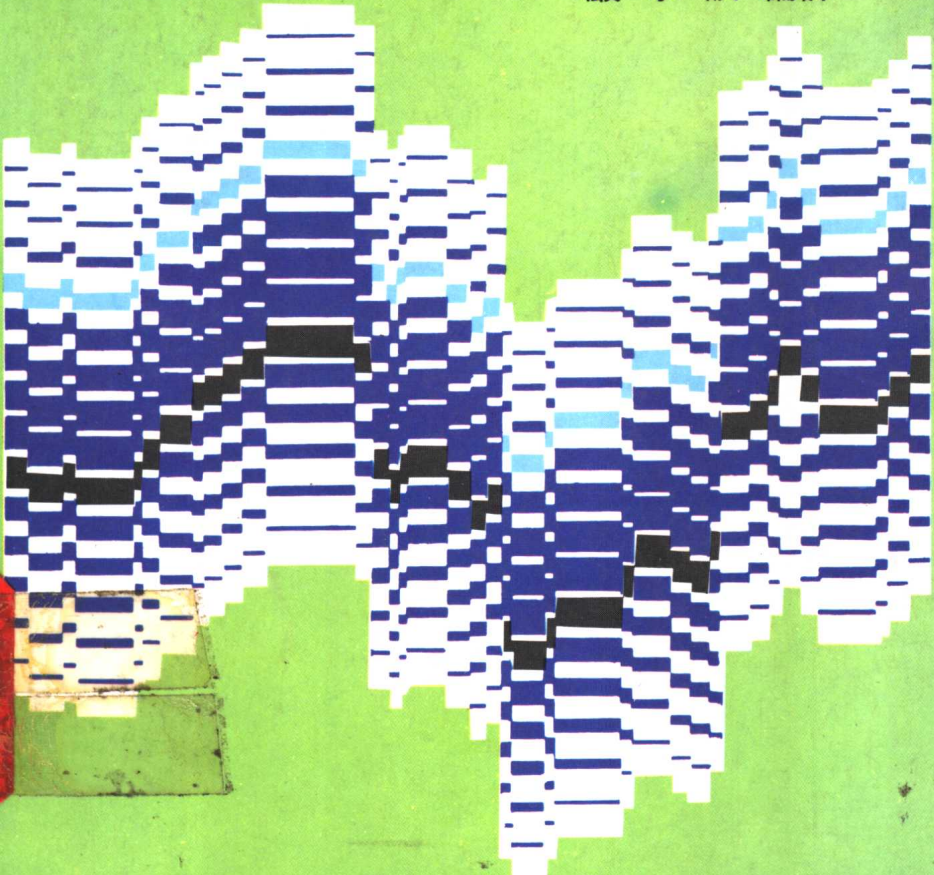


13.1107 / 42
大專·高中新數學叢書 ⑧

新課程

機率與統計

九大教授·理博 占 部 實 原著
嚴 水 謨 編譯



晨光出版社

編輯大意

在高中所學習的數學課程，其範圍甚廣，內容極為豐富，實為諸君將來，在進一步的數學研究上以及對於科學方面的探討時之基礎。故目前學習的數學內容，對於現代進步的科學究竟有何種程度的貢獻並不易了解。但在高中所學的數學內容，於實際生活上可以直接應用得上者，機率及統計即為其中之一。在學習機率及統計上，排列・組合為其重要基礎。

可是在實際生活中，與機率及統計有直接關係的事物却不在少數，而排列・組合在學習數學的思考方面將助益不小。像對於這類事物的認識，機率・統計在學習前與學習後就有很大的差異，而且雖然機率，統計在入學考試的範圍外，但高中數學教育修改後，由此出題的可能性並非沒有，而對機率・統計感到困難的學生却出乎意料之多。因此這可以說是入學考試時容易忽略的一個項目。本書以

由淺，入深，愈廣

為宗旨，將高中程度的機率，統計全盤地由

解說→例題→擴展問題→習題

的順序再三地返復演練，在此過程中求取自然地精通，此為本書之特色。為了使某一項目的內容能夠徹底了解，在解說時，特別下了功夫，希望讀者諸君能充分地活用本書。

最後，承小原好一先生執筆，校正方面大力協助，本書得以順利發刊，在此特致深厚之謝意。

前 言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書為具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■ 小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目了然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，為重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之效率。

