

1642

第一屆國際航空科學會議論文

有限壽命的結構和材料

4
t2

出版者的話

国际航空科学委员会 (International Council in the Aeronautical Sciences) 于 1958 年 9 月 8 日到 13 日在西班牙首都馬德里召开了第一届国际航空科学會議 (First International Congress for the Aeronautical Sciences)。出席會議的有 20 个国家的 600 余位代表。苏联也派代表团参加了會議。在會議上共发表了 47 篇論文, 广泛地討論了目前各国科学家在航空科学技术領域內所进行的一些重要研究工作。其中包括了超音速和高超音速空气动力学、彈道導彈的制导問題、飞机噪音問題、附面层控制問題、垂直起落和短距起落飞机的发展情况、航空材料的研究情况、星际飞行的动力問題等。現中国科学技术情报研究所和国际航空杂志社联合組織力量計劃将全部論文翻譯出版, 供讀者参考。

为了讀者使用方便, 拟先按論文以小冊子形式分別陸續出版, 待全部出版后再裝訂成合訂本。

全部論文是根据美国珀加蒙出版社 (Pergamon Press) 1959 年出版的合訂本 (Advances in Aeronautical Sciences) 翻譯的。

有限寿命的结构和材料

加利福尼亚, 斯坦富, 斯坦富大学航空工程系

N. J. 霍夫

摘要——伴随着超音速和高超音速飞行而产生的气动力加热, 使无限寿命的设计成为不可能。在一般的高温下即使载荷很小, 但是只要它作用的时间足够长, 蠕变在拉伸时就会导致破坏, 在压缩时就会导致损伤; 在极高的温度下, 结构材料或它的防护层会熔化、蒸发、升华或燃烧。设计者必须能够计算出结构元件的寿命, 以便保证结构的安全。在这篇报告中提出几个简单的方法, 用这些方法可以进行寿命的近似计算。

符 号

- a 常数; 无因次挠曲幅度; 热扩散性
- b 壁厚
- A 面积
- B 兰伯尔-奥斯特古德关系中的常数
- c 比热
- $\bar{c}_p$ 混合气体在定压下的平均比热
- C 常数; 气动力系数
- D_{12} 物质1进入物质2的质量扩散系数
- E 模数
- f 函数
- g 函数
- h 假想柱截面的高度; 外界热交换系数
- H 加热率
- I 积分, 惯性矩
- k 常数
- K 常数; 导热系数
- L 柱或杆的长度; 熔化潜热
- Le 由方程(114)决定的刘易氏-基朗诺夫数
- m 蠕变定律中的时间指数; 由方程(107)决定的兰道参变数; 质量转移率
- M 弯曲力矩
- n 蠕变定律中的应力指数; 整数
- P 整数; 兰伯尔-奥斯特古德关系中的指数; 压力
- P 载荷

$$R=1+\epsilon$$

s 指数蠕变定律中的常数; 轉移面到座标原点的距离

t 時間

T 溫度

u x 方向的速度分量

v y 方向的速度分量

V 轉移速度

W 重量

x 变数; 座标

y 变数; 座标

β 安德雷德定律中的常数

δ 熔化材料层的厚度

Δ 增量

ϵ 应变; 发射率

χ 曲度; 安德雷德定律中的常数

λ 蠕变定律中的常数

μ 粘性系数

ρ 剖面的迴轉半徑; 密度

σ 应力; 博耳茲門輻射常数

τ 剪应力

ϕ 热流

下面的符号用作脚注:

cr 临界的

D 阻力

eff 有效的

E 欧拉

i 交界的

m 熔化的

n 自然的

t 切綫

u 极限的

o 起始或名义值

oo 在彈性变形前的起始值

1 下凹面的緣条

2 凸起面的緣条

1. 引 言

第二次世界大战以前, 設計者的責任是保証飞机結構在預計的飞行或着陆时出現的載荷下永遠不致破坏。直到最近他才可以对他所保証的可靠范围規定一个最大的飞行时数。这个变化是由

于薄壁金属结构和超高强度铝合金的应用带来的致命的疲劳破坏而引起的。

放弃无限期安全这一概念的趋势日益明显了；因为在超音速和高超音速飞行引起的高温条件下只能得到有限寿命的结构。同时绝大多数导弹只要求飞行一次，而且时间很短。如果把导弹结构的安全寿命设计得大大地超过了它的使用限度，势必会使结构的重量显著地增加，因而导致燃料和费用的浪费。

本文的目的是研究某些近来逐渐重要起来的限制飞机、导弹和空间飞行器的结构寿命的因素。关于疲劳问题不准备做进一步的阐述，因为这个题目在“冷”结构的文献中已经有充分的叙述。

第一个影响“热”结构寿命的典型效应是蠕变现象。这种现象在试验中可以明显地看出，如果温度足够高，承受恒定拉伸载荷的金属试件会随着时间的加长而不断伸长。最后不必增加载荷，试件也会断裂。破坏开始的时间，即临界时间显然与结构设计者有着密切的关系。承受压缩载荷的柱也有同样的情况，当载荷加上时它完全可以支持住，但是过了一定的时间（亦即临界时间）以后，柱就会失去稳定。

上面所谈到的现象首先发现在杆件试验中，同时在梁、框架、钎和壳的试验中也有同样的现象发生。当载荷作用的时间足够长时，由于蠕变的存在，这些结构元件就会断裂，失去稳定和破坏。

由外层空间再进入大气层的物体的磨损是很大的。流星在空气中熔化、燃烧和气化就是这种所碰到的高加热率导致的破坏力量的证据。飞行器设计者如果想成功地把容器（最后这些容器将载人）同收到地面，他必须学会如何控制这一现象。

