

新 數 學

中 學 適 用

半 羣 學 社 編 著

第 一 冊

下 卷



聯 合 書 院 出 版 社

新 數 學

中 學 適 用

半 羣 學 社 編 著

第 一 冊

下 卷



聯 合 書 院 出 版 社

193142

全 部 版 權

屬

半 羣 學 社

總 編 輯

周紹棠 理學士（數學），哲學博士（數學）

編 輯

潘海紅 理學士（數學）

鄭肇楨 文學士（數學）

潘煒棠 文學士（數學）教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士（數學），教育學士

何兆倫 理學士（數學），英國 IMA 會士

潘鎮邦 文學士（數學）

徐思明 文學士（數學） 教育文憑

經 理 編 輯

彭 錫 恩 文學士

良友印刷有限公司印製

香港西灣河街九至十一號

歐几里德



EUCLID
LIVED ABOUT 300 B.C.

第一冊 下卷

目 錄

第五章 有向數	1
5.1 簡易方程	1
5.2 整數	4
5.3 有理數	27
5.4 文字的應用	35
5.5 模算術	37
本章概要	41
雜 題	41
第六章 三維空間幾何	47
6.1 簡單的三維空間圖形	47
6.2 立方體的分割	49
6.3 立體模型製作——五個正多面體	51
6.4 尤拉公式	57
6.5 旋轉曲面	58
本章概要	61
雜 題	61
第七章 面積與體積	64
7.1 面積比較	64
7.2 圖形的分割和合併	73
7.3 畢氏定理	78
7.4 圓的面積	80
7.5 體積	83
本章概要	86
雜 題	86
第八章 集 (續)	90
8.1 母集及餘集	90
8.2 差集及對稱差	96
8.3 有限集	100
本章概要	104
雜 題	105
中英名詞對照表	108

第五章



有向數

5.1 簡易方程

“某數的一半加六恰等於這數的兩倍。這數等於什麼？”

解決上面問題的方法，在數學上是有用而且重要的，由於解決同類問題，數學的一部分便隨着發展。

我們先由一個簡單問題開始：某數的 3 倍是 45，這數等於什麼？

以 x 代替這個未知數，則這個問題便可下式表達：

$$3x = 45$$

($3x$ 是 3 倍 x 的簡寫)

那些 x 值能令上述真確的，稱為這方程的**解答集**或**真值集**。解答集內含有一個或多個或沒有元素，求出解答集的過程稱為“解方程”。

凡一個式包括有等號“=”的稱為方程。解方程的一個辦法是將一集數字的元素逐個代替 x 而找出能令方程真確的數值，但這個方法是冗長而不合實用的，我們將用其他方法來解方程。當這個數 x 已求得，這數稱為適合方程；若全數適合方程

的數已求得，則這方程稱為已解。

要解 $3x = 45$ ，我們根據下面的理由：一個方程的兩邊相等則兩方用同一數（例如 3）來除，結果也是相等的。由此即得 $x = 15$ ，這數 15 就是方程的解答。這是方程的唯一解答而無其他，所以我們可說方程 $3x = 45$ 的解答集是 $\{15\}$ 。

一個含有 x 的方程是一語句，我們不能確定它是真或假，這種語句稱為開句，若以某些數字代替 x ，則這語句（方程）可能真確。

一般情形，解方程的步驟是逐步用簡單而相當的方程來代替，直至得“ x 等於某數”為止。在解方程的步驟中，有時兩方加或減相同的數，有時同乘以或除以相同的數，在任何情形兩方都不能同以 0 來除（參看 § 5.27）。

例 1

解方程

$$3x - 5 = 25$$

解：

$$3x - 5 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3x = 25 + 5 \quad (\text{加 } 5 \text{ 於兩方})$$

$$\Leftrightarrow 3x = 30$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \quad (\text{兩方除以 } 3)$$

故解答集是 $\{10\}$ 。

注意：1) $\Leftrightarrow$ 是表示“相當”的符號，是用來連接兩個相當的語句或命題的。所謂相當就是用邏輯推理可以由一語句而推得另一語句的意思，也可以說兩語句同時是真或同時是假。

2) 在方程後的括號，是解釋由一方程而化為另一方程的理由，將來熟習了就可以略去。

得了解答後，可以驗算如下：

若 $x = 10$ ，則

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 3 \times 10 - 5 \\ &= 30 - 5 \\ &= 25. \end{aligned}$$