■ 例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實為本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■ 練習問題

分為A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此為有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能真正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

目次

1. 場合的數.....	8
和的法則，積的法則，樹形圖，集合之直積	
2. 排列・環狀排列.....	16
排列， n 的階乘，環狀排列， n 個之環狀排列 $(n-1)!$ ，首飾排列	
3. 重複排列・含有同物之排列.....	28
重複排列，含有同物之排列	
▶ 練習問題 (1 ~ 16).....	38
4. 組合.....	40
組合，組合的計算公式，包含特定1個及不包含特定1個之公式	
5. 重複組合.....	52
重複組合，重複組合的計算公式	
▶ 練習問題 (17 ~ 31).....	60
6. 二項定理.....	62
二項式的連乘積，二項定理，一般項，二項係數，巴斯噶三角形，關於 x 的降幕展開・昇幕展開	
7. 多項定理.....	76
一般項，多項定理， $n=4$ 時之展開例， $(4\text{項式})^n$ 的展開公式	
▶ 練習問題 (32 ~ 46).....	80
8. 機率的意義.....	82
機遇，機遇相同，機率，機率論，試驗，事件，機率的定義，數學的機率	
9. 統計的機率.....	88
機率的發生，機遇的問題，相對次數，統計的機率，(經驗的機率)，大數的法則	
10. 加法定理.....	92
互斥事件，加法定理，餘事件的定義	
▶ 練習問題 (47 ~ 58).....	96

4 目 次

11. 從屬事件的乘法定理.....	98
從屬, 從屬事件, 附帶條件的機率, 和事件, 積事件, 從屬事件的乘法定理	
12. 獨立事件的乘法定理.....	106
互為獨立, 獨立事件, 獨立事件的乘法定理	
▶ 練習問題 (59 ~ 68).....	114
13. 獨立試驗.....	116
獨立試驗, 獨立試驗的定理 (r 次), 獨立試驗的定理 (r 次以上)	
14. 期望值.....	124
平均收入, 期望值 (期待值), 期望金額 (期待金額)	
15. 幾何學的機率.....	132
幾何學的機率, 機率的公理系	
▶ 練習問題 (69 ~ 81).....	138
16. 度數分布.....	140
變量, 連續變量, 離散變量, 度數分布表, 階級 (級), 級間, 階級值, 度數, 柱狀圖, 度數分布多角形, 度數分布曲線, 度數分布曲線型態, 相對度數, 相對度數分布表, 累積度數, 累積度數表, 累積度數折線	
17. 平均值.....	146
代表值, 平均値 (相加平均), 重疊平均 (加重平均), 平均值的計算公式, 假平均, 假偏差	
18. 中央值 (Median), 眾數 (Mode).....	150
中央值, 眾數	
19. 散布度.....	154
散布度, 範圍, 偏差, 平均偏差, 分散, 標準偏差, 四分偏差, 標準偏差計算公式, 關比雪夫不等式	
20. 相關關係.....	162
相關表, 相關圖, 正的相關, 負的相關, 散布圖, 相關係數	
▶ 練習問題 (82 ~ 88).....	166
21. 機率分布.....	168
機率變數, 機率分布, 機率變數的平均 (期望值), 標準偏差, 分散, 機率密度函數, 一樣分布	
22. 二項分布.....	178
二項分布 [$B(n, p)$], 公式 $m = np$, 公式 $\sigma = \sqrt{npq}$	

