm a$.

(iii) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

(iv) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$. $(b\neq 0)$.

(v) 若 $|x|<\gamma$. 则 $-\gamma<x<\gamma$; 反之，若 $-\gamma<x<\gamma$. 則 $|x|<\gamma$.

証明: 若 $|x|<\gamma$. 則: 由于 $|x|\geqslant x$, $|x|\geqslant -x$ 推知:

$$x<\gamma \text{ 和 } -x<\gamma. \text{ 卽 } x>-\gamma.$$

合起来就是:

$$-\gamma<x<\gamma.$$

反之，若 $-\gamma<x<\gamma$. 則: 由 $-\gamma<x$ 推知 $-x<\gamma$.

卽: $x<\gamma$ 又 $-x<\gamma$. 因之:

$$|x|<\gamma.$$

又証: 处理絕对值的时候，往往分情形，去掉 | | 号，来討論.

若 $|x|<\gamma$. 分两种情形.

(1) 若 $x\geqslant 0$. 則 $|x|=x<\gamma$.

(2) 若 $x<0$. 則 $|x|=-x<\gamma$. 卽 $x>-\gamma$.

合起来就得到:

$$-\gamma<x<\gamma.$$

反之，若 $-\gamma<x<\gamma$. 則用上証明 $|x|<\gamma$.

[附註] 1°. 由 $|x|<\gamma$ 推得 $-\gamma<x<\gamma$ 称 $|x|<\gamma$ 是 $-\gamma<x<\gamma$ 成立的充分条件. 而 $-\gamma<x<\gamma$ 是 $|x|<\gamma$ 成立的必要条件. 一般說来由事 A 能推出事 B，就称 A 为 B 成立的充分条件，B 为 A 成立的必要条件.

2°. 根据(V)得出一个較重要的性質:

若 $|x-a|<\gamma$ 則: $a-\gamma<x<a+\gamma$, 反过来也对.

实际上，由(V)若 $|x-a|<\gamma$ 則

$$-\gamma<x-a<\gamma.$$

三边加 a, 得

$$a-\gamma<x<a+\gamma.$$

反之，若 $a-\gamma<x<a+\gamma$，三边减 a，得:

$$-\gamma<x-a<\gamma.$$

由(V)得:

$$|x-a|<\gamma.$$

(vi) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

証：分两种情形，

(1) 若 $a+b\geqslant0$，則:

$$|a+b|=a+b\leqslant|a|+|b|.$$

(2) 若 $a+b<0$，則:

$$|a+b|=-a-b\leqslant|a|+|b|.$$

总之，任何情形都有:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

(vii) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

証：由 $|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$.

推得。

§3. 二阶行列式与二元一次联立方程組

1. 引言:

二元，三元，……多元一次联立方程，在解决实际問題时有很多应用；如：計算复杂回路的电流强度、原子核計算問題、近似計算一些复杂的方程时（如微分方程，积分方程）往往都引起上述方程，在解决它們时牵涉到：解是否存在？如果存在有几个？如何求？目前所講的是未知数較少的情形。例:

2. 二阶行列式的引出:

解綫性方程組(即一次联立方程式)

$$(\mathrm{I})\qquad\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\cdots\cdots(1)\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

时，我們常用消去法进行：$(1)\times a_{22}+(2)\times(-a_{12})$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

从而解出 x（只要 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$）

$$x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

同样 $(1)\times(-a_{21})+(2)\times(a_{11})$ 得

$$y=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

首先从解看出它只与(I)的系数有关，与未知数无关，（无論它写成 y,z；z,w；u,v；……都一样）把方程(I)的系数写出来就足够知道方程的解的情况了，系数是

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\end{matrix}$$

从解 x,y 的分子分母看出，它們都是这些系数經有規則的运算得来的，例如分母正好是表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

中两对角綫項相乘的差，順手的是 +，逆手的是 −，x,y 的分子分别是表

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

里的項經过与上相同的規則运算所得到的数，从此看出記住一个表和一个規則比記 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，$b_1b_{22}-a_{12}b_2$，$a_{11}b_2-a_{21}b_1$ 好得多。

