东北师范大学数学函授本科

实数理論講义

（数学分析）

刘玉璉 編

东北师范大学函授教育处

1957·10·出版

§1 导　　論

讀者在中学的代数和几何中已經看到：如仅仅只有有理数，有的問題无法解决。为了証实这些事实，首先証明一个命題：平方等于2的有理数不存在(即$\sqrt{2}$不是有理数)。用反証法来証明，假定存在着有理数既約分数$\frac{p}{q}$（因任何一个有理数皆可写成既約分数的形式）使$(\frac{p}{q})^2=2$。那么

$$p^2=2q^2 \cdots\cdots(1)$$

因p与q皆为整数，所以p^2能被2整除，既p能被2整除〔这是因为任何奇数$2n-1$的平方仍是奇数：$(2n-1)^2=4n^2-4n+1=2(2n^2-2n)+1$〕故$P$是偶数；令$p=2r$（其中$r$是整数）將$P$值代入（1）中，得：

$(2r)^2=2q^2$，或$2r^2=q^2$，所以q^2是能被2整除，即q也能被2整除，故q是偶数；令$q=2S$（其中S是整数）。由此知$\frac{p}{q}$不为既約分数，与假設矛盾。故命題成立。

由上述命題可知，方程式$x^2-2=0$在有理数域內无解。

又例如在几何学中我們考虑边長为單位長的正方形。其对角綫的長度也不能用有理数来表示。

类似这样的問題举不胜举。說明在初等数学中已經迫切的需要在有理数集的基础上扩大数的范圍。

那么数学分析为什么要从严格的处理实数开始呢？

自从数学分析产生之后，許多数学家为数学分析作出了巨大的貢献，因而使数学分析这門学科的理論逐步趋于完整，然而在最初一段的时期內許多数学家都沒有注意到数学分析根本的邏輯基础——实数理論(实数的連續性)直到十九世紀末叶才由大数学家康特(Cantor)、狄特金（Dedekind)、魏施德拉司（Weierstrass）等注意到了这个問題。他們分別用不同的方法定义了无理数，同时建立了完整的实数

理論，使数学分析得到了巩固的邏輯基础。

数学分析是以极限的理論和方法作为工具来研究变量和函数的学科。如求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$、$\lim\limits_{x\to a} f(x)$、$\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$、$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 等假如只有有理数就有很大一部分的极限运算失掉意义。如平方小于 2 的不足近似值

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots\cdots$$

就不存在极限。如只有有理数数学分析就被限制在非常狭小的范圍內。因而也就不可能更好的和更多的解决客观存在的具体問題。这样就大大的降低了数字分析的使用价値。为了使极限的运算顺利进行不受数域的限制，必須把有理数域的范圍加以扩大。所以我們必須在有理数集的基础上，引入无理数的概念。实数理論最根本的問題除定义无理数之外就是証明实数的連續性。