23. 正規分布.....	182
正規分布, 正規分布曲線, 標準測度, 標準正規分布	
▶練習問題 (89 ~ 98).....	188
24. 樣本調查.....	190
全數調查, 部分調查, 母集團, 元, 樣本, 抽出, 任意抽 出法, 任意樣本, 亂數表, 層化抽出法, 層, 層化, 機率 比例抽出法	
25. 母平均的推定(1).....	194
母平均, 母標準偏差, 樣本平均, 樣本標準偏差, 信賴度 (信賴係數), 信賴區間, 信賴界限	
26. 母平均的推定(2).....	198
自由度 N 的 t 分布, t 分布的信賴度 $1-\alpha$ 的信賴區間	
27. 母比率的推定.....	202
母比率, 樣本比率, 信賴度95%的信賴區間, 信賴度99% 的信賴區間	
28. 檢定(1).....	206
檢定, 設立假說, 有意水準(危險率)	
29. 檢定(2).....	212
母比率的檢定, 棄却域, 一側檢定, 兩側檢定, t 分布之 檢定	
30. 抽樣檢查.....	220
抽樣檢查, 一次抽樣檢查, 批(組), 檢查特性曲線(OC 曲線), 合格水準, 不合格水準, 二次抽樣檢查	
31. 品質管制.....	224
統計的品質管制, 管制圖, 3σ 法, 上方・下方管制界 線, $\bar{x}$ 管制圖, R 管制圖, p 管制圖, $p-n$ 管制圖	
▶練習問題 (99 ~ 109).....	230
習題解答.....	232
練習問題解答.....	247

說明記事

撲克牌的機率.....	115	亂數表.....	231
-------------	-----	----------	-----

重要名詞一覽表

R管制圖	225	首飾排列	17
部份調查	190, 191	組合	40
一次抽樣檢查	220, 221	經驗機率 (統計機率)	89
一般項	62, 76	元	190
一樣分布	171	檢查特性曲線 (OC曲線)	220
$\bar{x}$ 管制圖	224, 224	檢定	206
$n!$ 階乘 ($n!$)	16	合格水準	221
L字型分布	142	合格判定個數	220
環狀排列	16	降幕展開	63
OC曲線 (檢查特性曲線)	220	3 σ 法	224
包含同物的排列	29	散布圖	163
重疊平均値 (加重平均)	146	散布度	154
折線圖	168	樣本	190
階級 (級)	140	批 (組)	220
階級値	140	試驗	83
機率	82	事件	83
機率的公理系	133	集合的直積	9
機率比例抽出法	191	四分偏差	155
機率分布	168	從屬事件 (相依事件)	98
機率變數	168	自由度 N 的 t 分布	198
機率變數 x 的平均 (期望値)	169	重複組合	52
機率密度函數	171	重複排列	28
加重平均	146	樹形圖	9
設立假說	206	排列	16
一側檢定	213	附帶條件的機率	98
下方管制界限	224	昇幕展開	63
加法定理	92, 93	上方管制界限	224
假平均	147	乘法定理	99, 107
假偏差	147	信賴區間	195
管制界限	224	信賴係數	195
管制圖	224, 225	信賴界限	195
幾何學的機率	132	信賴度 95% - 99% 的信賴區間	195, 203
棄却域	212	推定	194
危險率 (有意水準)	207	數學的機率	83, 89
期望金額	125	正規分布	182
期待値	124, 169	正規分布曲線	182
期待金額	125	積事件	98
期望値	125	積的法則	9
級 (階級)	140	先驗的機率 (數學的機率)	83, 89
級間	140	全數調查	190, 191
空事件	133	層	191
空集合	133	層化	191

