# 逻辑代数讲义

附：集合论讲义上册习题解答

张 锦 文

北京广播电视大学印

# 目　录

# 前言

用数学方法研究逻辑命题及其关系的领域称为逻辑代数。它首先由布尔（G·Boole）在他的著作《逻辑的数学分析》（1847年）及《思维规律》（1854年）中提出，故亦称布尔代数。本世纪20年代在开关线路、自动控制和逻辑设计中有了广泛的应用，理论本身也获得了迅速发展。

命题演算是研究命题之间的逻辑推理的。它是布尔代数的另一种表现形式，集合代数也是布尔代数的一种表现形式。在集合论中我们已详细地讨论了集合代数，这里就不再重述了。我们用中学数学中的集合论知识作为引子，主要讨论布尔代数与命题演算，这些内容对中学数学的教学是很有好处的。它可以使我们思维清楚，并提高思维的能力和技巧。

谓词演算是命题演算的深入和发展，在集合论中我们已经反复使用了它的一些规律，因此，作为它的总结，我们也讨论了谓词演算的初步知识，有兴趣的读者可参阅我们列的文献。

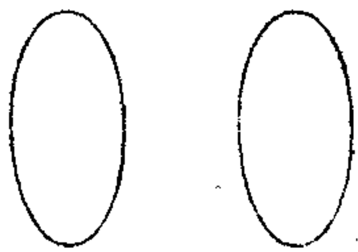
本册还附有集合论上册约150余题的题解，

# 第一章　中学数学中的集合论知识

集合论知识在现行的中学数学教材中，是从头至尾地贯穿着的 个基本概念。这对学生正确地思考数学问题是很有好处的。它既可以具体地分析问题，又可以概括地总结问题和解决问题。我们现在就中学数学教材中的集合论知识略述几点。

## §1　数集合的区分与总括

在小学中，学生本质上是学习自然数的知识，在自然数集合中进行加减乘除四则运算，中学数学的第一课就讲了负整数，这当然是应当从对减法的封闭性要求必须扩充的对象，从而把数集合扩大到了整数集合。在初中数学第一册第四页就有正数集合和负数集合的图形。让学生具体地在其中填写一些正数和一些负数。



正数集合　　　负数集合

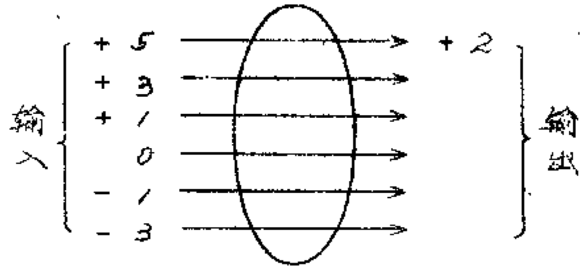
图　1

接着又讲有理数，这当然是应当从对除法的封闭性必须扩充的对象着手进行的，并且讲了：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数} \text{——正整数、零、负整数}\\ \text{分数} \text{——正分数、负分数。}\end{cases}$$

在初中数学第一册第 20 页为了让学生认识数的加减法的

性质，它给出了一数集合$\{5，3，1，0，-1，-3\}$，然后对这一集合中的每一元素都实行加上$-3$的运算，求相应的集合：

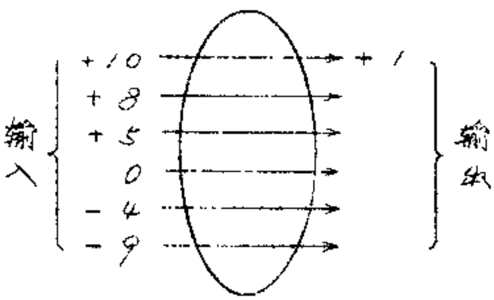



$x+(-3)=?$

图 2

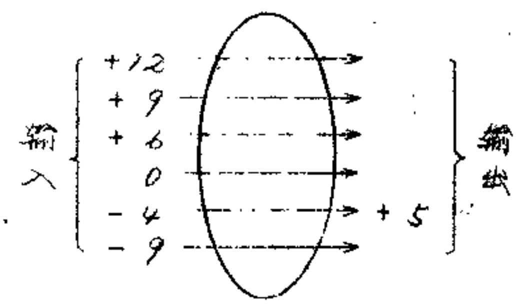
学生经过计算，自然可获得集合$\{2，0，-2，-3，-4，-6\}$。

类似的问题又出现在该书第25页中：




$x+(-9)=?$

图 3




$x-(-9)=?$

图 4

在该书36页给出集合$\{8，6，3，0，-1，-5\}$相应数乘上$(-3)$求所得的值域，38页又给出集合：$\{10，8，4，1，0，-5，-20\}$，相应数除以$(-5)$所得值域，第44页给出一集合，求其平方数的值域。全书始终贯穿给出一集合，并求出经过某种运算所得出的集合。