定义无理数的方法很多，比較出名的有下列三种方法：

1. 狄特金（Dedekind）分划法；
2. 康特（Cantor）基本序列法；
3. 魏施德拉司（Weierstrass）节套法；

每种方法各有优缺点。其中以狄特金分划法較为普遍，下边仅就狄特金分划法作較为詳細的介紹。

无論用什么方法定义无理数，总是將有理数的性質作为是已知的。因此有必要复习一下有理数的性質。簡述如下：

1. 有理数的加、減、乘、除（除数为 0 的情况除外）其結果仍是有理数。

2. 每一对有理数 a 与 b，必有且仅有下列关系之一成立，$a=b$，$a>b$，$a<b$。（三歧性）

全体有理数这个性質叫做它的有序性。

3. 若 a，b，c 是有理数 $a>b$，$b>c$ 则 $a>c$。

全体有理数这个性質叫做它的轉移性（或称傳递性）。

4. 若 a，b 是二有理数且 $a<b$，則一定能找到一个有理数 c，

介于 a 与 b 之間。（即 $a<c<b$）

全体有理数这个性質叫做稠密性。

5. 对任何正有理数 c，总有大于 c 的自然数 n 存在，使 $n>c$。

这就是大家所知道的"阿基米德公理"。

§2 狄特金无理数的定义

有理数域的分划概念是这个理論的基础。

現在考虑有理数的全体，或称有理数集合。現將有理数全体分成兩組 A 与 A'，若此分法滿足下边三个条件，則称这种分法叫做有理数域上的分划：

1. 集 A 与 A' 皆非空（即是每一类中至少含有一个有理数）。

2. 每一个有理数屬于且仅屬于集 A 或 A' 其中之一（即不漏掉任何一个有理数）。

3. 屬于集 A 中的每一有理数小于集 A' 中的每一个有理数。

为述敘方便起見，將集 A 叫做下組（或左組），集 A' 叫做上組（或右組）。

由分划的定义易得：若 a 是下組 A 的一有理数，則小于 a 的任何有理数皆屬下組 A。同样若 b 是上組 A' 的一个有理数，則大于 b 的任何有理数皆屬于上組 A'。

那么上述的这种分划，在有理数域中是否存在呢？回答是肯定的。茲举例說明之：

例 1. 將滿足不等式 $a<1$ 的一切有理数 a 令其屬于下組 A，滿足不等式 $a'\geqslant 1$ 的一切有理数 a' 令其屬于上組 A'。

容易驗証这个分法滿足上述三个条件，确实構成一个有理数域上的分划。

同时也容易看到：1 是上組 A' 中最小数。事实上，1 本身是屬于上組 A' 的，A' 中任何数也不小于 1。下組 A 中沒有最大数。事

实上，若 r_1 是下組 A 中任一有理数，由有理数的稠密性，則 r_1 与 1 之間必存在有理数 r_2： $r_1<r_2<1$。r_2 当然是屬于下組 A。但因 $r_1<r_2$，則 r_1 不是下組 A 中最大数，故下組 A 中沒有最大数。

例 2. 將滿足不等式 $a\leqslant 1$ 的一切有理数令其屬于下組 A，滿足不等式 $a'>1$ 的一切有理数 a' 令其屬于上組 A'。

这也構成一个有理数分划。并知下組 A 中有最大数，上組 A' 中沒有最小数。

例 3. 將一切負有理数，零和平方小于 2 的一切正有理数放入下組 A，將平方大于 2 的一切正有理数放入上組 A'。

易見这种分法滿足有理数域上分划定义的三个条件，自然是一个有理数域上的分划。但是也不难証明上組 A' 中沒有最小数，下組 A 中也沒有最大数。

事实上，我們只要指出下組 A 中任何一个正有理数 r（这样有理数在 A 中一定存在，因为 $1^2=1<2$），于是 $r^2<2$，必能求得大于 r 的有理数 $r+\frac{1}{n}$（n 是自然数）也屬于 A，即 $(r+\frac{1}{n})^2<2$。这样一来，問題就归結于滿足此不等式的自然数 n 是否存在的問題。如果这样 n 存在問題就解决了。

为了寻找这样 n，应該解上边的不等式。事实上，

$$(r+\frac{1}{n})^2=r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}<r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n}=r^2+\frac{2r+1}{n}$$

显然，滿足不等式 $r^2+\frac{2r+1}{n}<2$ 的 n，当然就更加滿足不等式 $(r+\frac{1}{n})^2<2$。因此仅就不等式 $r^2+\frac{2r+1}{n}<2$ 来求 n 即可。

經过移項整理之后得 $n>\frac{2r+1}{2-r^2}$，因此只要取 $n>\frac{2r+1}{2-r^2}$ 就行了。由阿基米德公理可知这样的 n 的确是存在。这样一来，不論下組 A 中的有理数 r 如何，对充分大的 n 仍有有理数 $r+\frac{1}{n}$ 也屬下組 A，这就說明了下組 A 中沒有最大的数。

用类似的方法証明，上組 A' 中也沒有最小的数。如果任一有理数 S 屬于上組 A'，即 $S^2>2$，必能求另一小于 S 的有理数 $S-\frac{1}{n}$（n