例 2

解方程

$$\frac{1}{2}y + 6 = 2y$$

解：

$$\frac{1}{2}y + 6 = 2y$$

$$\Leftrightarrow y + 12 = 4y \quad (\text{兩方乘以 } 2)$$

$$\Leftrightarrow 12 = 4y - y \quad (\text{兩方減去 } y)$$

$$\Leftrightarrow 12 = 3y$$

$$\Leftrightarrow 4 = y \quad (\text{兩方除以 } 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 4$$

注意：當一方程的兩方乘以或除以一數時，方程的每一項都要乘以或除以該數。

驗算：若 $y = 4$, 則

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y + 6 &= \frac{1}{2} \times 4 + 6 \\ &= 2 + 6 \\ &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又} \quad 2x &= 2 \times 4 \\ &= 8.\end{aligned}$$

故解答集是 $\{4\}$.

例 3

某人賣出若干件貨品，每件賣價 \$5.00 共賺了 \$15。若貨品每件買價是 \$3.5，那麼他共賣出了多少件貨品？

解：

假設這人賣出 p 件貨品，這 p 件貨品的買價是 $\$(3.5p)$ ，而賣價是 $\$(5p)$ ，故他的利潤是 $\$(5p - 3.5p)$ ，這個恰和 \$15 相等，由此可立一方程如下

$$\begin{aligned}5p - 3.5p &= 15 \\ \Leftrightarrow 1.5p &= 15 \\ \Leftrightarrow p &= 10\end{aligned}$$

答：這人賣了 10 件貨品。

習題 5A

(下列各題中有些可用口答)

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1) $3x = 21$ | 2) $4x = 28$ |
| 3) $12x = 144$ | 4) $5 + x = 7$ |
| 5) $8 + x = 24$ | 6) $9 + x = 17$ |
| 7) $x - 8 = 2$ | 8) $x - 13 = 7$ |
| 9) $x - 17 = 8$ | 10) $2x - 3 = 15$ |
| 11) $4x - 3 = 21$ | 12) $15 - 2x = 5$ |
| 13) $7 - x = 1$ | 14) $\frac{1}{2}x = 4$ |
| 15) $\frac{1}{5}x = 6$ | 16) $\frac{1}{2}x - 1 = 7$ |
| 17) $\frac{1}{4}x + 5 = 10$ | 18) $19 - \frac{1}{3}x = 1$ |
| 19) $14 - \frac{1}{4}x = 2$ | 20) $15 = \frac{1}{3}x + 6$ |
| 21) $20 = \frac{1}{2}x - 4$ | 22) $\frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 6$ |
| 23) $\frac{3}{4}x + 22 = \frac{8}{7}x$ | 24) $\frac{6}{35} = \frac{x}{70}$ |

25) $4z - 3 = 21 + z$

26) $18 + 5x = 2x + 27$

27) $4p - 9 - p = 12$

28) $8q + 7 = 10 + 2q$

29) $6m - 3 = 17 - 18m$

30) $\frac{5}{6}x + 7 = 2x$

31) $\frac{7}{9}y = 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3}y$

32) $\frac{4}{5}z = 12$

33) $\frac{9}{10}s = s - \frac{1}{15}$

34) $x + \frac{1}{2}x = 45$

35) 某數乘 8，將結果減去 10，這時恰是原數的 3 倍。試求這數。

36) 一個三角形三內角的和是 180° 。設某三角形的三角是 $2x^\circ$ ， $2x^\circ$ 和 x° ，那麼 x 是什麼？

37) 兩數的和是 258；這兩數中一數是他數的兩倍，試求這兩數。

38) 甲、乙兩人相隔 200 哩。他們同時在正午起程，駛汽車相向而行，甲每小時行 26 哩，乙每小時行 14 哩，問他們何時相遇？

39) 一幅布長 65 碼。將這布剪為兩幅，其一比較另一幅長了 15 碼，問這兩幅布各有多長？

40) 用一種顏色來印刷一頁書，費用是 4 角；用兩種顏色來印刷一頁書，費用是 1 元。某冊書共有 125 頁，印刷費是 \$95，問這冊書內有幾頁是印兩種顏色的？