層化抽出法	191	柱狀圖	141
相加平均	146	非對稱型分布	142
相關係數	163	標準正規分布	183
相關圖	162	標準測度	183
相關表	162	標準偏差	155, 170
相對度數	89, 142	樣本(見本)	190
相對度數分布表	142	樣本標準偏差	194
對稱型分布	142	樣本比率	202, 203
大數的法則	89	樣本平均	194
代表值	146	品質管制	224
互為獨立	106	不合格水準	221
多項定理	76	不良個數管制圖($p-n$ 管制圖)	225
機遇	82, 88	不良率管制圖(p 管制圖)	225
關比雪夫不等式	157	負的相關	163
中央值(Median)	150	分散	155, 170
中心線	224	平均值	146
抽出	190	平均值的檢定	207
柱狀圖	141	平均收入	124
t 分布的檢定	213	平均偏差	155
t 分布的信賴度 $1 - \alpha$ 的信賴區間	199	偏差	154
統計的機率(經驗的機率)	89	變量	140
統計上的品質管制	224, 225	棒狀圖	168
同次積	51	母集團	190
機遇相同	82, 88	母標準偏差	194
獨立試驗	116	母比率	202, 203
獨立事件	106	母比率的檢定	212, 213
度數	140	母比率的推定	202, 203
度數分布	140	母平均	194
度數分布曲線	141	母平均的推定	194, 198
度數分布多角形	141	有意水準(危險率)	207
度數分布表	140	有意水準 5% (1%) 之檢定	207
衆數(Mode)	151	U 字型分布	142
二次抽樣檢查	220, 221	餘事件	93
二項係數	63	亂數表	190, 231
二項定理	62	離散變量	140
二項分布	178	兩側檢定	213
任意抽出法	190, 191	累積度數	143
任意樣本	190	累積度數折線	143
抽樣檢查	220, 221	累積度數表	143
互斥事件	92	累積度數分布	142
巴斯噶三角形	63	連續變量	140
範圍	154	和事件	98
卜瓦松實驗式	151	和的法則	8
$p-n$ 管制圖(不良個數管制圖)	225		
p 管制圖(不良率管制圖)	225		

1. 場合的數

今，「由 0 至 99 之數目字中，出現“3”的究竟有幾個？」針對此問題，通常都會做如下之考慮：

(1) 一位數有 3 一個，二位數有 13, 23, 43, ..., 93 八個及 30, 31, 32, 33, 34, ..., 39 十一個，全部共 20 個。查其個數之所謂「整理分類」的思考方法在數學上是非常重要的。此時，不能漏掉，不得重複是非常要緊的。然而，這個方法若對於「由 0 至 99999 之數目字中，出現“3”的究竟有幾個？」時則感到困難，因為一個一個地分，頗為麻煩。此時，不妨考慮下列之方法。

(2) 0000 代表 0，00001 代表 1，0 ~ 99999 可視為由 00000 至 99999 的 10 萬個電話號碼，則每一個均由 5 個數字組成，而數字是由 0 至 9 共 10 個數字平均包含於內，故知包含有數字“3”的數有 $5 \times 10 \div 10 = 5$ (萬個)。

此解答是着眼於數學的一般性的解法。(1)與(2)之思考方法正如車子的兩輪，對數學而言，是重要而不可或缺的。法則，定理等為數學之各各項目，其重要的一般性質之敘述，不但要牢記，同時要能正確地理解使其運用自如。

討論場合之數時，其重要法則如下。有限集合 A ， B 之元素的個數各設為 $n(A)$ ， $n(B)$ 代表；則

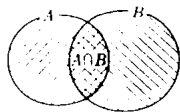
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(參考右之文氏圖式)

而當 A 與 B 無共同元素時，即

A ， B 不同時發生時，

由 $n(A \cap B) = 0$



$$\text{故 } n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

和的法則

此稱為和的法則。三個以上不同時發生的事件 $A, B, \dots, C$ ，對於此三個事件之中最少有一事件發生之場合數，

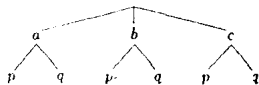
積的法則

可用 $n(A) + n(B) + \dots + n(C)$ 表示之。

對於和的法則，亦有下列積的法則。對於 A, B 兩事件， A 的發生方法有 $n(A)$ 種，對於 A 之其中之一種的發生方法， B 有 $n(B)$ 種發生方法，那麼當 A 與 B 同時發生的時候，其場合數則有 $n(A) \times n(B)$ 。

例如，有 a, b, c 三個入口以及通往二樓的 p, q 兩個樓梯，對 a, b, c 三個入口每一入口樓梯的選擇方法只有 p, q 兩種，今有三個入口，故共有 $3 \times 2 = 6$ (種) 方法。像上圖一樣地分類的話，所經過的路