是自然数）也屬于 A'，即 $(S-\frac{1}{n})^2>2$。

$$(S-\frac{1}{n})^2=S^2-\frac{2S}{n}+\frac{1}{n^2}>S^2-\frac{2S}{n}$$

若滿足不等式 $S^2-\frac{2S}{n}>2$ 的 n，必然也滿足不等式 $(S-\frac{1}{n})^2>2$。

經过整理之后得 $n>\frac{2S}{S^2-2}$，因此，只要 $n>\frac{2S}{S^2-2}$就行了。因这样的 n 的确存在，所以上組 A′ 內沒有最小的数。

在邏輯上还应存在一种情况：下組 A 內有最大数，同时上組 A' 內也有最小数。事实上，这种情况是不存在的。因为如果下組 A 內最大数为 a，下組 A' 的最小数为 b，則由有理数的稠密性在 a 与 b 之間必然能够找到一个有理数 C，由有理数域的分划定义性質 3 可知：数 C 既不屬于上組 A' 也不屬于下組 A。这恰与有理分划定义的性質 2 矛盾，故第四种情况是不存在的。

例 3 清楚的告訴我們：虽然有理数集是稠密的，但是它并不是連續的，在有理数集之間存在很多很多空隙。更詳言之，若在数直綫上取定某一定 0 为原点，規定出直綫的正方向（通常都是从左至右）。其次再取某一个綫段 τ 作为長度單位。如图

这样任何一个有理数皆可用数直綫上的一个而且只有一个定点表示出来，为簡便計，称这种点为有理点。但是，若我們反过来也認为数直綫上的任一点也必有一个有理数与其对应，这就錯了。这就是在数直綫上的所有点并不全是有理点。这就是例 3 中所出現的那种情况在几何上的說明。

总之通过上边的例 1，2，3 表明对每一个在有理数域上的分划总可能有下边三种情况之一出現：

（1）在下組 A 中无最大，上組 A' 中有最小；

（2）在下組 A 中有最大，上組 A' 中无最小；

（3）在下組 A 中无最大，在上組 A' 中也无最小。

如果分划是情况（1）或（2）我們說这种分划是有理分划。这就是任何一个有理数 r 不是作为下組的最大数就是作为上組的最小数。反之我們也說这种分划（1）或分划（2）确定一个有理数 r，r 或为下組 A' 中的最大数或为上組 A' 中的最小数。如例1或例2中的1就有理分划所确定的数。

为下边的討論方便起見，我們作如下的規定：凡是說到某一个分划确定有理数 r，总是認为 r 是上組 A' 中的最小者。

其次，如果分划是情况（3），我們就定义它确定一个新数——无理数。此数就是上下組之間分界数。这种分划称做无理分划。在例3中就是确定一个无理分划，因而也确定一个无理数，此无理数就是大家所熟知的通常用 $\sqrt{2}$ 表示的数。

有理数和无理数統称之为实数。

全部的有理数再添加上全部无理数構成了实数集合。

关于无理数的定义，还应当注意，每一个有理分划皆确定一个有理数，此有理数就是上組 A' 中的最小数（或下組 A 中的最大数），这就由有理分划的本身明显的將此数表达出来了。但对于无理数来說，无理分划的本身并沒有給我們任何明显表示，一般說来，用“公式”表示无理数是少有的，多数都是用个别的記号或文字表示，例如：$\sqrt{2}$，π，e，$\log 5$，$\sin 10^\circ$，……