5.2 整數

5.21 負數

設想一個數，加上 4，結果是 3。這數是什麼？有沒有這數存在呢？

照上節的方法，這問題要求出一個 x 值以滿足下列方程：

$$x + 4 = 3.$$

解方程時，兩方同減去 4，可得：

$$x = 3 - 4.$$

$3 - 4$ 的運算是一個問題，直至現在為止，我們祇知求 $4 - 3$ 而不知求 $3 - 4$ ，而在數學上我們常遇到小數減大數的問題，我們祇好當作這問題為不可能而放置不理，或者發明一種新的數使方程 $x + a = b$ (a, b 都是自然數) 恒有解答。發明新數的辦法並不是現在才有的，當我們不能用整數來適合方程 $3x = 14$ 的時候，我們便發明了分數來解決這類問題。

在數學的發展史上，當一些現存的數字不能滿足某些條件時，數學家們就會發明些新數字以克服困難，這些新數字在初發明的時候可能不合實用，而遲些時可能用途很廣，我們將可見到好些這樣的例子。

現在我們將發明些新數使減法通行無阻。

以 $3 - 4$ 為例，這結果必然是一新數，在未給與符號來表示 $3 - 4$ 之前，我們知道 $4 - 3$ 的結果是 1，將 $3 - 4$ 內兩數字互調便成了 $4 - 3$ ，由是知 $3 - 4$ 和 1

有關，故把結果寫成 -1 。符號“ $-$ ”在 1 字之前，不要和減號相混，我們將 -1 讀為“負一”，而 -1 是一個負數。

同理，因 $6 - 5 = 1$ ，故 $(5 - 6)$ 亦等於 -1 ，照此類推：

$$-1 = 1 - 2 = 2 - 3 = 3 - 4 = 4 - 5 = 5 - 6 = \dots\dots$$

依同法，更可得下列好些負數：

$$-2 = 1 - 3 = 2 - 4 = 3 - 5 = 4 - 6 = 5 - 7 = \dots\dots$$

$$-3 = 1 - 4 = 2 - 5 = 3 - 6 = 4 - 7 = 5 - 8 = \dots\dots$$

等等。

一個負數等於一連串的減法的結果是不足為奇的，由分數我們也會得到類似的結果：

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots\dots$$

由是我們由自然數及減法發明了負數。這集負數稱為**負整數集**，負整數可滿足好些簡易方程。

例

解下列方程

$$x + 3 = 2.$$

解：

$$x + 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

習題 5B

(本習題可用口答)

1) 由下列減法可得那個負整數？

a) $4 - 12$

b) $5 - 18$

c) $6 - 8$

d) $7 - 13$

e) $2 - 9$

f) $7 - 21$

g) $5 - 21$

h) $4 - 12$

i) $26 - 105$

j) $34 - 80$

k) $46 - 53$

l) $21 - 37$

m) $35 - 41$

n) $108 - 171$

o) $219 - 500$

p) $128 - 250$

2) 解下列方程：

a) $4 + x = 1$

b) $8 + x = 3$

c) $7 + x = 5$

d) $x + 8 = 4$

e) $y + 10 = 4$

f) $z + 30 = 7$

g) $y + 18 = 3$

h) $28 + p = 10$

i) $x + 26 = 19$

j) $w + 73 = 48$

5.22 整數“0”和正整數

負整數的創立並不曾解決了全部簡易方程的問題。試看方程 $x + 3 = 3$ 解答是 $3 - 3 = 0$ 。同樣，對於任何自然數 a ，方程 $x + a = a$ 的解答也是 $x = 0$ 。0 不是一個負整數，也不是一個自然數，0 的介入使方程 $x + a = a$ 恒有解答。

在上節裡我們曾用一串自然數的減法來表示負整數。同樣從一串自然數的減法的結果。

$$1 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 5 - 4 = \dots\dots$$

$$2 = 3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 6 - 4 = \dots\dots$$