2. 拉杆的蠕变破坏

A. 基本概念和理论推导

在高温下工作的结构元件使用寿命的最明显的极限，是承受拉力的杆由于蠕变而破坏的时间。在1910年安德雷德⁽¹⁾曾经观察过这种现象，并且给出了三阶段蠕变和断裂的物理解释。他指出如果杆子原长 L_0 。在时间 t 时伸长到 L ，其截面积必然会减小，因为蠕变时体积是不变的。假设时间 t 时的工程应变为 ϵ ，则长度 L 可由下式得出

$$L = L_0(1 + \epsilon) \quad (1)$$

而减小后的截面积 A 必然是

$$A = A_0 / (1 + \epsilon) \quad (2)$$

式中 A_0 是原始截面积。由方程（1）和（2）可以推出在这一过程中体积保持不变：

$$LA = L_0A_0 \quad (3)$$

但是截面积减小的后果是在载荷 P 不变的条件下拉应力会增加。在试验开始时的应力是

$$\sigma_0 = P/A_0 \quad (4)$$

而在时间 t 时

$$\sigma = P/A = \sigma_0(1 + \epsilon) \quad (5)$$

应力的增加引起应变率的增加，当工程应变 ϵ 为百分之几时，这一点变得值得注意了。应变率的增加表明蠕变过程第三阶段的开始，在一个短時間后，一旦在不断缩小的截面上不断增长的应力达到了在试验温度下材料的破坏应力值时，即会导致破坏。

安德雷德用一个部份浸在水中的特殊形状的物体证明了他的推测。这一物体的形状应使由于伸长的不断增长而引起的浮力增加完全被截面积的不断减小所补偿。这样，应力在整个试验过程中保持常数。由于应变率不改变，所以蠕变的第二阶段也可以发展到破坏。

安德雷德根据他所进行的試驗推出一个經驗公式:

$$L = L_0(1 + \beta t^{1/3})e^{\alpha t} \quad (6)$$

式中 L 是杆在時間 t 时的长度, L_0 是在試驗开始时 ($t=0$) 的杆长, t 是時間, β 和 α 则是对于一給定的应力和温度的常数。当 t 很大时, 这一关系可化为

$$(1/L)(dL/dt) = \epsilon_n = \alpha = \text{常数} \quad (7)$$

这一关系可以很方便的用文字表达出来, 即: 自然应变对時間的变化率是一常数。当应变不超过百分之几时, 这个关系相当于通常使用的第二阶段蠕变定律。根据第二阶段蠕变定律, (工程) 应变对時間的变化率为一常数 (如果应力和温度保持不变的話)。

在大多数实际应用中作用在元件上的载荷是常数的机会比应力是常数的机会多。在这种情况下, 計算破坏所需要的时间并不困难; 它所必需的基本考虑方法已由文献 (2) 的作者提出。第二阶段蠕变定律可以写成

$$d\epsilon/dt = \epsilon = f(\sigma) \quad (8)$$

式中 $f(\sigma)$ 表示在給定温度下应力的一个經驗函数。但是在恒定载荷試驗中因为方程 (5) 中的 ϵ 随時間增加, 所以应力也随時間增加。因此方程 (8) 中的 σ 必須用 $\sigma_0(1+\epsilon)$ 代替。同样, 破坏前的大变形使得必須用自然应变代替工程应变 ϵ 。自然应变

$$\epsilon_n = \log(1+\epsilon) \quad (9)$$

式中的 $\log$ 是自然对数。这样, 方程 (8) 变成

$$(d/dt)[\log(1+\epsilon)] = f[\sigma_0(1+\epsilon)] \quad (10)$$

这一蠕变定律的正确性不只在于它的邏輯性, 而且在于它和安德雷德的观察相符合^(1,3)。

由方程 (10) 可以得到一个在恒定载荷下决定临界時間的簡單图解法。如果, 为簡單計, 列入符号

$$R = (1+\epsilon) \quad (11)$$

則微分方程可写为

$$(d/dt)(\log R) = f(\sigma_0 R) \quad (12)$$

把变数分开:

$$dt = \frac{d(\log R)}{f(\sigma_0 R)} \quad (13)$$

在試驗开始时 $\epsilon=0$ 所以 $R=1$; 在試驗結束时

$$R_{cr} = 1 + \epsilon_{cr} = \sigma_u/\sigma_0 \quad (14)$$

因此, 临界時間

$$t_{cr} = \int_1^{\sigma_u/\sigma_0} \frac{d(\log R)}{f(\sigma_0 R)} \quad (15)$$

由于蠕变規律的非綫性关系, 开始时变形很慢, 但是一旦被察觉到时, 变形发展得已經很快了。由于这个原因, 方程 (15) 常改为

$$t_{cr} \approx \int_1^{\infty} \frac{d(\log R)}{f(\sigma_0 R)} \quad (16)$$

而不致丧失其精确性。因为

$$d(\log \sigma) = d\sigma/\sigma = d(\sigma_0 R)/\sigma_0 R = d(\log R) \quad (17)$$

方程 (16) 可以写成

$$t_{cr} \approx \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d(\log \sigma)}{f(\sigma)} = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d(\log \sigma)}{\dot{\epsilon}} \quad (18)$$

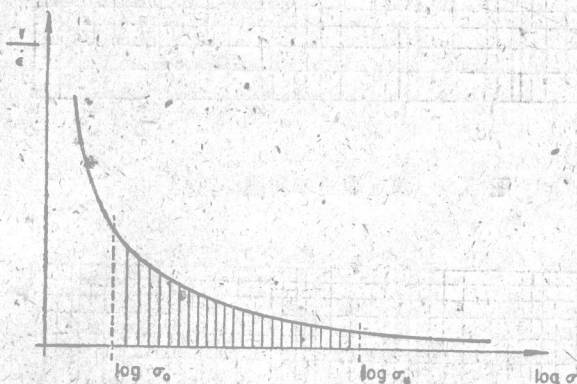


图 1 决定蠕变破坏时间的图解

在图 1 中把试验得出的稳定蠕变率的倒数对应于它被测量时的应力的对数绘出。这条曲线下面，在座标 $\log \sigma_0$ 和 $\log \sigma_r$ 之间的面积就是临界时间，此处 σ_r 是在试验温度时材料的极限应力。通常此面积和在曲线下面由 $\log \sigma_0$ 到无穷大间的面积相差不大。