§3 实数集的有序性

在实数集已有定义之后，只要应用某种方法作一些規定，就能把实数的全体按某一种順序排列起来。

用符号 (A, A') 代表一个分划，A 是下組，A' 是上組。設由它确定的实数（有理数或无理数）为 a，$a=(A, A')$。

1° 如果 a 与 b 是二有理数，它們之間的相等，大于，小于在算术中早已知道。

2° 如果 a 是一个无理数，由 (A, A') 所确定，它与任何有理

数大小作如下的规定：

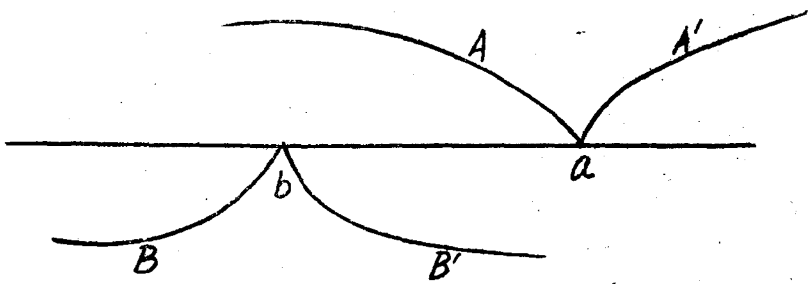
若任意有理数 b，b 屬于 A，则 $b<a$。

若任意有理数 b'，b'屬于A'，则 $a<b'$。

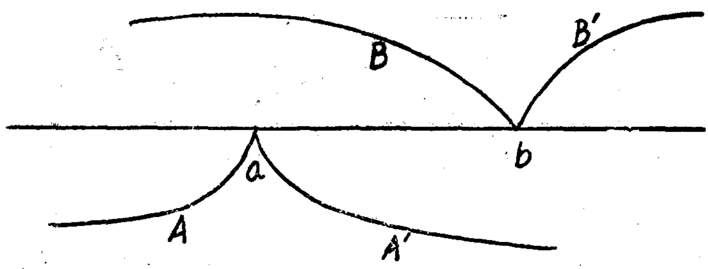
3° 如果 a 是一个无理数由 (A, A') 所确定，b 也是一个无理数由 (B, B') 所确定。相等，大小作如下的规定：

（1）当仅且当，二下組 A 和 B 完全相同时，則認为 $a=b$。（二下組相同，当然二上組也是相同）。

（2）若下組 A 整个包含着下組 B，并且二者不完全相同。則認为 $a>b$。用图形解釋如下：



（3）若下組 A 整个被下組 B 包含着，并且二者不完全相同，則認为 $a<b$。用图形解釋如下：



注意：上述的規定对有理数也成立。

現在証明：

1. 任意二实数 a 与 b 有且仅有三种关系 $a=b$，$a>b$，$a<b$。之一成立。（三歧性）

事实上，設 $a=(A, A')$，$b=(B, B')$，二下組 A 与 B 只有三

种情况：A与B完全相同，即$a=b$，A与B不相同，或A包含B，即$a>b$，或A被B所包含，即$a<b$。

2. 若$a>b$，$b>c$则$a>c$（轉移性）。

事实上，設$a=(A, A')$，$b=(B, B')$，$c=(C, C')$（其中可能有有理数）。因为$a>b$，知A包含B且不相同，又因$b>c$，知B包含C且不相同，所以A包含C也不相同，即$a>c$。

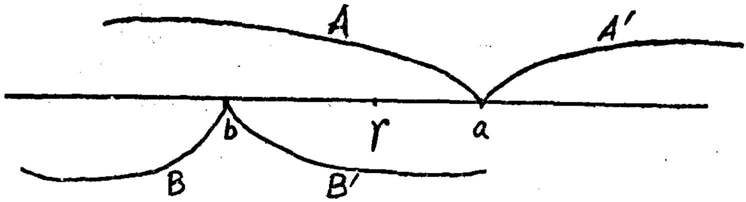
§4 实数集的稠密性

我們已知有理数集具有稠密性，即在任何不相同的二有理数之間必存在一个有理数。当然，这种有理数有无穷多个。現在証明在实数集中也具有这个性質。

定理1 对于二相異实数a与b，令$a>b$，必能求得一个位于它們之間的有理数r：$a>r>b$。

証明：設$a=(A, A')$，$b=(B, B')$，因$a>b$，所以下組A包含下組B，并且二者还不相同。因此在A内必有有理数r，它不屬于B内，于是它必屬于B'。

$$b\leqslant r<a$$



（左端仅在b为有理数时等号方能成立）。因为在A內无最大数（可見前边对有理数的分划所作的規定），所以只要把r取得大一些等式就不会成立。故的确有一个有理数r位于二者之間。