可得整數 1, 2, ... 等，這些數用符號“+”加在前面，稱為**正整數**，由是得：—

$$+1 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 5 - 4 = \dots\dots$$

$$+2 = 3 - 1 = 4 - 2 = 5 - 3 = 6 - 4 = \dots\dots$$

等等。“+1”讀作“正一”。

現在將我們所發明的數概括如下：

- 1) 數字“0”（零）
- 2) 一集負整數 G ，
- 3) 一集正整數 P 。

“0”，“ G ”及“ P ”合而為一整數集 Z 。（0 是沒有符號的，沒有 $+0$ 和 -0 的存在）， G 和 P 合併而成**有向數集**。

我們可用直線上等距離的點來表示整數，如下圖：

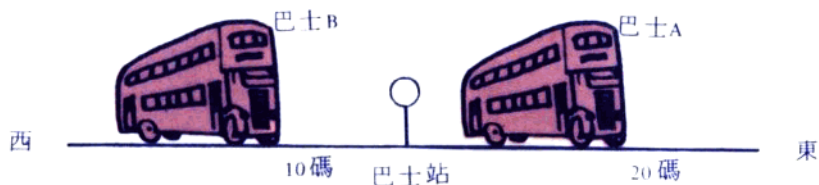


記“0”的一點稱為**原點**。它把直線分為兩段，向右是正整數，稱為這綫的**正向**；向左是負數，稱為綫的**負向**。

5.23 有向數的應用

正數和負數的創立，除了方便解簡易方程之外，還方便有關方向的數量的表達，因此正負數又稱為**有向數**。

例 1



上圖是一條由東至西的直路，其上有巴士站。巴士A在巴士站的東20碼。巴士B在巴士站的西10碼。若巴士站作為原點，巴士A在+20碼處，那麼巴士B在那處？

又 -80 碼的地點在巴士站的何方？

例 2

右圖是一個攝氏溫度計，水的冰點是 0°C ，則下列度數有什麼意義？

- a) $+20^{\circ}\text{C}$? b) -5°C ?

試用正負數以表示下列溫度：

- c) 冰點之上 75°C
d) 冰點之下 20°C



例 3

假如將深夜十二時作為零時則下列時間是指什麼？

- a) $+4$ 時 b) -4 時

試用正負數以表下列時間：

- c) 下午 2 時 d) 上午 6 時 e) 上午 9.30 時

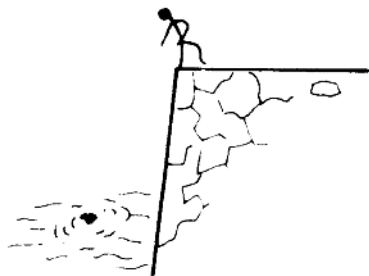
例 4

一石子由海拔 20 呎處掉下海裡，若石子原來的位置作為 $+20$ 呎，那麼下列數字表示什麼？

- a) $+2$ 呎
b) -5 呎

試用正負數表示下列位置：

- c) 在海面之上 10 呎，
d) 在海面之下 20 呎。



例 5

某人將賺得的利潤 $\$25$ 記為 $+\$25$ ，則 $-\$25$ 表示什麼？試就下表講述他一星期內盈虧的情況：

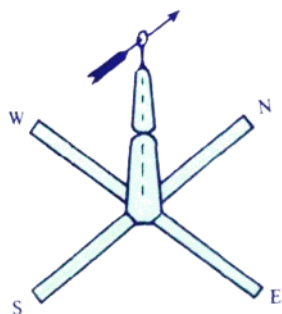
日期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
利潤	$+\$230$	$-\$150$	$+\$60$	$-\$70$	$-\$80$	$+\$180$