B. 和试验的比较

在图 2 到 5 中比较了试验和图解数字积分的结果。实线表示试验得出的稳定蠕变率和蠕变破坏时间，而虚线则为根据方程 (18) 用图解数字积分的方法算出的临界时间。对于纯铝 (图 2 和 3)，理论和实验是十分一致的，但是对于 75S-T6 铝合金，理论和实验的差别很大 (图 4 和 5)。

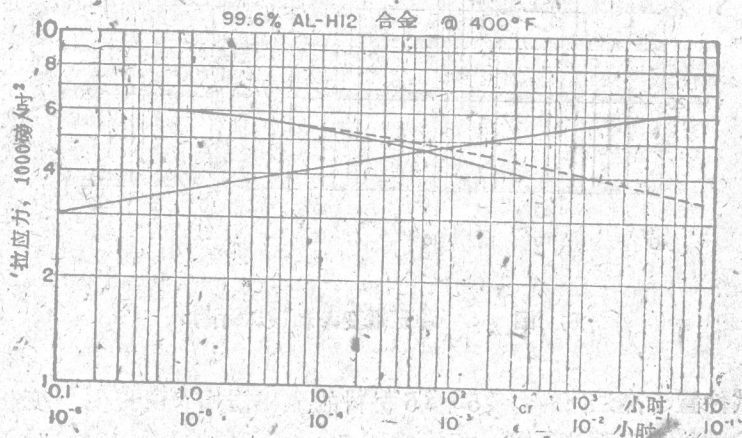


图 2 稳定蠕变率和破坏时间

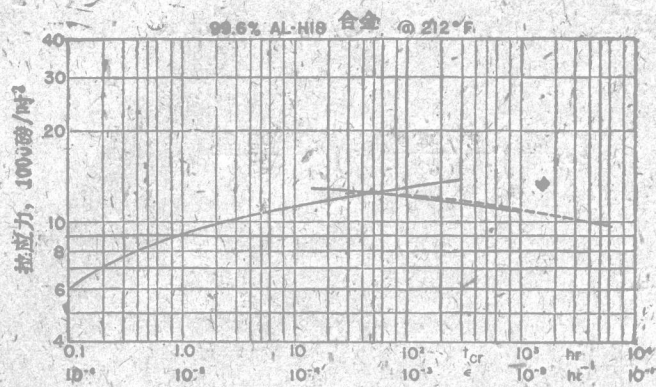


图 3 稳定蠕变率和破坏时间

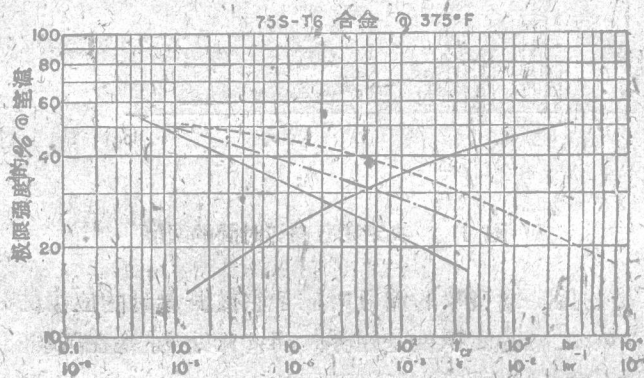


图 4 稳定蠕变率和破坏时间

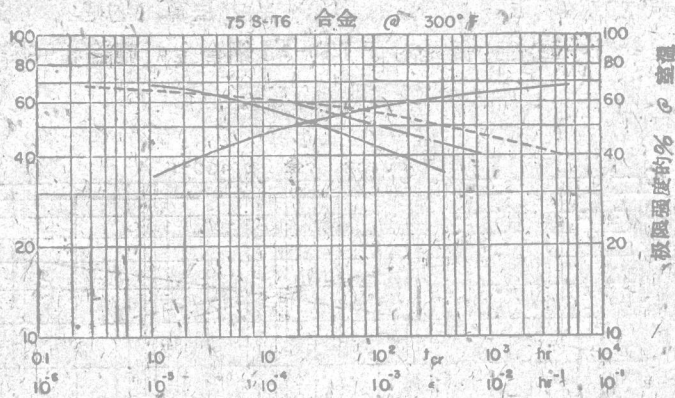


图 5 稳定蠕变率和破坏时间

当然，当把试件置于高温下时，75S-T6 材料的金相结构有所变化。变化之一是随着在高温下放置的时间的增加静抗张强度下降。根据文献 5，在高温下放置 10^4 小时以后的极限强度值，只有放置 $1/2$ 小时以后测出的强度值的三分之一。

应用逐步近似过程可以进一步提高准确性。方法是首先假定一个极限应力，由 σ_0 到 σ_u 积分得出临界时间；然后根据试验值对应于 t_{cr} 假定一个修正的 σ_u 值。继续运用这一方法直到得出一组一致的值来，这个结果比之一开始得出的临界时间和试验的一致性大大增加。改进的理论值在图上以点划线表示出。这些线和试验曲线还是有所差别的，但是由于缺乏这方面知识，不可能把持续加热对材料蠕变特性的影响充分地考虑到。

前两个图的数据取自谢比 (Sherby) 和多恩 (Dorn) 的论文，而后两个图的试验曲线取自报告 ANC-5⁽⁵⁾。

C. 各种蠕变定律的应用

1. 幂定律。当蠕变规律为

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma) = (\sigma/\lambda)^n \quad (19)$$

时，以 $\sigma = \sigma_0 R$ 代入得

$$f(\sigma) = f(\sigma_0 R) = (\sigma_0 R/\lambda)^n \quad (20)$$

而方程 (16) 可以写成

$$t_{cr} \approx \int_1^{\infty} \frac{dR}{R f(\sigma_0 R)} = \int_1^{\infty} \frac{dR}{(\sigma_0/\lambda)^n R^{n+1}} \quad (21)$$