从定理的証明可知，这种r必然有无限多个。

这个定理告訴我們：不仅在二不同实数之間存在实数，更重要的是二实数之間必存在有理数。此即表明，有理数集在实数集上是处处

稠密的（在实数集中到处都有有理数）。

实数全体这个性質叫做它的稠密性。

§5 实数集的連續性

現在介紹实数集中一个极其重要的性質——实数集的連續性，此性質是有理数集所沒有的。实数集的連續性是数学分析的理論基础。

考慮实数集，將它分成兩組 X 和 Y，如滿足下列三个条件，就將这种分法叫做在实数域上的分划；

1. 組 X 和組 Y 皆非空集；
2. 每一个实数屬于且仅屬于二組 X 和 Y 中之一；
3. 組 X 的每一实数小于 Y 的每一实数。

將这种分划用符号 (X, Y) 表示。

事实上，实数域上的分划是很容易作成的，所以在这里不必再举例說明了。

現在发生了一个問題：在有理数域上的分划得到了三种可能情况，試問在实数域上的一个分划是否也可能出現上述的三种可能情况呢？如果可能的話，当然可以作为再引入新数的基础。

下边基本定理回答了这个問題：指出上述的第三种情况不出現了。

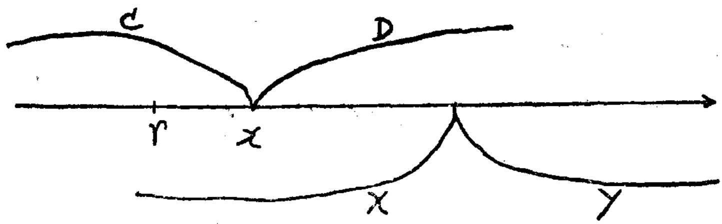
基本定理，实数域內的任一分划 (X, Y) 必确定一个实数 a。数 a（1）或是下組 X 中的最大数（这时上組 Y 內无最小数），（2）或是上組 Y 中有最小数（这时下組 X 內无最大数）。

証明：設用 A 表示 X 中有理数全体，用 B 表示 Y 中有理数全体。

首先証明，A 与 B 是有理数域上某一个分划 (A, B) 的上組与下組。

事实上，① 下組 A 与上組 B 皆是非空集。因为 (X, Y) 是实数域上的分划，当然 X 与 Y 皆非空。如 x 是 X 中的某一数，若 x 是有理数則可知下組 A 是非空集。若 x 是无理数，則 x 本身也必是由有

理数域內某一个分划 $x=(C, D)$所定义。在此分划的下組 C 中可任



取一个有理数 r（这种 r 当然存在），得 $r<x$。因为 x 屬于下組X，所以 r 也屬于 X，故 A 仍是非空集。同样可証上組 B 也是非空集。② 任何有理数必屬于兩組 A 与 B 其中之一以及③ 下組 A 中每一有理数必小于上組B 中每一有理数。这兩种情况是显然的，不必詳述。

由①、②、③知（A, B）是一个有理数域上的分划，設它定义一个实数 $a=(A, B)$。因（X, Y）是实数域上的分划，所以 a 应当屬于下組 X 或屬于上組 Y。

（1）假定 a 屬下組 X，可証 a 必是下組 X 中的最大数。因为反之，a 不是下組 X 中的最大数，必然能在下組 X中找到大于 a 的数 b，由 §4 定理 1 知在 a 与 b 之間必存在有理数 r:

$$a<r<x$$

所以 r 亦屬 X，故 r 必屬于 A。但是这件事不可能，因为屬于定义 $a=(A, B)$ 分划的下組 A 中的有理数 r 不能大于 a。这个矛盾証明了a 是 X 中的最大数。

