



中西算學大成卷六十四

嘉善陳維祺纂

代數術七

論求實根之法

代數術卷

第一百四十四款

前于一百款中曾言無論何次之式百五十二款

論何次式其各根若為實數者及實數例設為任何次式之最大負

法將式之諸項盡聚于左邊又求其正負號又設為其改號之後所

其原式中之未知數如某約數代之在與正之間而其各負根必在即為原

式之一箇整根

一式設有欲求其整根之數此式以知欲求天之正整同五。一皆可度之而

天

此四可度之數可為正亦可為負則以其或正或負之諸數一一代其原式中

之天

由此可見凡能令原式變為○者其數為1, 2, 5, 所以知此三數必為原式之
三箇整根

第一百四十五款

若可度末項之數甚多不能盡試則以法變其原式使末項之可度數較少此變
式之根比原式之根較大較小能恒等于所設之式

二式設有則末項之數為三可度之數為或正或負之一二四八六三各數因

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

如令

$$x = 1 + t$$

則

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 0$$

如令

$$x = 1 + t^2$$

則

$$t^8 - 4t^6 + 6t^4 - 4t^2 + 1 = 0$$

如令

$$x = 1 + t^3$$

則

$$t^{12} - 4t^9 + 6t^6 - 4t^3 + 1 = 0$$

如令

$$x = 1 + t^5$$

則

$$t^{20} - 4t^{15} + 6t^{10} - 4t^5 + 1 = 0$$

如令

$$x = 1 + t^7$$

則

$$t^{28} - 4t^{21} + 6t^{14} - 4t^7 + 1 = 0$$

其數甚多。故須變其原式。法以_上代其地。則

地^四——天^四——天^六——天^四——
 四地^四——四天^二——二天^二——四
 八地^八——八天^八——
 三二^三——三二^三——

故得六天甲其末項

$$T_{大} - T_{小} = -1 = -100^\circ$$

二之可度數為一、一、三、三、七、七、以此諸數一一代其天而試之。試得一與三之兩數為甲式之兩箇整根。則其餘兩根易知其必為虛式。惟其兩虛式亦易求。

得因

$$\text{天} \left[\begin{array}{c} \text{六} \\ \text{天} \end{array} \right] - \text{六天} = - = 0$$

甲能以 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 兩箇乘數約之。所以能變為二次式

$$\text{天} \mid \text{四天} \mid \text{七} = 0.$$

以常法解之得

兩箇虛根式為

$$\begin{array}{l} \Gamma = \Gamma \\ \Gamma = \Gamma \end{array}$$

惟因

地=天_上.

所以知原式

地[四地]八地[三二]〇。

之四箇根。其式為

地=上
地=四
地=下上
地=下下

若設原式為

$$\text{天}(\text{甲})\text{乙} \text{天}(\text{甲})\text{乙} \text{天}(\text{甲})\text{乙} = 0$$

則依上法求之其根為

$$\begin{aligned} \text{天} &= \text{甲} \\ \text{天} &= \text{甲} \\ \text{天} &= \text{乙} \end{aligned}$$

第一百四十六款

以可度末項之數。屢試而得其根。此事甚繁。茲欲設一省事之法。令其可度之數有一最小之限。設有欲解之式為

$$\text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} = 0$$

則先令

$$\text{地} = \text{天}$$

而變其式。則變式之根。比原式之根減一。而其末

項為

$$\text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} = 0$$

別令

$$\text{地} = \text{天}$$

而變其式。則變式之根。比原式之根加一。而其末項為

$$\text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} = 0$$

則可見兩箇變式之末項。

$$\text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} = 0$$

與

$$\text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} = 0$$

皆從

$$\text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} \text{地}(\text{甲})\text{乙} = 0$$

原式而生。惟天之各同數。必在可度

未之諸數中。而地地之各同數。必在可度。上。下。未。及之諸數中。然未者乃天。一。時所

餘之項也。上。下。未。者乃天。一。所得之數也。上。下。未。者乃天。一。所得之數也。所以地天地之各同

數。必在可度。上。下。未。所得之諸數中。其地天地之諸同數。能相與為遞加遞減

之級數。其公較數恒為一。又因上。下。未。亦俱在級數之列。故易見無論何次之

式。其理必通。所以有公法如左。
求實根之公法曰。取。及其遞加減一數之級數。或三級。或五級。或多級。如一。
一等類之數。一一代其原式中未知數之元。取其所得之數列為表。又取可度
各得數之諸數。亦橫列為表。乃于可度數中。擇其上下皆遞差一數者為級數。
亦齊其行列記于表末。則天之各同數。必在對天。一。之級數橫行中。如其級數為
加級。則其數為正。若為減級。則其數為負。