例 6

某鐵廠製成的 100 隻 2 公分長的鐵釘中，有些長短不齊。從下表可以看出它們長度的誤差。試從這表描述這一批鐵釘的一般情形：

誤差	+2 mm.	+1 mm.	0 mm.	-1 mm.	-2 mm.
釘數	7	15	52	18	8

例 7



一孩子向北而站立，若反時鐘所轉的角作為正角，那麼當他轉了下列角度後面對着那一方向？

- a) +4 直角，
- b) -3 直角，
- c) +7 直角，

他要向負方轉幾個直角才能面對西方？
試給三個答案。

例 8

圖 5.1 是一個平面上的卡氏坐標系統，寫出點 A, B 的坐標，又 C, D, E 的坐標等於什麼？

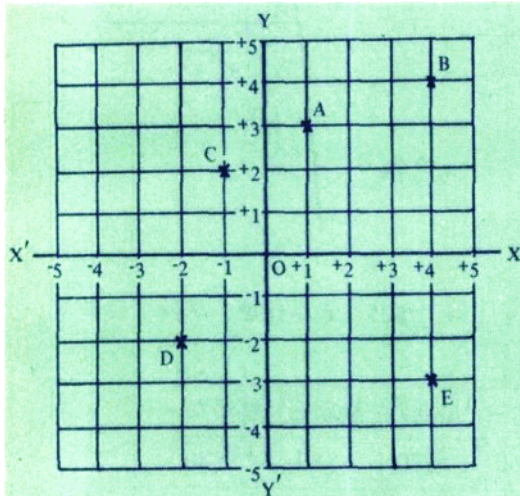


圖 5.2

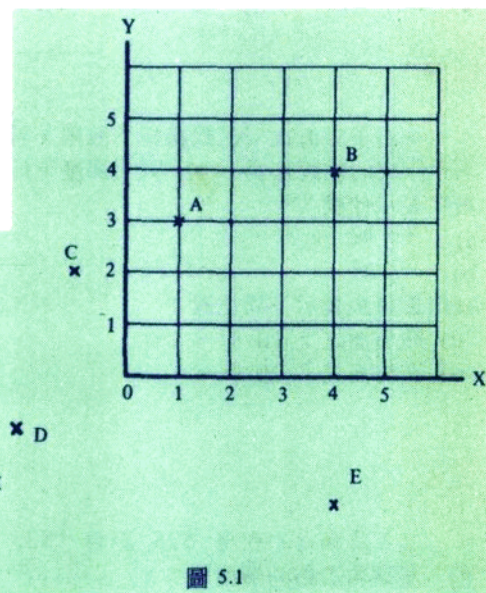


圖 5.1

將軸 OX, OY 延長，並採用了正負數，坐標系統便如圖 5.2 所示。

試從圖 5.2 以寫出點 A, B, C, D, E 的坐標，並加上下列三點；

F(+3, -5), G(-3, -5), H(-5, +3).

互相垂直的軸 $X'OX$ 及 $Y'OY$ 把平面成四部份，每部份稱為象限，它們依反時鐘方向依次稱為第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限及第 4 象限，如圖 5.3 所示。

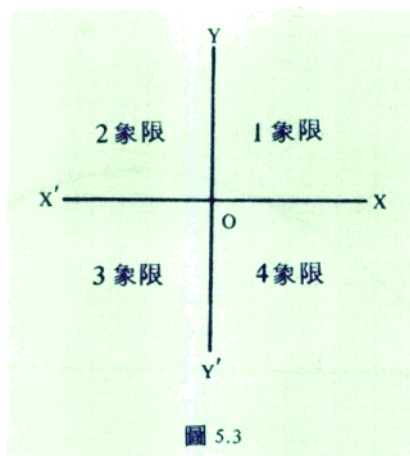


圖 5.3

例 9

在方格紙上畫出兩軸 $X'OX$ 及 $Y'OY$ ，並以下列序偶為坐標作出各點：
 $(-2, -7)$, $(-1, -5)$, $(0, -3)$, $(+1, -1)$, $(+2, +1)$, $(+3, +3)$ 這些點有什麼性質呢？

例 10

在方格紙上畫出兩軸 $X'OX$ 及 $Y'OY$ ，並作出以下列四點為頂點的四邊形：
 $A(-2, +4)$, $B(-4, -2)$, $C(+4, -2)$, $D(+8, +2)$ 並求兩對角綫的交點。