这样处理既可加深对数集的认识，又为系统讲授函数和不等式做了准备。

初中数学第二册把集合的概念和运算向前推进了一大步。第二页就引进了方程式的解集合的概念："由二元一次方程的所有解构成的一个集合，叫做二元一次方程的解的集合。"这就产生了两个集合的交集合运算，它列举求解集合的两个方程：

$$x + y = 7 \qquad (1)$$

$$x - y = 3 \qquad (2)$$

这时： $\begin{cases} x = 0, \\ y = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2.7, \\ y = 4.3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ y = 2; \end{cases}$

等等都是方程（1）的解。

$\begin{cases} x = 2.7, \\ y = -0.3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8, \\ y = 5; \end{cases}$

等等都是方程（2）的解。

可以看出 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

既是方程（1）的解，又是方程（2）的解。

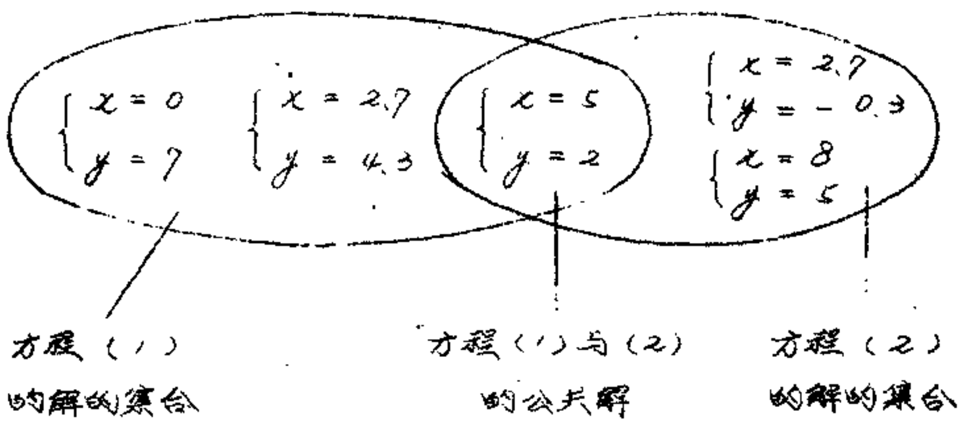



图 5

在初中数学第三册中，不但包含求一个运算的值域（集合），而且也包含求定义域（集合）的问题，它还把数系扩充到了实数集合，区分为：

$$实数集合\begin{cases}有理数集合\\无理数集合\end{cases}$$

在初中数学第四册中，讨论方程式的解集合，例如方程式 $x^4-6x^2+5=0$，它的实数解（实根）集合 $S$ 为 $\{1,-1,\sqrt{5},-\sqrt{5}\}$，它的有理数解集合就是 $S\cap Q=\{1,-1\}$，而 $x^2+1=0$ 就没有实数解，即它的实数解集合为 $\phi$，

§2．不等式及其解集合

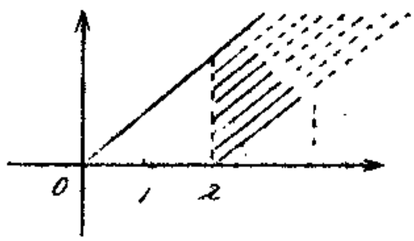



图 6

不等式问题在中学数学中讲的很多，这主要是求各个不等式的解集合和若干个不等式的交集合，

例1 $\begin{cases}x\leqslant y\\2<x\end{cases}$　例2 $\begin{cases}0<x-y+1\\2x+y-2<0\end{cases}$