我們称表为矩陣，而表内的各数經过上述規定的运算得到的数就称为表的(矩陣的)行列式，記作(如第一个)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

其中横排称行，竪排称列，又因它是二行二列，故称为二阶行列式，它的值就是 $a_{11}a_{22}-$ $-a_{12}a_{21}$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$- \qquad\qquad +$$

例 1. $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-14=-9$，$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14-5=9$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5-14=-9$，

$\begin{vmatrix} 14 & 7 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 14\cdot5-7\cdot10=0$

利用行列式就可把(I)的解写成:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

x 的分子是把常数項換入分母行列式中 x 的系数而得.

y 的分子是把常数項換入分母行列式中 y 的系数而得.

例 2. 解方程

$$\begin{cases} 5x-8y=-41 \\ 6x+7y=67 \end{cases}$$

按上面公式得到

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-41 & -8\\ 67 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -8\\ 6 & 7\end{vmatrix}}=\frac{-41\cdot 7+8\cdot 67}{5\cdot 7+8\cdot 6}=\frac{536-287}{35+48}=\frac{249}{83}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & -41\\ 6 & 67\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -8\\ 6 & 7\end{vmatrix}}=\frac{67\cdot 5+41\cdot 6}{35+48}=\frac{335+246}{83}=\frac{581}{83}=7$$

对解二元的一次方程組我們已找到了一个簡单有用的工具——行列式，我們目光不能停留在这一点，我們要找三元，四元更多元綫性方程組的解，这些情形的解法更为重要．但对二元情形的研究，可以提供我們研究其他情形的綫索，为此討論一下二阶行列式的性質和应用．

3．性質：

（i）行列互換行列式不变，即

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}.$$

証明：直接計算即可知．这表明行与列的情形是类同的．

以下的性質对行的情形也成立．

（ii）列与列互換行列式变号，即

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b & a\\ d & c\end{vmatrix}$$

証明：計算一下就成．

（iii）列的公因子可以提出行列式号外，如

$$\begin{vmatrix}ka & b\\ kc & d\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

証明：直接計算．

（iv）加法性質．

$$\begin{vmatrix}a+a' & b\\ c+c' & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a' & b\\ c' & d\end{vmatrix}$$

証明：直接計算就成

左边：$(a+a')d-(c+c')b=(ad-bc)+(a'd-bc')$

（v）把一列加另一列的 k 倍行列式不变

$$\begin{vmatrix}a+kb & b\\ c+kd & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}kb & b\\ kd & d\end{vmatrix}.\quad(\text{由(vii)})$$

这些性質对行列式的計算有很大方便，如：

$$\begin{vmatrix}751 & 750\\ 856 & 855\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}751+(-1)750 & 750\\ 856+(-1)855 & 855\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 750\\ 1 & 855\end{vmatrix}=105$$

(vii) 行列式为零的充分必要条件是列与列成比例，(行与行成比例)

證明：(必要性)設行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

即 $ad=bc$，因此 $a:b=c:d$.

反之(充分性) 若 $a:b=c:d$ 即 $ad=bc$ 則

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc=0$$

特別如两行(列)相同則行列式得零.

4. 对二元綫性方程組的研究：

甲、若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 則 (3)是方程(I)唯一的解.

直接代入方程驗証就成，例如代入(1)得

$$a_{11}x+a_{12}y=\frac{a_{11}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{b_1a_{11}a_{22}-b_2a_{11}a_{12}+b_2a_{11}a_{12}-b_1a_{12}a_{21}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=b_1$$

由于本节初的計算，方程不可能再有其他解了.

特例 $b_1=b_2=0$ 則方程仅有零解.

乙、若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$ 有两种可能：(i) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$ $\left(\text{或} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\right)$ 不为0則方程(I)无解，(ii) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}=0$ $\left(\text{或} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\right)$ 則方程(I)有无穷多解.

證明：若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$ 假設 a_{21}, a_{22} 不全为0 則 $a_{11}=ka_{21}$，$a_{12}=ka_{22}$.

(i) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1\neq 0$. 則 $b_1\neq kb_2$ 否則 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}=0$ 矛盾.