一式有則依法列表如下。

$\frac{天}{天} = \frac{天}{天} = 1$

代	得	度	級
天=上	上四	一、二、四	四
天=0	上六	一、二、三、六	三
天=下	上四	一、二、七、四	二

此表中之可度數。只能成一箇級數四三。

二而其與相對之數為三。因其級為遞減之級。故其數當為負。試以三代其原式中之天。則各項之數。能相消適盡。故知天必為其原式之一箇根。

若欲求其餘各根。則將原式以三約之。又將其約得之式。依二次之常法

$\frac{天}{天} = \frac{天}{天} = 1$

$\frac{天}{天} = \frac{天}{天} = 1$

解之。則又得兩根。即正負三。

	級
0	一、二、五、七
-二	二、三、四、六
-0	三、四、三、五
二	四、五、二、四
-五	五、六、一、三

二式有則依法列表如下。

天_三天_二天_九天_九天_一八〇〇〇〇

代	得	度									
二	七〇	一	二	五	七	一	〇	一	四	三	五
一	一四四	一	二	三	四	六	八	六	九	九	九
〇	一八〇	一	二	三	四	五	六	八	一〇	一六	一六
一	一六〇	一	二	四	五	八	一〇	一六	九	一〇	一〇
二	九〇	一	二	三	五	六	九	一〇	一六	一六	一〇

則所得之四箇級數兩為加兩為減。

其對○代天之四數當為三三四五以此四數一一代其原式中之天而試之則知此四數皆可為原式之根。

第一百四十七款

若所設之各次式其倍數有為分數者則依一百十二款之法變之為他式令首項之倍數為一其餘各項俱為整數而後用前款之法求其變式之實根則原式之根易知。

設有式如欲求其實根則先依一百十二款之法令變其式如左。

天_三天_二天_九天_九天_一六二〇

天_二地_四

$$\frac{\frac{1}{6} \text{天}}{\frac{1}{3} \text{地}} = \frac{\frac{1}{6} \text{天}}{\frac{1}{3} \text{地}} = \frac{1}{2} \text{天} = \frac{1}{2} \text{地}$$

化之得 以此式用前數之法求之則得其一根為 $\frac{1}{2}$ 所以 $\frac{1}{2}$ 乃以 $\frac{1}{2}$

約原式得 $\frac{1}{2}$ 此二次之式其根為虛式

第一百四十八款

設有各次式其首項之倍數為一其各項之倍數俱為整數而其各根不能在可度末項之諸數中求得則可知此式無論為正方為雜方其根必不能以整數及整數之分數明之此例可以下法為證如吧為數根而可度吧吧兩數相乘之積則吧亦必能度吧吧二數中之任一數設吧不能度吧而吧大于吧則令午

代吧度吧之次數而以吧為其度餘之數則得 $\frac{1}{2}$ 所以 $\frac{1}{2}$ 故可見吧若可

$$\frac{1}{2} \text{天} = \frac{1}{2} \text{地}$$

度甲乙亦必可度甲乙因乙為甲度乙之餘數則乙必小於甲所以不能再以甲度乙則轉令乙度甲令其度得之次為甲而其度餘之數為乙再以乙度甲令其度得之次為甲而其度餘之數為乙如是屢度之則因甲為數根故可知其末次之度餘數必為一因其各分數為每次度餘之數所以每次度得之數必後次少於前次其式如左

惟因

$$\begin{aligned} \text{甲} &= \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}} \\ \text{乙} &= \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} \text{甲} &= \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}} \\ \text{乙} &= \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

所以得

$$\text{甲} = \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}}$$

又

$$\frac{\text{甲}}{\text{甲}} = \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}} = \frac{\text{甲}}{\text{甲}}$$

惟甲乙若能以甲度之

則早已言甲乙與甲乙能以甲度之所以從上之末式可見甲乙亦必能以甲度之

再從以上各式得

$$\text{甲} = \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}}$$

所以

$$\text{甲} = \frac{\text{甲}}{\text{甲}} \cdot \frac{\text{乙}}{\text{乙}}$$

由此可知甲乙亦能以甲度之如是推之必見

必能以 $\sqrt[n]{a}$ 度之。此可為上例之證。

第一百四十九款

依上款之例。若數根 $\sqrt[n]{a}$ 本不能度 $\sqrt[m]{b}$ 。亦不能度 $\sqrt[k]{c}$ 者。則亦不能度 $\sqrt[mk]{bc}$ 。相乘之 $\sqrt[n]{a}$ 。設 $\sqrt[n]{a}$ 為再不能簡之分數。則 $\sqrt[n]{a}$ 之 $\sqrt[mk]{bc}$ 。不能有公約數。惟由上款之例。若有任何數根。非能為 $\sqrt[n]{a}$ 之約數。則亦不能為 $\sqrt[mk]{bc}$ 。即 $\sqrt[mk]{bc}$ 之約數。故可見 $\sqrt[n]{a}$ 與 $\sqrt[mk]{bc}$ 無公約數。則 $\sqrt[n]{a}$ 為再不能約之分數。