积分并代入上下限得

$$t_{cr} \approx \frac{1}{n(\sigma_0/\lambda)^n} = 1/(n\dot{\epsilon}_0) \quad (22)$$

式中 $\dot{\epsilon}_0$ 为名义应变率，即由方程 (19) 以名义应力 $\sigma_0 = P/A_0$ 代入所得到的应变率。这一极简单的公式是在文献 2 中推出的。

在某些情况下，必须区分开 R 的真正上限，即 σ_u/σ_0 和无穷大。用真正上限时，临界时间变为

$$t_{cr} = -\frac{1}{n\dot{\epsilon}_0} \left[1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_u} \right)^n \right] = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\dot{\epsilon}_0} - \frac{1}{\dot{\epsilon}_u} \right] \quad (23)$$

式中 $\dot{\epsilon}_u$ 为由方程 (19) 以 σ_u 代 σ 得出的蠕变率。

由方程 (22) 得

$$t_{cr}\dot{\epsilon}_0 \approx 1/n \quad (24)$$

虽然方程 (24) 于 1953 年已经在文献 2 中得到证明，但是在某些资料（如文献 6、7 和 8）中仍然把

$$t_{cr}\dot{\epsilon}_0 = C = \text{常数} \quad (25)$$

视为经验定律。如果说方程 (22) 到 (24) 只是对于幂定律推出的，那么即使在幂定律不成立时方程 (25) 也可以看作是接近真实的。由于蠕变率和临界时间沿横轴都是以对数格表示的，而对应的应力沿座标轴既可按卡尔蒂逊，也可按对数格测量，方程 (25) 实际上说明应变率和临界时间曲线对于横座标为 $\left(\frac{1}{2}\right) \log C$ 的垂直线是对称的。这可以由方程 (25) 直接取对数看出，

$$\log t_{cr} + \log \dot{\epsilon}_0 = \log C \quad (26)$$

当蠕变的幂定律和方程 (24) 成立时，这两条曲线是直线。

作以下的证明是饶有兴趣的。如果在本节的推导中所做的物理假设保持不变，而且取无穷大

为积分上限, 那么只有可以导出方程 (25) 的稳定蠕变律才是真正的幂定律。方程 (18) 可以变成

$$t_{cr} = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d(\log \sigma)}{f(\sigma)} = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma f(\sigma)} \quad (27)$$

这是对应于名义应力 σ_0 的临界时间。在此应力下应变率为 $\dot{\epsilon}_0 = f(\sigma)$ 。因此, 乘积保持常数的条件可以表示为

$$f(\sigma_0) \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma f(\sigma)} = K = \text{常数} \quad (28)$$

也可以写成

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma f(\sigma)} = \frac{K}{f(\sigma_0)} \quad (29)$$

变化定积分下限可得

$$\frac{-d\sigma_0}{\sigma_0 f(\sigma_0)} = \frac{-K f'(\sigma_0) d\sigma_0}{[f(\sigma_0)]^2} \quad (30)$$

式中 $f'(\sigma_0)$ 表示对 σ_0 微分。经过简化后变为

$$y' - (1/Kx)y = 0 \quad (31)$$

式中采用如下的符号:

$$x = \sigma_0, \quad y = f(\sigma_0) = f(x) \quad (32)$$

在方程 (31) 中变数是可分离的:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{K} \frac{dx}{x} \quad (33)$$

积分得

$$y = Cx^{1/K} \quad (34)$$

它即幂定律。

2. 指数定律。当蠕变应变率服从指数定律

$$\dot{\epsilon} = k e^{\sigma/s} = f(\sigma) \quad (35)$$

时 (式中 k 和 s 是由试验定出的常数), 以此式代入方程 (27) 得

$$t_{cr} = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{e^{-\sigma/s} d\sigma}{k\sigma} = \frac{1}{k} \int_{\sigma_0/s}^{\infty} \frac{e^{-\sigma/s} d(\sigma/s)}{\sigma/s} \quad (36)$$

不定积分可用分部积分法算出:

$$I = \int e^{-y} y^{-1} dy = -e^{-y} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y^3} - \frac{6}{y^4} + \dots \right] \quad (37)$$

括号中的级数是一个渐近的级数。如果略去第 n 项以后的各项, 可能的最大误差即为第 $(n+1)$ 项的值⁽⁹⁾。于是临界时间的近似值为

$$t_{cr} \approx \exp(-\sigma_0/s) (s/\sigma_0 k) [1 - (s/\sigma_0) + 2(s/\sigma_0)^2 - 6(s/\sigma_0)^3 + \dots] \quad (38)$$

更精确一些的值:

$$t_{cr} = \exp(-\sigma_0/s)(s/\sigma_0 k) [1 - (s/\sigma_0) + 2(s/\sigma_0)^2 - 6(s/\sigma_0)^3 + \dots] - \exp(-\sigma_u/s)(s/\sigma_u k) [1 - (s/\sigma_u) + 2(s/\sigma_u)^2 - 6(s/\sigma_u)^3 + \dots] \quad (39)$$

式中 σ_u 是在試驗温度下材料的极限拉伸应力。

由于一般在航空上应用的 σ_0/s 的值都在 2 到 20 这一范围内, 而 σ_u/s 通常又为 σ_0/s 的 2 到 10 倍, 所以由下式算出的结果一般能够有较高的准确性, 即

$$t_{cr} \approx (1/k) \exp(-\sigma_0/s)(s/\sigma_0) = s/\sigma_0 \dot{\epsilon}_0 \quad (40)$$

当用此公式时误差的百分数不会大于 $100(s/\sigma_0)$ 。

稍微更精确一些的表达式为

$$t_{cr} = s \left[\frac{1}{\sigma_0 \dot{\epsilon}_0} - \frac{1}{\sigma_u \dot{\epsilon}_u} \right] \quad (41)$$