下面用反証法来証明我們的結論：若方程(I)有解 x_0, y_0 則有矛盾，因为只要(2)式乘$(-k)$加到(1)式上去就得 $b_1-kb_2=0$，这与 $b_1\neq kb_2$ 矛盾.

若 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 証明类似.

(ii) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=0$，則 $\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{b_1}{b_2}=k$，(1)，(2) 是一样的，仅差一常数倍，这时(I)有无穷多解.

例 3. 解:

$$\begin{cases} 2x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)' \\ 4x+2y=k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)' \end{cases}$$

解: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix}=2k-12=2(k-6)$

$(2)'$的左边是$(1)'$左边的两倍，若$(2)'$之右边不是$(1)'$的两倍就矛盾，否则$(1)'$, $(2)'$实际上就是一个.

所以当 $k\neq 6$ 时就沒有解.

当 $k=6$ 时，方程实际上只有一个.

任給 $x=k$ 解出 $y=3-2k$. 因此解是

$$\begin{cases} x=k \\ y=3-2k \end{cases} \qquad (k \text{ 任給})$$

丙、若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$, $b_1=b_2=0$, 作为乙(ii)的推論，則方程(I)有非零解.

若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$, $b_1=b_2=0$. 則 (I) 只有零解，因要 (I) 有非 0 解，必須

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0,$$

因此得到常数項为 0 的方程:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=0 \\ a_{21}x+a_{22}y=0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$.

利用上述結果，我們可以研究下列方程組:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \end{cases}$$

其中 x, y, z 是未知数，且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$,

把 $a_{13}z$, $a_{23}z$ 搬到方程之右边，用上述方法解出 x, y 卽得

$$x=\frac{-\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}z, \qquad y=\frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}z.$$

为方便起见令 $\dfrac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=k$. 則得解

$$x=k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\quad y=k\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix},\quad z=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad (k\ 可取任意値)$$

例 4. 解方程

$$\begin{cases} 5x-8y+41z=0 \\ 6x+7y-67z=0 \end{cases}$$

按照上面解法把 z 項搬到右边解得:

$$x=3z,\qquad y=7z$$

因此解是(令 $z=k$ 后)

$$x=3k,\quad y=7k,\quad z=k\quad (k\ 任意)$$

方程(II)中 x, y, z 地位平等, 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$ 而 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\neq 0$ 則可把 x 項搬到右边解之.

例 5. 解:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad 而 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1+2=1,\quad 把\ x\ 搬到右边$$

得:

$$\begin{cases} -y+z=-x \\ -2y+z=-2x. \end{cases}$$

解之得:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -x & 1 \\ -2x & 1 \end{vmatrix}}{1}=x,\qquad z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -x \\ -2 & -2x \end{vmatrix}}{1}=0.$$

解是

$$\begin{cases} x=k \\ y=k \\ z=0 \end{cases}\qquad (k\ 任意)$$

§4. 三阶行列式与三元一次联立方程組

甲、概念. 解方程式

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\cdots\cdots(1) \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\cdots\cdots(2) \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

时，我們也用消去法，把 (1) $\times$ A，(2) $\times$ B，(3) $\times$ C 加起来得

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}A+a_{21}B+a_{31}C)x+\\
&(a_{12}A+a_{22}B+a_{32}C)y+\\
&(a_{13}A+a_{23}B+a_{33}C)z=b_1A+b_2B+b_3C.
\end{aligned}
$$

如果能找出 A, B, C，使 y, z 前的系数为 0，那末只要 $a_{11}A+a_{21}B+a_{31}C\neq 0$ 就有

$$x=\frac{b_1A+b_2B+b_3C}{a_{11}A+a_{21}B+a_{31}C}$$

由 § 2. 从方程 $a_{12}A+a_{22}B+a_{32}C=0$，$a_{13}A+a_{23}B+a_{33}C=0$ 解得

$$A=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}\qquad C=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

因此 x 的分子分母出現数

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

在解 y, z 时也出現类似形式的数，我們把 (I) 系数排成表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

那末分母是由 a_{11} 乘其余子式（某一元的余子式就是划去該元所在的一行和一列，把余下的元按原来排列次序重新組成的二阶行列式如 a_{11} 的余子式就是 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$，）$-a_{21}$ 乘其余子式，a_{31} 乘其余子式相加而得，分子由类似的規則得到，只要把 x 的系数換成 b_1, b_2, b_3.