線一目了然，既不會重複，亦不容易漏掉。像這樣的圖稱為樹形圖，能適用於積的法則，在求場合的數時不失為一有效的方法。



樹形圖

有兩集合， $A = \{a, b, c\}$ ， $B = \{p, q\}$ ，各取 A, B 之一元素所做成之元素組為

$(a, p) (a, q) (b, p) (b, q) (c, p) (c, q)$

集合的直積

這些元素之全部集合稱為 A, B 的直積以 $A \times B$ 表示之。此元素若在上例中，所有上二樓之通路可用。

$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ 表示之。

● 精粹 ●

- (1) 和的法則 不同時發生的事件 A, B 之中任一事件發生之場合數為 $n(A) + n(B)$ (種)。
- (2) 積的法則 A 的發生方法有 $n(A)$ 種，對於 A 的每一種發生方法， B 的發生方法為 $n(B)$ 種時，則 A, B 同時發生的場合數為 $n(A) \times n(B)$ 種。
(1), (2) 對於三個以上事件時亦能成立。
- (3) 和與直積 有限集合 A, B 的元素個數各為 $n(A), n(B)$ 則
和 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
直積 $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

例題 1. 回答下列各問題。

(1) 1g, 2g, 4g, 8g, 16g 之砝碼各 1 個。這些砝碼可做成多少種重量？

(2) 長度各為 3cm, 5cm, 7cm, 8cm, 10cm 之五根棒子。由其中取出三根做成三角形，可做出多少種不同的三角形，試列舉之。

(3) 100 元欲購買 5 元, 10 元, 20 元之郵票三種，有幾種買法？但三種郵票必需包含在內。

解法 (1) 最高 $16+8+4+2+1=31$ (g) 故再 1~31 之間確定是否有遺漏的。

(2) 以 a, b, c 為三邊欲做出三角形的條件為 $b \sim c < a < b+c$ 即用 (最大邊) < (他兩邊之和), (最小邊) > (他兩邊之差) 之中任一條件即可。

(3) 若設所買郵票之張數各為 x, y, z 則 $5x+10y+20z=100$ ，由此求其 x, y, z 之正整數解。

解答 (1) 由 1g 及 2g 可做出 1, 2, $1+2=3$ (g) 三種。此與 1 個 4g 之砝碼可做出 $4+a$ ($a=1, 2, 3$) 即 1~7 (g) 種重量。此與 8g 的砝碼又可做出 $8+b$ ($b=1, 2, \dots, 7$) 即 1~15 (g) 種重量。此又與 16g 的砝碼可做出 $16+c$ ($c=1, 2, \dots, 15$) 即 1~31 (g) 種重量。亦即可做出由 1g 至 31g 共 31 種的重量。

(答) 31 種

研究 設 $C_4 \cdot 2^4 + C_3 \cdot 2^3 + C_2 \cdot 2^2 + C_1 \cdot 2 + C_0 \cdot 2^0 = y$ 時，用 2^n 的砝碼時 $C_n=1$ ，不用時 $C_n=0$ ($n=0, 1, 2, 3, 4$)， y 表示所用砝碼之重量，由 2 進法之 0~1111 表示，亦可用十進法表示即 0~31，由此即可求得答案。

(2) 長度為 a, b, c 之三線段欲做出三角形之條件為當 $a \geq b \geq c$ 時，

$$a < b + c$$

故考慮 $a=10, 8, 7$ 之各種情形，即得 (10, 8, 7), (10, 8, 5), (10, 8, 3),

(10, 7, 5), (8, 7, 5), (8, 7, 3), (7, 5, 3) …………… (答)

(3) 設所買郵票之張數各為 x, y, z ，

即 $x+2y+4z=20$ ，考慮 $z=1, 2, 3, 4$ 各情形時， x, y 之正整數解，

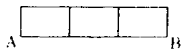
可得 $7+5+3+1=16$ (種)

(答) 16 種

擴展問題

回答下列各問題。

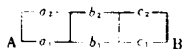
(1) 如右圖，由橫的兩條，縱的四條所成之道路。今由A至B，若途中所經過之處不得重複再走，試問有多少種走法？



(2) 2700的因數包括1和2700，總共有多少個？又因數的總和為若干？

(3) 由1至100之整數中，與14互質者有多少個？（除1與14外沒有其他公因數者）

要點



考慮上圖所示之路線

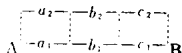
(a_1, b_2, c_2)