（2）假定 a 屬上組 Y，用同样的推演可知 a 是上組 Y 中的最小数。定理証完。

就象証明有理数域上分划的情形一样，可証在上組 X 中存在有最大数同时在下組 Y 中存在最小数是不可能的。

基本定理指出；对每一个实数域上的分划，上組沒有最大数，下組沒有最小数的情况是不存在，不是下組有最大数(上組沒最小数)，就是上組有最小数（下組沒有最大数）。即在实数域中不存在着空隙。因此，在实数域上的任何分划仍定义着一个实数，它不可能再引入新的数。有理数集与实数集的根本区别就在于此。实数的这个性質

称为它的連續性（或称完备性或密接性）。

§6 两个輔助定理

为了討論实数运算，事先我們需要引入兩个輔助定理。

輔助定理1　若二实数α及β皆位于同一对有理数S与S'之間：

$$S<\alpha<S',\qquad S<\beta<S' \qquad (1)$$

而S与S'之差（因S与S'是有理数这是已知的）可任意小，即无論預先給定数$\varepsilon>0$怎样小总有

$$S'-S<\varepsilon$$

則$\alpha=\beta$。

証明：反之若$\alpha\neq\beta$。可設$\beta<\alpha$，由§4定理1知在α与β之間必可找到兩个确定有理数r及r' $(r'>r)$：

$$\beta<r<r'<\alpha$$

由（1）对任何兩个有理数S与S'，α与β皆位二者之間：

$$S<r<r'<S'$$

由此

$$S'-S>r'-r>0$$

因$r'-r$是一个定数，故$S'-S$不能任意小与假設的条件矛盾。故預备定理1成立。

預备定理2　設給定一个无理数$x=(A, B)$，不論$\varepsilon>0$怎样小，必能求出兩个有理数a与b，滿足$a<x<b$，且$b-a<\varepsilon$。

証明：只要証明定理对于有理数ε成立就行了。事实上，如果ε是无理数；可取一个正有理数$\varepsilon'<\varepsilon$也就行了（这种ε'当然存在）。

在A中任取一有理数a_0，在B中任取一有理数b_0。作一列有理数

$$a_0, a_1=a_0+\frac{\varepsilon}{2}, a_2=a_0+2\frac{\varepsilon}{2}, \cdots\cdots, a_n=a_0+n\frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

（n是自然数）只要n取的充分大$a_n>b_0$，事实上，我們要求n可

解不等式 $b_0<a_0+n\frac{\varepsilon}{2}$。故当$n>\frac{2(b_0-a_0)}{\varepsilon}$ 就可以了。由“阿基米德”公理这种 n 当然存在。故 $a_n\in B$ 設 a_k $(k\geqslant 1)$ 是数列（1）中第一个屬于 B 的，此时 a_{k-1} 就屬于 A。

且 $0<a_k-a_{k-1}=a_0+k\frac{\varepsilon}{2}-\left[a_0+(k-1)\frac{\varepsilon}{2}\right]=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。 証完。

§7 实数的运算

1. 加　　法

取二实数 x 和 y，分别是由有理数域上的分划 $x=(A,\ B)$，$y=(A_1, B_1)$ 所确定。

設 a 是下組 A 中任一有理数；

b 是上組 B 中任一有理数；

a_1 是下組 A_1 中任一有理数；

b_1 是上組 B_1 中任一有理数。

現在用下列方法將有理数集分成上下兩組 C 与 D 將形如 $a+a_1$ 的一切数归入下組 C，將形如 $b+b_1$ 的一切数归入上組D。事实上，C 与 D 兩組皆非空，每一个有理数落在且仅落在 C 或 D 兩組中之一組，其次 D 組內每一个数皆大于 C 組內任一数。故 $(C,\ D)$ 确为有理数域上的分划。

定义：由分划 $(C,\ D)$ 所确定的数叫做 x 与 y 之和。用 $x+y$ 表之。

由定义可知：$x+y$ 是包含在一切形如 $a+a_1$ 的有理数和一切形如 $b+b_1$ 的有理数之間。現在証明 $x+y$ 是具有此性質的唯一的一个数。

根据 §6 預备定理2，数 a 与 b，a_1 与 b_1 彼此可以任意接近，即无論 $\varepsilon>0$ 怎样小，可使

$$b-a<\frac{\varepsilon}{2},\qquad b_1-a_1<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $(b+b_1)-(a+a_1)=b-a+b_1-a_1<\varepsilon$