其解如图6．

令．$l_1$：$x-y+1=0$

$l_2$：$2x+y-2<0$

再令：

$S_1:=\{\langle x,y\rangle\mid 0<x-y+1\}$

$S_2:=\{\langle x,y\rangle\mid 2x+y-2<0\}$

这样：$S=S_1\cap S_2$

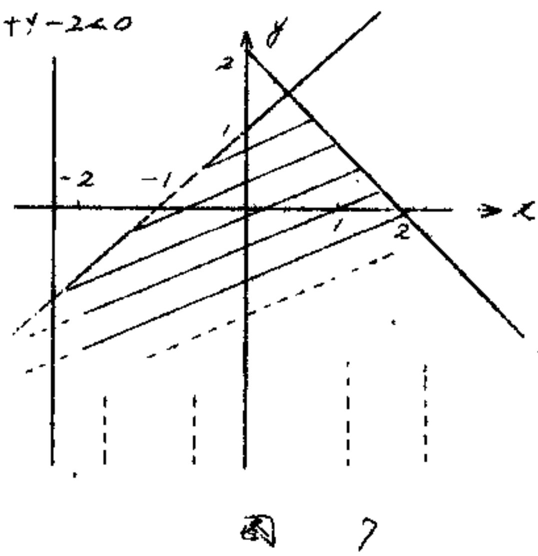



图 7

如图7所示，带线条的部分正是我们的解集合。

§3．轨迹问题和曲线方程

在初等几何中，轨迹就是满足某种条件的点的集合（实数的有序对集合：

$$C:=\{<x,y>|C(x,y)\wedge x\in R\wedge y\in R\}$$

二次曲线就是：

$$\{<x,y>|ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\}$$

其中$a$、$b$、$c$不同时为$0$。

§4　函数

在高中数学第一册中对函数是这样引入的："设在某变化过程中有两个变量$x$和$y$，变量$y$依赖于$x$。如果对于$x$的每一个确定的值，按照某个对应关系，$y$都有唯一的值和它对应，$y$就叫做$x$的函数，$x$叫做自变量。$x$的取值范围叫做函数的定义域。和$x$的值相对应的$y$的值叫做函数的值，函数值的集合叫做函数的值域。"

这样讲函数，字号大了一点，不过它们就是一个有序对且有单值性的集合。

我们令$S$为函数$f$的定义域，对于$x\in S$，都有唯一的$y$，使得$y=f(x)$，也就是有$<x,y>\in f$。

因此，在中学数学中对函数的一切研究都是集合论的课题，而且这样会更直接易懂。

§5、排列、组合与数学归纳法

这部分内容的集合论性质，我们已多次谈到，这里从略。

# 第二章 布尔代数

## §1 格

在偏序集合$<S, \leqslant>$上我们可以建立格的概念，或者说格是满足一定条件的一偏序集合。

定义1 一偏序$<S, \leqslant>$称为一格，如果对于任意$x$，$y \in S$，都有：

1. $\{x, y\}$关于$R$的最小上界$x \oplus y$属于$S$。
2. $\{x, y\}$关于$R$的最大下界$x \oplus y$属于$S$。

也就是说，当我们用$x \oplus y$表示$\{x, y\}$的最小上界，用$x \otimes y$表示$\{x, y\}$的最大下界时，偏序集合$<S, \leqslant>$是一格，如果我们有：

$$\forall x \in S \, \forall y \in S \, \exists ! Z \in S \, (Z = x \oplus y) \tag{2.1}$$

$$\forall x \in S \, \forall y \in S \, \exists ! Z \in S \, (Z = x \otimes y) \tag{2.2}$$

例1. 并非每一偏序都是一格，例如图1所描述的偏序就不是一个格，因为$\{20, 24\}$在域中没有上界。

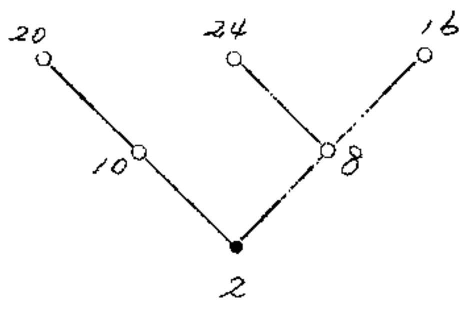



图1 一偏序但不是一格

例2　图2描述一格，亦即，S：={a，b，c，d，e}，并且关系R为由下边的点向上连线，有连线的即称为有关系R。

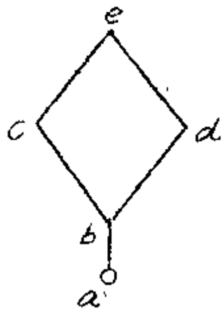



图2　一个格

定理2.1　若<S，≤>是一格，那么，对任意的$x$，$y$，$z\in S$，都有：

(1) 析等律：$x\oplus x=x$　(2.3)