2700的因數為 $2^a \cdot 3^b \cdot 5^r$
 $a=0, 1, 2, b=0, 1, 2, 3,$
 $r=0, 1, 2$

14的數必為
 2或7的倍數

解答 (1) 橫的路若向左走則必經過相同地方。設向右走，橫

的路各為 $a_1, a_2,$
 b_1, b_2, c_1, c_2 由



A至B所經過的路

線以 (a_i, b_m, c_n) 表示之。（ i, m, n 為1, 2）

$\therefore 2 \times 2 \times 2 = 8$ (種) (答) 8種

(2) 分解質因數， $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ 故其因數的個數為 $(2+1)(3+1)(2+1)$
 $= 36$ (個)

因數之總和為 (參考p. 14 例題3之研完)
 $(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 8680$ (答) 36個, 8680

(3) 由1至100的整數，2的倍數，7的倍數的集合各為A, B則所求之數為

$$\begin{aligned} & 100 - n(A \cup B) \\ &= 100 - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 100 - (50 + 14 - 7) = 43 \text{ (個)} \cdots \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$

習題 (解答在第232頁)

1. 試展開下列的式子可得多少個項？

(1) $(a+b+c)(x+y+z+u)$

(2) $(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2+c^3)$

2. 三位數之正整數中，能被2, 3, 7任一個所整除的數有多少個？

例題 2. A, B 兩個骰子同時擲出時, 所發生點數各為 x, y 時, 下列各情況下所發生的數各為若干?

(1) 點數的發生方法以 (x, y) 表示時, (x, y) 的組數為若干?

(2) 若 $x + y = 7$ 時, 點數的發生方法 (x, y) 的組數為若干?

(3) 若 $2x - y = 7$ 時, 點數的發生方法 (x, y) 的組數為若干?

解法 (1) 能否利用積的法則, 視實際上所有點數的發生方法而定。(2), (3) 中, 討論滿足已知式 (x, y) 之數。此時, 討論方法有很多種, 要注意的是不能重複且不能漏掉。

解答 (1) 對於 $x = 1, 2, \dots, 6$ 時, y 亦有 $y = 1, 2, \dots, 6$, 故 (x, y) 的組數為 $6 \times 6 = 36$ (種) (答) 36 種

(2) 由 $x + y = 7$ 得 $y = 7 - x$, 故就 $x = 1, 2, \dots, 6$ 時, 可得下列 $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ 6 種不同之組數 (答) 6 種

(3) 由 $2x - y = 7$ 得 $y = 2x - 7$, 因 y 為奇數, 故就 $y = 1, 3, 5$ 之情況下可得下列 $(4, 1), (5, 3), (6, 5)$ 三種不同之組數 (答) 3 種

另解

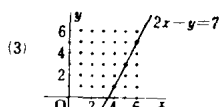
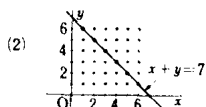
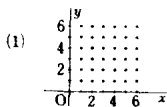
右邊的表及下面的圖為兩個骰子同時擲出時, 其點數所發生之全部情形, 由此求出滿足條件的數亦可。

(2)

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(3)

$y \backslash x$	2	4	6	8	10	12
1	1	3	5	7	9	11
2	0	2	4	6	8	10
3	-1	1	3	5	7	9
4	-2	0	2	4	6	8
5	-3	-1	1	3	5	7
6	-4	-2	0	2	4	6



另解 (1) 設 A, B 兩個骰子所發生的點數 x, y 的集合各為 A, B, 則

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(x, y) 的集合為 A, B 之直積, 故

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 6 \times 6 = 36 \text{ (種)} \quad (\text{答}) \quad 36 \text{ 種}$$

擴展問題

回答下列各問題。

(1) 用 100 元 2 個, 50 元 3 個, 10 元 4 個的硬幣的一部分或全部所付款之金額的種類為若干?