当 σ_0/s 比较小, 例如, 小于 3, 上面的近似计算会很不准确或很不适宜。这时可以运用指数积分

$$-Ei(-x) = \int_x^\infty e^{-y} y^{-1} dy \quad (42)$$

的表格。这个函数已经表格化了, 如文献 10 第 6 页。代入方程 (36) 可得

$$t_{cr} \approx (1/k) [Ei(-\sigma_0/s)] \quad (43)$$

如用较准确的上限时则为

$$t_{cr} = -(1/k) [Ei(-\sigma_0/s) - Ei(-\sigma_u/s)] \quad (44)$$

3. 初蠕变定律。当恒定应力蠕变试验的结果可以用初蠕变定律

$$\epsilon = g(\sigma) t^{1/m} \quad (45)$$

表示时, 由力学物态方程存在的假设推出以下的表达式:

$$\dot{\epsilon} = (1/m) [g(\sigma)]^m \epsilon^{1-m} \quad (46)$$

这一表达式对于变应力也可适用⁽³⁾。如果以 $\log R$ 代替 ϵ 和以 $\sigma_0 R$ 代替 σ 而使这一规律进一步普遍化, 从而在大变形下也成立, 则得:

$$(d/dt) \log R = (1/R)(dR/dt) = (1/m) [g(\sigma_0 R)]^m (\log R)^{1-m} \quad (47)$$

如果假设函数

$$g(\sigma) = (\sigma/\lambda)^n \quad (48)$$

并分开方程 (47) 中的变数, 可得

$$dt = m(\lambda/\sigma_0)^{mn} (1/R)^{mn+1} (\log R)^{m-1} dR \quad (49)$$

以

$$R = e^x \quad (50)$$

代入, 上述方程变为

$$dt = m(\lambda/\sigma_0)^{mn} e^{-mnx} x^{m-1} dx \quad (51)$$

于是, 临界时间

$$t_{cr} = m(\lambda/\sigma_0)^{mn} \int_0^{\log(\sigma_u/\sigma_0)} x^{m-1} e^{-mnx} dx \quad (52)$$

当 p 为正整数时, 不定积分

$$\int x^p e^{-ax} dx = -e^{-ax} \left[\frac{x^p}{a} + \frac{px^{p-1}}{a^2} + \frac{p(p-1)x^{p-2}}{a^3} + \dots + \frac{p!}{a^{p+1}} \right] \quad (53)$$

如果在计算临界时间时应用这一表达式, 在下限中只保留括号中的最后一项。而且, 在只要求近似值时, 上限可以去掉而代以无穷大。在这些条件下方程 (52) 变为

$$t_{cr} \approx [m! / (mn)^m] (\lambda / \sigma_0)^{mn} \quad (54)$$

式中的惊叹号表示阶乘函数。对于特殊的 m 值, 表达式简化为

$$t_{cr} \approx (1/n) (\lambda / \sigma_0)^n \quad \text{当 } m=1 \quad (55a)$$

$$t_{cr} \approx (1/2) (1/n)^2 (\lambda / \sigma_0)^{2n} \quad \text{当 } m=2 \quad (55b)$$

$$t_{cr} \approx (2/9) (1/n)^3 (\lambda / \sigma_0)^{3n} \quad \text{当 } m=3 \quad (55c)$$

$$t_{cr} \approx (3/32) (1/n)^4 (\lambda / \sigma_0)^{4n} \quad \text{当 } m=4 \quad (55d)$$

当 m 不是整数时, 以

$$mnx = s \quad (56)$$

代入, 使方程 (52) 变为

$$t_{cr} = [m / (mn)^m] (\lambda / \sigma_0)^{mn} \int_0^{mn \log(\sigma_u / \sigma_0)} e^{-s} s^{m-1} ds \quad (57)$$

对于近似状态上限取为无穷大时, 方程化简为

$$t_{cr} = [m / (mn)^m] (\lambda / \sigma_0)^{mn} \Gamma(m) \quad (58)$$

式中 $\Gamma(m)$ 为 Γ 函数, 在文献 10 中已列为表格。

对于精确的上限

$$t_{cr} = [m / (mn)^m] (\lambda / \sigma_0)^{mn} \{ \Gamma(m) - \Gamma[m, mn \log(\sigma_u / \sigma_0)] \} \quad (59)$$

$$\text{式中 } \Gamma[m, mn \log(\sigma_u / \sigma_0)] = \int_{mn \log(\sigma_u / \sigma_0)}^{\infty} e^{-s} s^{m-1} ds \quad (60)$$

为不完全 Γ 函数。

3. 蠕变破坏

A. 破坏过程

和一个承受拉力的杆件当它的材料产生蠕变而在一定时间后破坏一样, 承受压载荷 P 的柱子在有蠕变存在时, 在一定时间后也会损坏, 不管 P 怎样小。柱子的这一形式即称为蠕变破坏。虽然只是在 12 年前才在技术文献中第一次谈到蠕变破坏, 但是已经提出了很多不同的方法来解释这一现象。在最近出版的本文作者的一份报告⁽¹¹⁾ 中详细评述了这些方法并比较全面地阐述了这个問題。因此有关蠕变破坏理论的历史文献此处不再重复了, 这一节的目的在于提出一个分析蠕变破坏的特殊方法。作者认为这一方法和在高温下进行金属柱的蠕变破坏试验的观测结果最为符合。这一方法是作者和 B. 伏拉耶斯 (B. Fraeijs de Veubeke)⁽¹²⁾ 合作得出的。

每一根柱子都有缺陷是很自然的。因为制造过程和在被试验机上按放位置不精确, 所以它的中心线偏离压载荷的作用直线。力和偏移距离的乘积即为弯曲力矩, 在弯矩作用下由于蠕变的结果