合等律：$x\otimes x=x$　(2.4)

(2) 交换律：$x\oplus y=y\oplus x$　(2.5)

$x\otimes y=y\otimes x$　(2.6)

(3) 结合律：$(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$　(2.7)

$(x\otimes y)\otimes z=x\otimes(y\otimes z)$　(2.8)

(4) 吸收律：$x\oplus(x\otimes y)=x$　(2.9)

$x\otimes(x\oplus y)=x$　(2.10)

证明，由定义1及最小上界、最大下界的性质，上述定理是直接获得的。

定理2.2　一集合S，并若能在其上定义两个运算⊕、⊗，使得⊕、⊗对S是封闭的，并且满足上述性质(1)——(4)，若在S上用下述任一方式定义≤：

$$x\leq y:=x\oplus y=y \qquad (2.11)$$

$$x\leq y:=x\otimes y=x \qquad (2.12)$$

则<S，≤>为一格。

证明：首先证明(2.11)与(2.12)的定义是等价的。因为设(2.12)由(2.9)及(2.3)，我们有：

$$x\oplus y=y\oplus x=y\oplus(x\otimes y)=y$$

故：$x \leqslant y$，也等价于：$x \oplus y = y$。

反之，设（2·11），由（2·10）及（2·4），我们有：

$$x \otimes y = x \otimes ( x \oplus y ) = x$$

故：也有 $x \leqslant y$ 等价于 $x \otimes y = x$。

其次证明，若集合 $S$ 满足定理 2·2 的前提，则 $< S, \leqslant >$ 是一偏序，我们仅需证明用（2·11）定义 $\leqslant$ 的情形。亦即证明 $< S, \leqslant >$ 必然满足自返性、反对称性和传递性。

（1）自返性，由幂等律直接获得。

（2）反对称性：$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$，亦即

$$x \oplus y = y \quad 和 \quad y \oplus x = x$$

故：

$$x = y \oplus x = x \oplus y = y$$

（3）传递性：$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$，亦即：

$$x \oplus y = y \quad 和 \quad y \oplus z = z$$

因此，

$$x \oplus z = x \oplus ( y \oplus z ) = ( x \oplus y ) \oplus z$$
$$= y \oplus z = z;$$

所以就有：$x \oplus z = z$，即 $x \leqslant z$。

现在，我们来证明 $x \oplus y$，$x \otimes y$ 分别是 $\{ x, y \}$ 的最小上界和最大下界，为此，我们必须证明：

$$x \otimes y \leqslant x, \qquad x \otimes y \leqslant y \qquad (2·13)$$
$$x \leqslant x \oplus y, \qquad y \leqslant y \oplus x \qquad (2·14)$$
$$z \leqslant x \wedge z \leqslant y \longrightarrow z \leqslant x \otimes y \qquad (2·15)$$
$$x \leqslant z \wedge y \leqslant z \longrightarrow x \oplus y \leqslant z \qquad (2·16)$$

对于（2·13），由（2·12）我们有：

$$x \otimes y \leqslant x \longleftrightarrow ( x \otimes y ) \oplus x = x$$
$$\longleftrightarrow x \oplus ( x \otimes y ) = x \qquad (2·17)$$

并且（2·17）的右边就是公式（2·9），所以左边成立，亦即（2·13）的第一个公式成立，类似地有第二个公式。

对于（2·14），我们希望证明：

$$x \otimes (x \oplus y) = x$$
$$y \otimes (x \oplus y) = y$$

而这正是（2·10），对于（2·15），就是为：

$$z \leqslant x，即\ z \otimes x = z$$
$$z \leqslant y，即\ z \otimes y = z，所以有$$
$$z \otimes (x \otimes y) = (z \otimes x) \otimes y = z \otimes y = z$$

类似地由 $x \oplus z = z$ 和 $y \oplus z = z$，我们有：

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus z = z$$

这就是：　$x \oplus y \leqslant z$

综上，我们已完成了定理2·2的证明。

根据上述定理，我们就格的第二个定义，亦即结构<S，⊕，⊗>，其中S是不空集合，S上的二个二元运算⊕，⊗满足条件（1）——（4），这时，我们就称结构<S，⊕，⊗>为一格。