即 $a+a_1$ 与 $b+b_1$ 可以任意接近，由預备定理 1 此二数必然相同。故只有一个。

注意：若 x 与 y 均为有理数，显然仍可作一个有理数域內的分划 (C, D)，由分划 (C, D) 所确定的数就是 $x+y$。这样兩个有理数和的定义乃是兩个实数和的特殊情况。即二有理数和的定义并不与已知的二实数和的定义相矛盾。

容易驗証，在实数集上加法的交換律，結合律都成立，即設 x，y，z 皆为实数有：

1. $x+y=y+x$ （交換律）

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ （結合律）

其原因就是，在有理数集上的加法交換律与結合律都成立。讀者只要深思就可得知。

現在証明，对任何实数。下边的有理数性質也成立：

3. $x+0=x$ $\qquad(1)$

事实上，如果有理数 a，b，a_1，b_1 是：

$$a\leqslant x\leqslant b, \qquad a_1\leqslant 0\leqslant b_1.$$

則显然 $\quad a+a_1\leqslant a\leqslant x\leqslant b\leqslant b+b_1.$

因此，x 是包含在形如 $a+a_1$ 的有理数与形如 $b+b_1$ 的有理数之間，同时形如 $a+a_1$ 的有理数与形如 $b+b_1$ 的有理数之間还包含有 $x+0$。但是包含 $a+a_1$ 与 $b+b_1$ 之間的数只有一个，故 $x+0=x$，証完。

現在証明

4. 对任一实数 x，存在着数 $-x$（是 x 的对称数），有 $x+(-x)=0$。 $\qquad(2)$

若 x 是有理数此性質已知成立的，所以只限 x 是无理数就行了。

注意：$-x$ 代表什么意义我們还不知道，首先应該給它一个定义。

設 $x=(A, B)$ 用以下方法定义 $-x$。我們一切有理数 $-b$ 放在下組 $\overline{A}$，此处 b 是上組 B 中的任一有理数。取一切 $-a$ 放在上組 $\overline{B}$，此处 a 是下組 A 中的任一有理数。不难看出，这种分法确定一个有

理数域上的分划$(\overline{A}, \overline{B})$，定义分划$(\overline{A}, \overline{B})$所确定的数記为 $-x$。