所以凡分數之平方。必仍為分數。斷不能為整數。反言之。則平方數之根。亦斷不能為分數。所以凡整數。若非平方數。則其根不能以整數及分數明之。

因有任何數根。若非 $\sqrt[n]{a}$ 之約數。則亦非 $\sqrt[mk]{bc}$ 之約數。則亦必不能為 $\sqrt[mk]{bc}$ 。即 $\sqrt[mk]{bc}$ 之約數。則依此例。凡任何數根。非 $\sqrt[n]{a}$ 之約數。則亦不能為 $\sqrt[mk]{bc}$ 之約數。凡任何數根。非 $\sqrt[n]{a}$ 之約數。則亦不能為 $\sqrt[mk]{bc}$ 之約數。所以 $\sqrt[n]{a}$ 若為不能再簡之分數。則 $\sqrt[n]{a}$ 亦為不能再簡之分數。所以任何分數之任何方。亦為分數。反言之。則任何整數之任何根。亦不能為分數。所以任何整數之根。不能以整數及分數明之者。必為虛數。即無盡之數。

代數術卷
十六原款
下同

有總項其一項能以乙約之惟初設此題之意甲與乙無公約數所以依一百四十九款之例乙不能約甲則可見此式中之兩項彼此不能以當然之理相減所以其天之同數斷不能為分數

論求畧近之根數
第一百五十一款

若任何次式之根不能以實數整數及明之者必用法求其與根畧近之任多位數如下二例

一例 以幾箇或整或分之實數遞代原式中之天至得式之號相反則可知其原式之中至少必有一箇根在此二數之間所以亦必為實根

如有式 $x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 5 = 0$ 若將其正負項各聚于一邊則其式為 $x^5 - 5x^4 = 5x^3 - 5x^2 + 5x - 5$ 若欲求其一根必先求一箇

數代其式中之天而能令 $x^5 - 5x^4 = 5x^3 - 5x^2 + 5x - 5$ 設代天之數自 0 起漸增而大則 $x^5 - 5x^4$ 與 $5x^3 - 5x^2 + 5x - 5$ 亦必漸

增而大。惟其增大之遲速不同。觀下表自明。

代天之各數	之各同數	之各同數
0	0	1
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
...	...	...

觀右表。則知代天之數。自而增大。其數非過于三。則正項之同數恒小于

負項之同數。所以其同數必為負。又知代天之數。非少于四。則正

項之同數不能小于負項之同數。所以代天之數。從三增至四之時。其之同

數已從負號變至正號矣。

由此可見。天必有一箇一定之真同數。在三與四兩數之間。如能用其數以代

天則可令正負兩項之同數彼此相等而可相消適盡所以此數必為原式之一箇根數

以上所證之理無論何次方式莫不如此

第一百五十二款

二例 設原為任何次式之最大負號之倍數又從第二項起每間一項則反其正負號又設原為其改號之後所有之最大負號之倍數則原式之各正根必在與正之間而其各負根必在與負之間

設其原式為

$$x^4 + 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

此式可化之為

$$x^4 + 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

則無論已午未等各倍數為何數可見其天

$$x^4 + 1x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

之同數必大至能令天已天午天未各數任何小所以其和數能小于一

如此數小于一。則

$$\begin{array}{c} \text{天} \quad \text{天} \quad \text{天} \quad \text{天} \\ \text{天} \quad \text{天} \quad \text{天} \quad \text{天} \\ \text{天} \quad \text{天} \quad \text{天} \quad \text{天} \end{array}$$

即為正數。而第一項天大于餘項之和。所以各正項

之和必亦大于各負項之和矣。

由此可見。如能有某數代其天。而能令為正數。則大于此數之數。亦必皆能

令原式為正數。所以此數必大于原式最大正號之根。

設令啣為最大負號之倍數。則可見原式中之天若大于即其原式之根。若

為正號。則必大于

$$\begin{array}{c} \text{天} \\ \text{天} \end{array} = \begin{array}{c} \text{天} \\ \text{天} \end{array}$$

所以天之同數。如以某數代某數。必能令天大

中西算學方原

于^天即^天大^天于^天則所得之數必為正號惟令^天則能合于上例由此得^天

又可見每遇^天若大^天于^天即^天大^天于^天俱可與上例相合所以^天必為任何次式之最大正根之數

如以^天代^天則原式^天可變為^天此式中第二第四兩項之號與原式不同則

式之正根必為原式之負根所以^天必為原式負根之限

第一百五十三款

由上例可見凡有實數之任何次式欲求其與根相近之整數試之數次即可知之如此則可得恒與根相近之數如下