上表称为三阶矩陣，而数

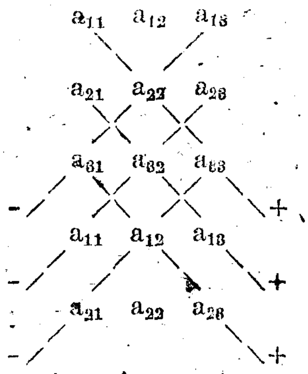
$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

称为上述矩陣的行列式，記作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

經計算得 $(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33})$

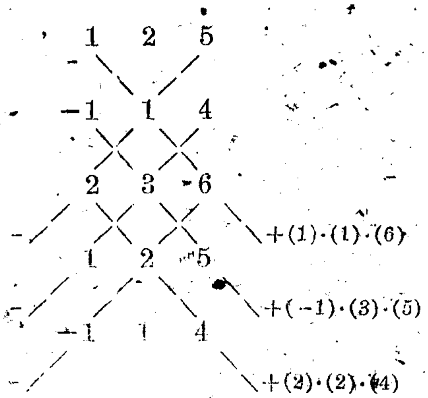
实际計算时可按下列規則进行：把下表中同一直綫上的数相乘，并加上綫端所表的

符号，再把这样所得的六个数相加便得行列式之值，



例 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6-15+16-10-12+12=-3$$



利用行列式可以把方程 (I) 的解写出

定理 1. 若 (I) 的系数行列式不等于 0，则 (I) 有唯一的解：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

証：是解，只要直接代入就能知道(略)

唯一、如果有解、根据上述計算 x 一定是上面的样子，同样 y, z 也必定是上面的样子[(略)，利用下面性質(ii)]

乙、性質[(i)—(v)由直接計算証明，(vi)根据(iii),(iv),(v)主要是由(iv)証明].

(i) 行列互換行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(由此可見，对行成立的性質，对列也成立)

(ii) 行行互換行列式变号，例如第一行与第三行互換.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \quad \text{(对列也成立)}$$

(iii) 某一行(或列)的常数倍可以提出行列式号外. 例如

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(iv) 加法性質.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(v) 两行(列)相同行列式为0.

(vi) 某列加上其他两列的綫性(一次)組合(即其他两列常数倍之和)行列式不变，如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k_1a_{12}+k_2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k_1a_{22}+k_2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k_1a_{32}+k_2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例:
$$\begin{vmatrix} 11 & -6 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \\ 26 & -6 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11-6 & -6 & 2 \\ 7-2 & -2 & 1 \\ 26-6 & -6 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 20 & -6 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$5(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = (-10)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -70.$$

(vii) 某行是其他两行的綫性組合，行列式为0.

丙、对方程(I)的討論；系数行列式为0的情形，不詳細討論了，而集中于討論 $b_1=b_2=b_3=0$ 的方程(I)和性質(vii)的反面問題.

定理2. 方程

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\cdots\cdots(1)' \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0\cdots\cdots(2)' \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0\cdots\cdots(3)' \end{cases}$$

有非0解的充要条件是系数行列式为0.

証明: 必要性、在定理1中，因若行列式不等于0,(II)就只有一个解即0解.

充分性: 分两种情况証之(i) 如果所有的二阶子式都为0. 則方程(1)′,(2)′,(3)′在实質上是一个方程式(即其中有二个是其余一个的常数倍)故恆有非0解.

(ii) 若有一个二阶子式不为0. 如不妨設 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

这时 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{21} & a_{31} \\ a_{32} & a_{22} & a_{32} \\ a_{33} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$

按行列式定义有

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=0 \\ a_{21}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=0 \\ a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{32}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=0. \end{cases}$$

式中三个行列式 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ **分别就可以看成解** x, y, z.

而 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 故为非零解

例 解:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 2x+2y+4z=0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

而 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0$; 方程式組变为 $\begin{cases} x+y=-z \\ 2x+y=-2z \end{cases}$