使柱的初曲度随时间增加。如果柱的加工和在试验机上按放的很准确，并且施加的载荷远小于欧拉载荷，在开始时曲率的增加很慢。在一定时间以后，侧向挠曲的速度增加，而当侧向挠曲达到一临界值时柱即十分突然地破坏。

B. 挠曲柱的弯曲刚度

如果研究了柱的弯曲刚度随着挠曲增加的变化情况，就可以理解在临界挠曲时突然破坏的理由。为了简化分析，假定柱的截面是由两个集中的线条组成，面积各为 $A/2$ ，相距为 h ，中间由一不能抵抗正应力，但剪切时完全刚硬的腹板隔开。对于 I 形截面这一假设非常接近真实情况，甚至在某些情况下也适用于实心的矩形截面。

图 6 是材料的应力应变曲线，它表明在破坏瞬间材料的情况和蠕变破坏试验开始时的情况有很大的不同。材料特性的变化主要是由于暴露于高温下，而蠕变变形的效应一般是可以忽略的，因为在航空结构中刚刚在破坏前的最大应变通常和欧拉应变

$$\epsilon_E = \pi^2 / (L/\rho)^2 \quad (61)$$

同为一级。式中 L 为两端铰接柱的长度， ρ 为截面的迴转半径。如果细长比 L/ρ 为 50，欧拉应变大约是 0.4%。这样小的蠕变应变对于材料受载瞬时反应的影响不予考虑也是很安全的。

在加载的瞬间，如果初曲度很小，对于所有实际情况而言两个线条的应力是一样的。此应力为：

$$\sigma_0 = P/A \quad (62)$$

由于蠕变的结果曲度增加，在凹进一面的线条的应力 σ_1 增加，而在凸起一面的线条的应力 σ_2 减小。过了一段时间后， σ_1 和 σ_2 将为如图 6 所示的值； σ_1 的增加和 σ_2 的减少在绝对值上必须相等，因为载荷 P 是常数。

如果我们希望试验柱的弯曲刚度，可以使侧向挠曲的幅度增加一个微量，并且计算相当的弯矩变化。曲度的增加为

$$(\Delta \epsilon_1 - \Delta \epsilon_2)/h = \Delta \bar{\kappa} \quad (63)$$

式中压缩应变为正。在柱凹进边的压应力增量为

$$\Delta \sigma_1 = E_t \Delta \epsilon_1 \quad (64)$$

式中切线模数 E_t 是应力应变曲线在点 C 处的切线斜率。在凸起边的线条应力的变化为

$$\Delta \sigma_2 = E \Delta \epsilon_2 \quad (65)$$

$\Delta \sigma_2$ 为一负量，因为负的 $\Delta \epsilon_2$ 表明压缩应变的减小。在此方程中 E 为杨氏模数，只有当应力减小到在变形的弹性范围内时才可以用。由于平衡的理由

$$(\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2)(A/2) = \Delta P = 0 \quad (66)$$

因此弯矩的增加为

$$\Delta M = \Delta \sigma_1 (A/2) h = -\Delta \sigma_2 (A/2) h \quad (67)$$

根据定义，有效弯曲刚度 $(EI)_{eff}$ 是弯矩的增量被曲度的增量除：

$$(EI)_{eff} = \frac{\Delta \sigma_1 (A/2) h}{(\Delta \epsilon_1 - \Delta \epsilon_2)/h} \quad (68)$$

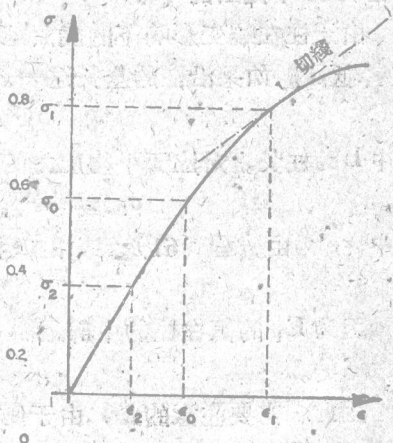


图 6 材料的应力应变图

代入可得

$$(EI)_{eff} = E_{eff} I = \frac{2EE_t}{E+E_t} \frac{Ah^2}{4} \quad (69)$$

式中 I 为理想的 I 形截面的惯性矩。

如果在加载瞬间的应力原始值 σ_0 小于材料的弹性极限，柱的原始弯曲刚度为

$$(EI)_0 = E(Ah^2/4) \quad (70)$$

在方程 (69) 中如以 E 代 E_t ，也可得同样的结果。如果应力的原始值超过弹性极限，方程 (69) 中的 E_t 必须由对应于 σ_0 的切线斜率决定。在破坏计算中应用这样得出的有效弯曲刚度是馮·卡門在 1910 年提出的⁽¹⁸⁾。

由于柱在蠕变影响下的挠曲越来越大，它的瞬时弯曲刚度也在减小，因为方程 (69) 中的 E_t 降低了。如果沿柱的全长这一数值不变。破坏载荷将为

$$P_{cr} = \pi^2 (EI)_{eff} / L^2 \quad (71)$$

式中 L 为柱长。对应于平均应力的临界值将为

$$\sigma_{0,cr} = P_{cr} / A = \pi^2 E_{eff} / (L/\rho)^2 = \epsilon_E E_{eff} \quad (72)$$

式中 ϵ_E 为由方程 (61) 定出的欧拉应变， ρ 为截面的迴转半径：

$$\rho = h/2 \quad (73)$$

因为 E_t 的值在柱的中部最小（那里的曲度和应力最高），所以方程 (71) 算出的临界载荷是保守的。

因此，需要注意的是，由于侧向挠曲幅度增加，平均应力的临界值 $\sigma_{0,cr}$ 减小，而此时平均应力 $\sigma_0 = P/A$ 保持不变。当挠度达到临界值时 $\sigma_{0,cr} = \sigma_0$ ，于是柱突然破坏。