(2) 同樣品質的桔子 10 個, 分盛於同樣的水果盤三個, 問有多少種方法? 但每個盤子最少盛 1 個, 最多盛 5 個。

要點

|||||

對於 x 的 4 種選法之每一種, y 均有 2 種選法, 又對於上述之每一種方法, z 有 5 種選法, 故可應用積的法則。

例如, $m = 2$ ($l = 0$) 與 $m = 0$ ($l = 1$) 時即為重複。

$$50 + 50 + 10n = 100 + 10n$$

解答 (1) 因 50 元的硬幣 2 個與 100 元的硬幣 1 個金額相同, 故可考慮為 100 元 3 個, 50 元 1 個, 10 元 4 個。各硬幣所使用之枚數各分別為 x, y, z , 付款金額為 S 則

$$S = 100x + 50y + 10z, \text{ 而}$$

$$0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 4,$$

對於 x, y, z 各不同的值, S 亦有相異之值。

即除 $x = y = z = 0$ 之外,

$$\text{可得 } 4 \times 2 \times 5 - 1 = 39 \text{ (種)} \quad (\text{答}) \quad 39 \text{ 種}$$

另解 100 元 2 個, 50 元 3 個, 10 元 4 個, 其各種使用枚數分別為 l, m, n , 所付金額為 $100l + 50m + 10n$ (元)

而 $0 \leq l \leq 2, 0 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 4$, 此時

$m = 2, 3$ ($l = 0, 1$) 與 $m = 0, 1$ ($l = 1, 2$) 重複, 故除 $l = m = n = 0$ 之外, 有

$$3 \times 4 \times 5 - 2 \times 2 \times 5 - 1 = 39 \text{ (種)} \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) 桔子與水果盤均無區別, 最少 1 個, 最多 5 個的分盛方法為

$$(5, 4, 1), (5, 3, 2), (4, 4, 2), (4, 3, 3)$$

(答) 4 種

習題 (解答在第 232 頁)

3. 使用 10 元, 50 元, 100 元 3 種硬幣, 付款 360 元的方法有若干種?

但, 各種硬幣至少使用 1 枚。

4. 上面之擴展問題(2)中, 若無後者之附加條件時, 其方法有若干種?

例題 3. 回答下列各問題。

(1) 一個房間有 4 個門。由其中一個門進入，而由另一個門出來的方法有若干種？試作樹形圖說明之。

(2) 72 的因數有多少個？

(3) 由 1 至 200 之整數中，能被 18 及 24 同時整除之數有多少個？

解法 (1) 設 4 個門各為 A, B, C, D，作一樹形圖表各入口使用後之出口。

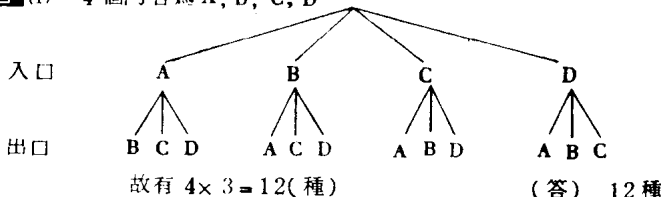
(2) 將 72 作質因數分解之得 $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ，即着眼於 $2^\alpha \cdot 3^\beta$ 之形式上。

(此時， $\alpha = 0, 1, 2, 3; \beta = 0, 1, 2$)

(3) 由 1 至 200 的整數中，18, 24 的倍數的集合各為 A, B，應用

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ 即可。}$$

解答 (1) 4 個門各為 A, B, C, D



(2) $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ，即 72 的因數為 $2^\alpha \cdot 3^\beta$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3; \beta = 0, 1, 2$)

故知所求因數的個數為 $4 \times 3 = 12$ (個) (答) 12 個

研 究 此 12 個的因數 $2^\alpha \cdot 3^\beta$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3; \beta = 0, 1, 2$) 恰好是 $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)$ 之展開項，因數之總和亦可由此式求得。一般而言， $M = a^m \cdot b^n$ 可作質因數分解時，M 的因數的個數為 $(m+1)(n+1)$ ，其總和為 $(a^0 + a^1 + \cdots + a^m)(b^0 + b^1 + \cdots + b^n)$