例 11

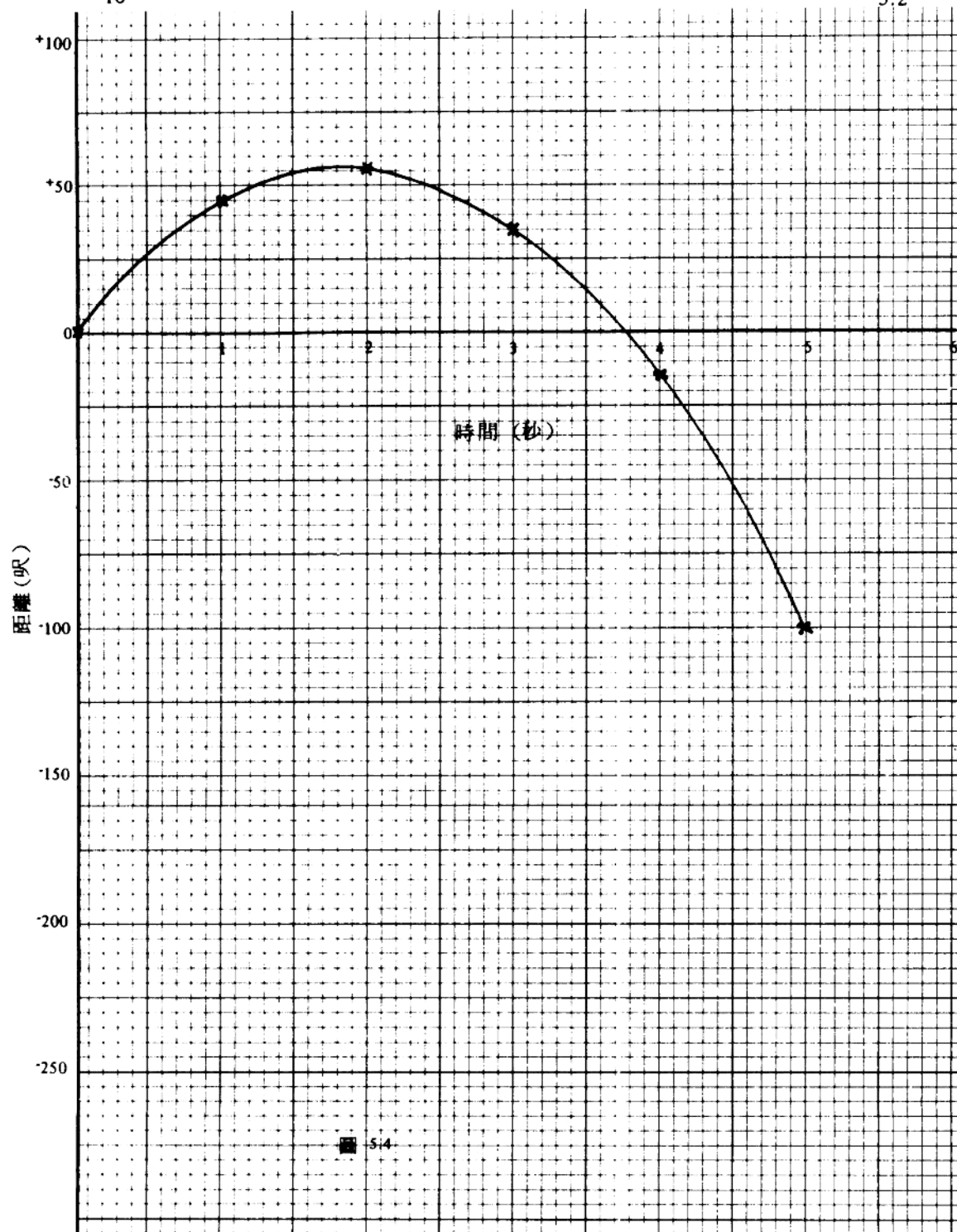
把一顆石子由屋頂向上拋擲，屋頂的高度作為 0，並記出了時間和石子高出屋頂的距離如下所表示：

時間 t (秒)	0	1	2	3	4	5
距離 s (呎)	0	+44	+56	+36	-16	-100

畫出在 5 秒內石子所經的路徑。

s 和 t 的關係可由圖 5.4 表示，並由此估計下列各項：—

- 石子所達的最高距離。
- 當石子在屋頂之上 50 呎處的時間。
- 在第 4 及第 5 秒間石子降下的距離。
- 假如石子能夠繼續下降，則第 6 秒時在屋頂之下多少呎？



例 12

在圖 5.5 內，由 O 至 A 的直綫經點 $(1, 2)$ 。由是方向 OA 可用這序偶來

表示而寫成 $\left(\frac{1}{2}\right)$ ，序偶 $\left(\frac{2}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 所