一格<S，⊕，⊗>并满足分配律：

（5）分配律，

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) + (x \otimes z) \qquad (2 \cdot 17)$$
$$x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z) \qquad (2 \cdot 18)$$

就叫做分配格。

例3，取 $2$：　$\{0，1\}$，并且令 $1 \oplus 1 = 1$，$1 \oplus 0 = 1$，$0 \oplus 1 = 1$，$0 \oplus 0 = 0$，
$1 \otimes 1 = 1$，$1 \otimes 0 = 0$，$0 \otimes 1 = 0$，$0 \otimes 0 = 0$，亦即如图3，运算⊕是取极大值，运算⊗是取极小元，不难验证<2，⊕，⊗>构

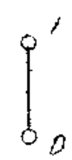


图3　二元分配格

构成一分配格。

例4 $<P(Z), \cup, \cap>$ 形成一分配格，因为我们知道 $P(Z)$ 中有四个元，$\phi$、$\{\phi\}$、$\{1\}$ 和 $Z$，不难验证，它满足上述分配格定义的一切性质，并且我们可以按包含次序称 $\phi$ 为它的最小元，而 $Z$ 为它的最大元。

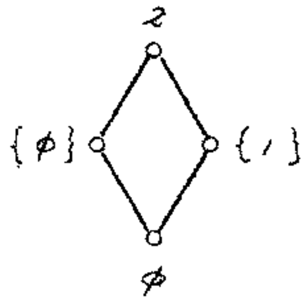



图4 四元分配格

例5 令S为开区间 $(0, 1)$，并且定义运算 $\oplus$、$\otimes$ 如下，

$$x \oplus y = Max\{x, y\}$$
$$x \otimes y = Min\{x, y\}$$

其中 $Max\{x, y\}$ 和 $min\{x, y\}$ 分别是实数域中的按自然次序取极大元和极小元的运算，不难验证 $<S, \oplus, \otimes>$ 也构成一分配格。但是在 $(0, 1)$ 中按自然次序没有最大元和最小元，也就是说，此格无最大元、最小元。

由上述例子，我们已经知道，一个格可以有最小元、最大元，也可以没有这种元素。当它有最小元时，有时我们记作 $0_S$，当它有最大元时，有时我们记作 $1_S$，并且在不引起误解时，我们就分别写做0和1，它们满足：

$$\forall x \in S\ (0 \leq x)$$
$$\forall x \in S\ (x \leq 1)$$

所以就有：对任意 $x \in S$

$$x \oplus 0 = x \qquad x \otimes 0 = 0 \qquad (2 \cdot 19)$$
$$x \oplus 1 = 1 \qquad x \otimes 1 = x \qquad (2 \cdot 20)$$

§2 布尔代数的定义：

一个布尔代数是一结构 $<S, \oplus, \otimes, \circledast, 0_S, 1_S>$，其中 S 是一集合，$\oplus$，$\otimes$ 为二个二元运算，$\circledast$ 为一个一元运算，$0_S$，$1_S$ 为 S 的二个特殊的元，并且满足条件：对于任意 $x, y, z \in S$，对于运算 $\oplus$、$\otimes$ 都有交换律、结合律、吸收律和分配律成立，此外，关于运算 $\circledast$ 和元素 $0_S$、$1_S$ 还有性质。

（6）排中律： $x \oplus x^{\circledast} = 1_S$ （2·21）

（7）矛盾律： $x \otimes x^{\circledast} = 0_S$ （2·22）

（8）相异律： $0_S \neq 1_S$ （2·23）

成立。

不难看出，对于任一布尔代数 $<S, \oplus, \otimes, \circledast, 0_S, 1_S>$ 而言，结构 $<S, \oplus, \otimes>$ 都是一分配格。人们常常把 $\circledast$ 称作补运算，这时布尔代数正是一有补的分配格，所以也被称为一布尔格。

对于给定的布尔代数 $<S, \oplus, \otimes, \circledast, 0_S, 1_S>$ 如同格上一样，我们可以定义一个 S 上二元关系如下：

$$x \leqslant y := x \oplus y = y$$

关系 $\leqslant$ 叫做这一布尔代数的自然次序，并且 $0_S$ 称为 S 的最小元，$1_S$ 称为 S 的最大元。

例 6，在例 3 的基础上，对二元格再定义一个一元运算 $\circledast$，使 $0^{\circledast} = 1$，$1^{\circledast} = 0$，就形成一个二元布尔代数，人们常常把运算 $\oplus$ 简写做“+”，把运算 $\otimes$ 简写做“·”，甚至连这个圆点也省掉。把运算 $\circledast$ 简写做“－”，例如“$\bar{0} = 1$”、“$\bar{1} = 0$”。由于这一布尔代数是最基本而且应用又极广泛，所以我们在 § 3 —— § 4 中将详细讨论它的性质和应用的逻辑。