C. 临界挠度的计算

侧向挠曲幅度的临界值只取决于应力应变曲线、柱的细长比、外加载荷 P 的值（或应力 $\sigma_0 = P/A$ ）和柱的挠曲形态，而和材料的蠕变特性无关。我们可以在以下假设的基础上进行计算，即初曲度和挠曲形态都可以用半正弦波近似地代替。在很多实际飞机结构中证明这样是允许的。何况变形和平衡条件只在柱的中部成立。应用富氏级数的更一般的分析是可能的，但是太复杂。在所有这些情况下进行一些比较很有用，所谓一点重合法和用更严密的分析得出的结果差别并不大⁽¹⁴⁾。

如果柱中点的挠度为 $a\rho$ （ a 是无因次的挠曲幅度），则凹进边缘处的应力

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} + \frac{M}{(A/2)h} = \frac{P}{A} + \frac{Pa\rho}{A(h/2)} = \sigma_0(1+a) \quad (74)$$

因此对于应力 σ_0 的给定值无因次挠曲幅度的临界值为

$$a_{cr} = (\sigma_1/\sigma_0) - 1 \quad (75)$$

与此同时还必须满足破坏条件

$$\sigma_0 = \epsilon_E E_{eff} \quad (76)$$

式中 E_{eff} 为 σ_1 的单值函数。

如果应力应变曲线已知，用以下的方法可以较快的得出应力 σ_0 和临界无因次挠曲幅度 a_{cr} 间的关系：

(1) 假定一个 σ_0 的值。

(2) 由应力应变曲线定出对应的 E_t 。

(3) 用方程 (69) 計算 E_{eff} 。

(4) 写出在我們研究的整个应力范围内的 σ_1 和 E_{eff} 間的关系。

(5) 由方程 (61) 按柱的已知几何形状計算 ϵ_E 。

(6) 在方程 (76) 中代入 ϵ_E 和一个选定的 E_{eff} 值以求出平均应力 σ_0 。

(7) 在方程 (75) 中代入此 σ_0 值和对应于选定的 E_{eff} 值的 σ_1 值以求出 a_{cr} 。

(8) 繪出这些 a_{cr} 值对于 (7) * 中 σ_0 值的曲线；这一曲线即为所要求的对于某一給定的几何形状和材料特性 a_{cr} 对 σ_0 的关系。

D. 兰伯尔-奥斯古德关系的应用

在室温下材料的应力应变曲线通常可以用下式近似地表达⁽¹⁵⁾；

$$\epsilon = (\sigma/E) + (\sigma/B)^p \quad (77)$$

可以假定在高温下这也是一个足够精确的近似值。于是切线模数值为

$$E_t = d\sigma/d\epsilon = 1/(d\epsilon/d\sigma) = [(1/E) + (p/B)(\sigma_1/B)^{p-1}]^{-1} \quad (78)$$

σ 下的脚注 1 指明 E_t 必須按照凹进边缘条的压应力值計算。由方程 (69) 有效模数为：

$$E_{eff} \approx E[1 + (p/2)(E/B)(\sigma_1/B)^{p-1}]^{-1} \quad (79)$$

由方程 (76) 可得

$$\sigma_0 = \sigma_E [1 + (p/2)(E/B)(\sigma_1/B)^{p-1}]^{-1} \quad (80)$$

借助这一表达式把方程 (75) 变为

$$a_{cr} = (1/\sigma_E) [\sigma_1 + (p/2)E(\sigma_1/B)^p] - 1 \quad (81)$$

但是方程 (75) 同样可以对 σ_0 求解而得出

$$\sigma_0 = \sigma_1 / (1 + a_{cr}) \quad (82)$$

当柱的几何形状和材料的应力应变曲线給定时， E 、 p 、 B 和 σ_E 均为已知。将一选定的 σ_1 值代入方程 (81) 求出 a_{cr} 。再將此值代入方程 (82) 即得到对应的 σ_0 值。

E. 临界时间的計算

当无因次挠曲幅度的临界值和它的原始值一样为已知时，如果对于材料的蠕变性能有足够的資料，可以很容易地求出临界时间。命 a_0 表示在加载前对直线偏移的原始无因次幅度；在文献 11 中已經証明了对于目前的应用以半正弦波代表偏移沿軸线的分布是有足够精确的。加上载荷 P 以后这一幅度立即产生一增量，增加的值 a_0 可以由下列公式算出

$$a_0 = a_{00} / [1 - (P/P_E)] \quad (83)$$

式中 P_E 是柱的欧拉载荷。当应力超过材料的弹性极限时，还有一附加的瞬間塑性变形。这种变形的大小在文献 16 和 17 中进行了計算。

当载荷加上后蠕变过程立即开始。例如，在文献 18 中証明了 a 的变化率可由公式

$$\dot{a} = (1/2\epsilon_E)(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \quad (84)$$

得出。于是临界时间为

$$t_{cr} = 2\epsilon_E \int_{a_0}^{a_{cr}} da / (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \quad (85)$$

当蠕变規律为

$$\dot{\epsilon} = (\sigma/\lambda)^n \quad (86)$$

* 此处应为 (75) ——譯者。

时, 方程 (85) 变为

$$t_{cr} = \frac{2\epsilon_E}{\epsilon_0} \int_{a_0}^{a_{cr}} \frac{da}{(1+a)^n - (1-a)^n} \quad (87)$$

F. 实例

上述的理论可以用一个计算柱的临界时间的数值实例加以证明。瞬时载荷的应力应变曲线在图 7 中给出。它取自文献 17, 并表示出 2024-T4 铝合金在 500°F 时的性能。按照兰伯尔-奥斯古德的近似方法, 这个曲线可以由以下的公式近似地表达

$$\epsilon = (\sigma/E) + (\sigma/57,800)^{20} \quad (88)$$

因为已经用细长比为 52.7 的柱做过了文献 17 中所叙述的试验, 这里边取这个数值。

当截面积

$$A = \frac{1}{8} \text{ 吋}^2 \quad (89)$$

并且由图 7 定出的模数值

$$E = 8.55 \times 10^6 \text{ 磅/吋}^2 \quad (90)$$

图 7 2024-T4 铝合金在 500°F 时的应力应变曲线 (摘自文献 17)