証明：由$-x$ 的定义，可知 $x+(-x)$ 是位于形如$a-b$与$b-a$二有理数之間，此处 $a<x<b$ 显然

$$a-b<0<b-a,$$

于是数0也位于形如 $a-b$ 与 $b-a$ 二数之間。但是具有这种性質的数只有一个，故

$$x+(-x)=0 \text{ 証完。}$$

現在証

5. 若x，y，是实数当$x>y$則$x+z>y+z$。

証明：若$x>y$，則在它們之間必可插入二有理数r_1与r_2：$x>r_1>r_2>y$。

由§6預备定理2，必有二有理数C及C'存在。

使 $C<z<C'$ 及 $C'-C<r_1-r_2$ （r_1-r_2 是定数）

由此 $r_1+C>r_2+C$

由二实数和的定义

$$x+z>r_1+C, \quad r_2+C'>y+z$$

將二不等式連結一起得：$x+z>y+z$ 証完。

2. 減　　法

定义：所謂二实数x和y的差 $x-y$，乃是指一个实数 z，它滿足 $z+y=x$ （3）

注意：实数的减法定义是借助于实数加法而定义的。

現在要証明，方程式（3）在实数域內有解，其解就是

$$z=x+(-y). \tag{4}$$

事实上，將（4）兩端分别加上 y

$$z+y=[x+(-y)]+y \quad \text{（这是根据單值性）}$$

由結合律：$z+y=x+[(-y)+y]$

由等式（2）与（1） $z+y=x+0=x$。

故方程（3）确实有解 $z=x+(-y)$。

这个解还是唯一的，如果倘有一解 z_1

即 $z_1+y=x$

在此等式兩端加 $-y$，再利用等式（2）与（1），得：

$$z_1=x+(-y) \qquad \text{故 } z=z_1 \text{ 証完。}$$

3. 乘　　法

取二实数 x 和 y，首先假定 x 与 y 皆为正数。

$$x=(A,\ B),\ y=(A_1,\ B_1)$$

設 a 是下組 A 中任一有理数；

b 是上組 B 中任一有理数；

a_1 是下組 A_1 中任一有理数；

b_1 是上組 B_1 中任一有理数。

現在用以下的方法將有理数集分成上下兩組 C 与 D：

把一切負有理数，零以及形如 aa_1 的一切正有理数放入下組 C，把其余一切有理数放入上組 D，显然下組 C 与上組 D 皆非空。每一个有理数且仅屬于一組。上組 D 中任一有理数大于下組 C 中任一有理数。故（C，D）确为有理数域上的分划。

定义：由分划（C，D）所确定的数叫做 x 与 y 二数之乘积。用 xy 表示之（或 $x\cdot y$）

由定义可知：xy 是包含在一切形如 aa_1 的有理数和一切形如 bb_1 的有理数之間。現在証明 xy 是具有此性質的唯一一个数。

由 §6 預备定理 2，无論 $\varepsilon>0$ 怎样小可取有理数 a 与 b 及 a_1 与 b_1，使 $\qquad b-a<\varepsilon$，及 $b_1-a_1<\varepsilon$

此时可取 a 与 a_1 是正数，而 b 与 b_1 各不超过預先固定数 b^0 及 b_1^0（即 $b<b^0$ 及 $b_1<b_1^0$）

則差 $\quad bb_1-aa_1=bb_1+ba_1-ba_1-aa_1$

$$=b(b_1-a_1)+a_1(b-a)<b^0(b-a_1)+b_1^0(b-a)$$

（这是 $\because a_1<b_1<b_1^0$）

$$=(b^0+b_1^0)\cdot\varepsilon$$

故 bb_1-aa_1 可任意小，由 §6 預备定理 1，仅有一个实数 r 位于 aa_1 与 bb_1 之間。

当兩个正实数乘积定义之后，关于乘积的符号作如下規定：

不論实数 x 如何，常有

$$x\cdot 0=0\cdot x=0$$

若二乘数 x 与 y 皆不为 0，根据通常符号規則，

$x\cdot y=|x|\cdot|y|$ 　　当 x 与 y 是同号时，

$x\cdot y=-(|x|\cdot|y|)$ 当 x 与 y 是異号时，

（符号 $|x|$ 代表 x 的絕对值）

在上述乘法定义中当 x 与 y 是有理数时与通常的有理数乘法相同时实数乘法有与有理数乘法相同的性質。設 x，y，z 是三个实数，有下列性質：

1. $xy=yx$（交換律）
2. $(xy)z=x(yz)$（結合律）
3. $x\cdot 1=x$

上述三个性質的証明，都基于有理数的乘法交換律和結合律而得出，此处不拟詳述，請讀者深思之。

現在証明：

4. 对任一異于零的正实数 x，必有数 $\frac{1}{x}$（倒数）存在，使

$$x\cdot\frac{1}{x}=1$$

如果 x 是有理数，早就知道此等式是成立，故仅就 x 是无理討論之。

注意：現在 $\frac{1}{x}$ 代表什么意义不知道。首先应該給 $\frac{1}{x}$ 下定义。

若 $x=(A,B)$，將有理数集用下列方法分成上下兩組 A' 与 B'。

把一切負有理数，零以及一切形如 $\frac{1}{b}$ 的有理数放入下組 A'，此处 b 是上組 B 中任一有理数；把一切形如 $\frac{1}{a}$ 的有理数放入上組 B' 中，此处 a 是下組 A 中任一正有理数。容易驗証，(A',B') 構成一个有理数域內的分划。由分划 (A',B') 所确定的实数（在現在这种情形是无理数）；將此实数記作 $\frac{1}{x}$。

証明：由上述倒数的定义及乘积的定义可知，数 $x\cdot\frac{1}{x}$ 是唯一的一