(3) 由 1 至 200 之整數中，18, 24 倍數的集合各為 A, B,

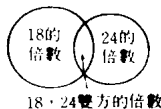
$$200 = 18 \times 11 + 2 \text{ 即 } n(A) = 11$$

$$200 = 24 \times 8 + 8 \text{ 即 } n(B) = 8$$

而 18, 24 的最小公倍數為 72,

$$\text{故 } 200 = 72 \times 2 + 8 \text{ 即 } n(A \cap B) = 2$$

$$\therefore n(A \cup B) = 11 + 8 - 2 = 17$$



(答) 17 個

擴展問題

A, B, C 三個骰子同時擲出時，所發生點數各為 x, y, z 時，試回答下列各問題。

- (1) 點數之和為 9 以上之 (x, y) 組有若干？
 (2) 點數之和恰好為 8 時之 (x, y, z) 組有若干？

要點

$$1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6$$

$$x + y = 9 \text{ 時}$$

$$y = 9 - x \leq 6 \text{ 即 } x \geq 3$$

$$1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6$$

(x, y) 之格子點共有 36 個，其中 $x + y \geq 9$ 的領域內的點即可數得出來。

$$y + z = 8 - x$$

就 $x = 1, 2, 3, \dots, 6$ 之各情形分別討論之。

解答 (1) 就 $x + y = 9, 10, 11, 12$ 之情形討論之，

$x + y$	9	10	11	12
x	6 5 4 3	6 5 4	6 5	6
y	3 4 5 6	4 5 6	5 6	6

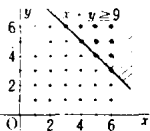
可得所求之 (x, y) 組為以上 10 種。(答) 10 種

另解 右圖中， $x + y \geq 9$ 的

領域內的格子點 (x, y) 有 10 個。(答) 10 種

$$(2) \quad x + y + z = 8,$$

當 $x = 1$ 時， $y + z = 7$ 。



此 (y, z) 組如右表

y	1	2	3	4	5	6
z	6	5	4	3	2	1

$x = 2, 3, \dots, 6$ 各情形，如下表

x	2	3	4	5	6
y	1 2 3 4 5	1 2 3 4	1 2 3	1 2	1
z	5 4 3 2 1	4 3 2 1	3 2 1	2 1	1

故由以上兩個表的結果得知

有 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ (種) (答) 21 種

習題 (解答在第 232 頁)

5. A, B 兩個骰子同時擲出時，試求下列各情形所發生的數。

- (1) 點數的和為偶數。 (2) 點數的積在 20 以上。

6. x, y, z 為正整數時，滿足 $x + 2y + 3z = 20$ 的 (x, y, z) 組有若干？

2. 排列・環狀排列

由 a, b, c, d 不同之 4 個中，任選 2 個排成一列，今考慮其排列方法。

兩個並排其先頭者為 A，其次者為 B，依先頭者之順序分類之，可得

A	a	b	c	d
B	$b\ c\ d$	$c\ d\ a$	$d\ a\ b$	$a\ b\ c$

即就 A 中的 a, b, c, d 各情形觀之，B 均有 3 種排列方法，故由積的法則可知

$$4 \times 3 = 12 (\text{種})$$

一般而言，由相異之 n 個物件中取 r 個排成一列的方法稱為由 n 個之中取 r 個的排列 (Permutation)，其總數以 ${}_nP_r$ 表示之。

排列

與上相同，由積的法則得

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), (n \geq r)$$

n 的階乘
 $n!$

今， $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ (n 的階乘) 表示之，則

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, {}_nP_n = n! \quad (\text{但 } 0! = 1)$$

「由 0, 2, 4 作出之三位數的正整數」除云先頭為 0 之情形，

$$\text{共有 } {}_3P_3 - {}_2P_2 = 3! - 2! = 4 (\text{種})$$

其次，考慮若干個相異的物品之環狀排列。A, B, C, D, E, F 六個文字作環狀排列，其排列方法就是彼此間相對關係的問題。從而得知，任一文字 (例如 A) 先固定後，再考慮所剩下 5 個文字的 5 種情形之排列即可。故其環狀排列之數為 $(6-1)! = 5!$ (種)。

環狀排列

又，此環狀排列之總數由下列的方法討論之即可。A, B, C, D, E, F 六個文字排成一列的方法有 $6!$ (種)。將這些排列連接成一環狀則為下列之情形：

- (1) A BCDEF (2) BCDEFA (3) CDE FAB