时, 可以算出以下的量:

$$\epsilon_E = 0.00356 \quad \sigma_E = 30,400 \text{ 磅/吋}^2 \quad P_E = 3800 \text{ 磅} \quad (91)$$

利用这些值可以由方程 (81) 和 (82) 算出外载荷 P 和临界无因次挠曲幅度 a_{cr} 间的关系。结果绘在图 8 中, 这些结果和在文献 17 中以图解数字方法所得到的结果非常一致。

应该注意到 a_{cr} 小于 2, 这意味着如果载荷超过瞬时破坏载荷的 43.5%, 破坏将发生在最大侧向挠度达到理想化截面高度 h 的一半以前。这样高的百分数在飞机和导弹结构试验中是很普通的, 而在静力拉伸机上的试验百分数一般较低。

下一步是研究材料的蠕变性能。足够精确地以幂函数形式的定常蠕变规律来表达蠕变曲线是不太可能的。虽然如此, 公式

$$\dot{\epsilon} = (\sigma/248,000)^4 \quad (92)$$

仍然用于分析中, 因为它可以提供近似解。在方程 (87) 中以 $n=4$ 代入后积分结果为

$$t_{cr} = \frac{1}{8} \frac{\epsilon_E}{\epsilon_0} \log \frac{1+(1/a_0)^2}{1+(1/a_{cr})^2} \quad (93)$$

这个方程式首先用于计算起始偏移变化的影响。假定 a_0 的值并且代入方程 (83) 以得到 a_0 , 然后再代入方程 (93) 以求出 t_{cr} 。载荷假定为 1600 磅。结果如图 9 中虚线所示。

最后研究外载荷变化的影响。对于每一个载荷值把对应的 ϵ_0 和 a_{cr} 值代入方程 (93)。这时 a_0 为 0.1。这样得出的结果如图 9 中实线所示。

关于图 9 有几点值得说明。首先载荷对于临界时间的决定效果是很明显的。载荷如果变化 1.33 倍寿命会变化 3.5 倍。但是寿命如果变化 2.8 倍所要求的初偏移幅度的变化为 6.66 倍。

图中的圆圈是对应于实线的试验数据点。在 $P=1500$ 磅时理论和试验很一致, 但在高载荷下试验得到的寿命仅为理论值的一半左右。这种相差在蠕变问题的研究中并不认为是很不一致的

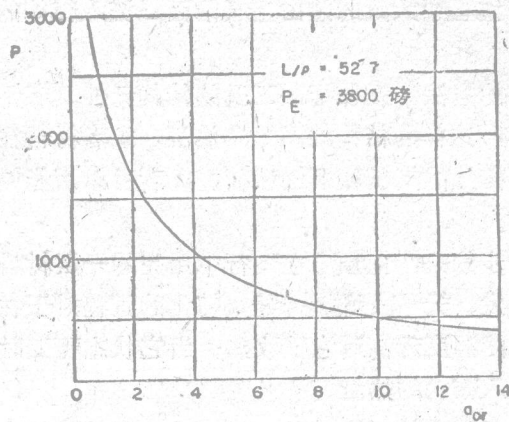


图 8 作为外载荷的函数的临界无量纲挠度

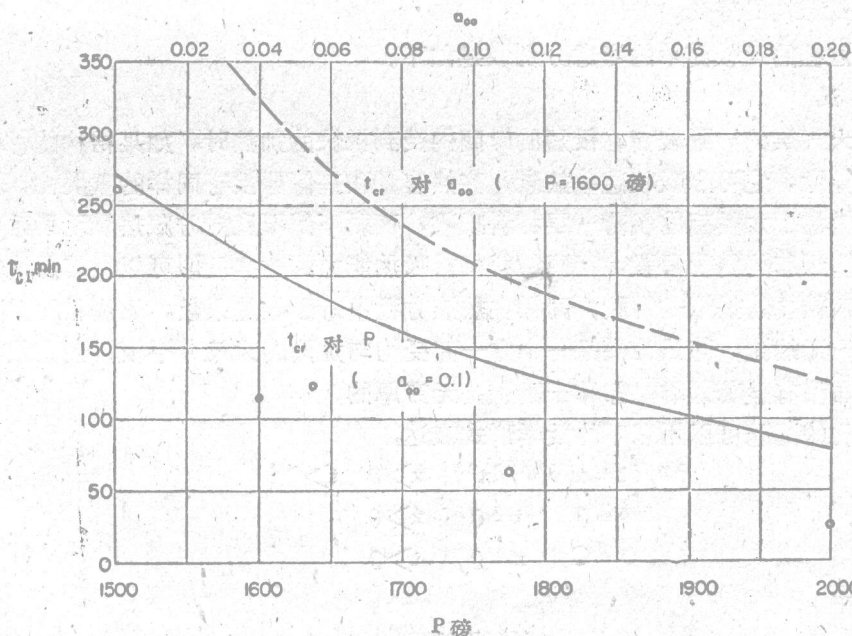


图 9 柱的临界时间

事，試驗結果的分散性往往是很大的。但是当然在现在的分析中不可能期望有很大的精确性，因为方程(92)的经验公式和試驗数据相差很多。还应该注意如果计算是基于对某一给定的寿命求允许载荷值，那么理论和試驗偏差的百分数要更小一些。例如，按照曲线当载荷为1825磅时可以达到120小时的寿命，而按照試驗点同样的寿命只有在1625磅时才能达到。

4. 热沉和消融

A. 問題的提出

在再进入大气层的运载工具上可以看到和經典的设计方法最基本的差别。再进入大气层的运载工具包括：在少数情况下头锥体已经成功地被遮盖起来的导弹；人造卫星的梭形运载工具；准备在地球或其它行星上着陆的宇宙飞船，当然，后者还没有制成。对于这些新型飞行器的主要問