例 7 在例 4 的基础上再对 $P(2)$ 中的元再定义补运算（实质上是相对于 2 的补）如下，对于任意 $x \in P(2)$，令：

$$\bar{x} := 2 - x$$

这样，取2为最大元，0为最小元，不难验证这也构成一布尔代数，（注意：$\{\overline{0}\}=\{1\}$，$\{\overline{1}\}=\{0\}$），这一布尔代数可以记作＜$P(2)$，∪，∩，－＞，为了清楚起见，指出它的最小元与最大元，就记做＜$P(2)$，∪，∩，－，0，2＞。

例5，类似于例7，我们不难验证＜$P(3)$，∪，∩，－＞也构成一布尔代数。

其中补的运算是相对于3的补，亦即，对于任意$x\in P(3)$，我们有：

$\overline{x}:=3-x$

由此可知$\{\overline{2}\}$为$\{0,1\}$，而$\{\overline{0,1}\}=\{2\}$。

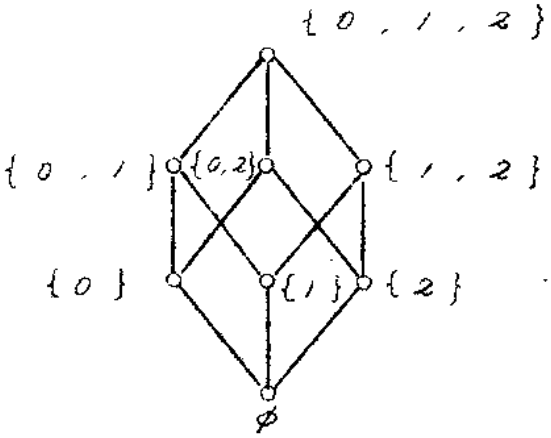



图5　一个八元布尔代数

类似地有：$\{\overline{1}\}=\{0,2\}$，而$\{\overline{0,2}\}=\{1\}$。

§3　二元布尔代数

在例6中我们已经构造了一个二元布尔代数，这是一个最简单、最基本而应用面又非常广泛的一个布尔代数，现在我们对它有必要进行一些详细的讨论，也可重述这一代数为＜2，+，·，－，0，1＞，其中$2=\{0,1\}$，"+"、"·"和"－"这三个基本函数的定义如下表所表示的。亦即当$x$，$y$取如下值时，表达式$x+y$、$x\cdot y$和$\overline{x}$，$\overline{y}$取值为：

| $x$ | $y$ | $x+y$ | $x \cdot y$ | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

表1　三个基本函数的取值表

并且还可以定义一关系≤，令$0<1$，因此这一二元布尔代数也可简写成有序对<2；≤>。

布尔代数<2，≤>在现代技术特别是电子技术中有着广泛的应用，所以，我们再做一些具体的分析，为简便起见，我们把它记做B。

在工程技术中常把0与1看做两种状态，或者把它们作为表达两种状态的符号，并且人们把仅在2中取值的变元叫做布尔变量，$x$，$y$，$z$……表示布尔变量，把"+"叫做"或"运算，把"·"叫做"乘"或"与"运算，把"－"叫做"非"运算。

"非"运算是一元函数，当把$x$做为两种状态输入电子反相器时，其输出即为$\bar{x}$；或者说，$x$通过"非"门后改变了原来的状态；又如图6所示。

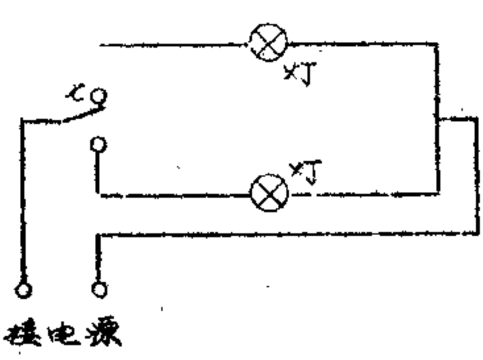



图6　非门示意图