定的方向相同嗎？

試用序偶來表示 OB, OC 和 OD 的方向。

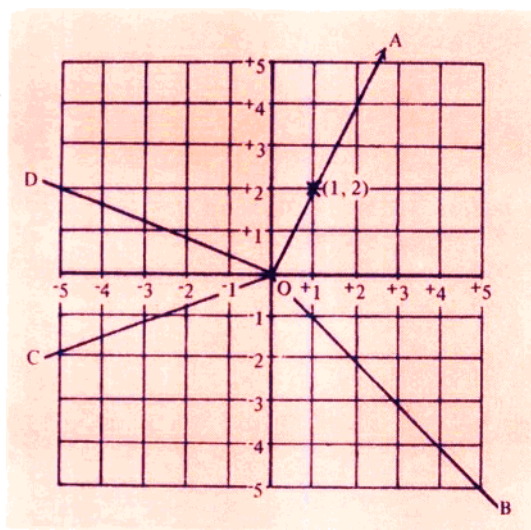


圖 5.5

5.24 整數加法

我們已創立了正負整數，我們便要知道怎樣用這些數來演算加，減，乘，除。在這節裡，我們先看加法。

方程 $x + 3 = 3$ 的解答是 $x = 0$ ，即 $0 + 3 = 3$ ，“0”的性質是“加0於任何數而結果是原數”，0加於正負數，也有相同的性質。由是設 a 為任何自然數，我們可以作如下的定義：—

$$+a + 0 = 0 + +a = +a$$

$$-a + 0 = 0 + -a = -a$$

或

若 p 為任何整數，正或負：

$$p + 0 = 0 + p = p$$

$$0 + 0 = 0$$

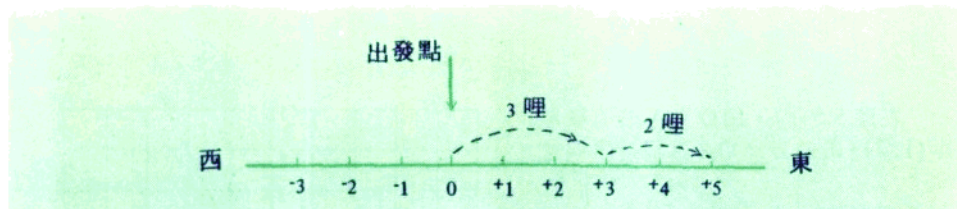
以 0 加於一整數並不影響這數，故 0 稱為整數集中，對於加法的中性元素，或簡稱為 **加法中性元**。

在未定整數加法之前，讓我們先看幾個例題。

例 1

小明在直路上向東走，上午他向東走了 3 哩，下午也向東走了 2 哩。

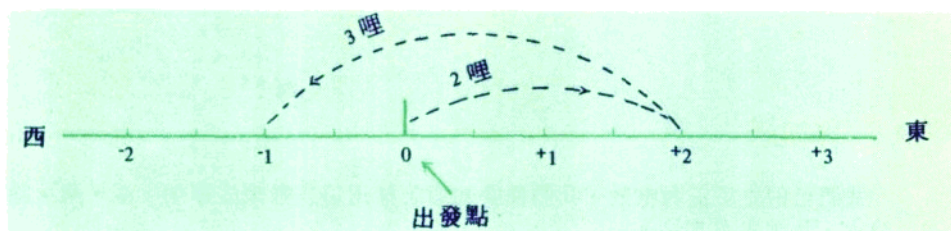
d) 試用這方法以求 $-3 + +2$ 的結果。



- 設自 0 向東的距離作為正，則小明上午所走的距離以有向數來表示，該等於多少？下午所走的距離又等於多少？
- 上下午共走了多少？以正負數來表示結果。
- $+3 + +2$ 等於什麼？

例 2

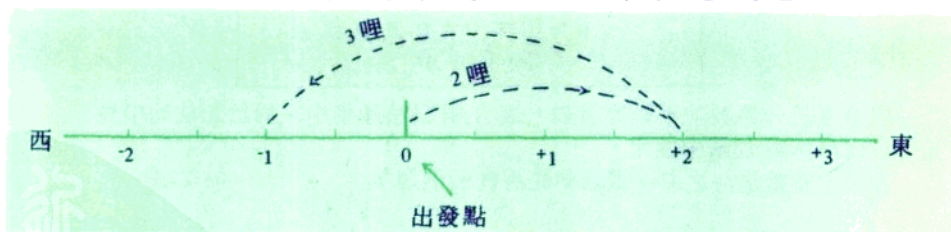
蘭詩也在同一直路上走，上午她向東走了 3 哩，下午向西走了 2 哩。



- 怎樣用有向數來表示蘭詩在上午和下午所走的距離？
- 這一天內蘭詩最後和 0 相距幾哩？試用有向數表示這結果。你能用有向數的加法來表結果嗎？
- $+3 + -2$ 結果是什麼？

例 3

設國華也在這路上走，他上午向東走了 2 哩，下午向西走了 3 哩。



- 試用有向數表國華在上午和下午所走的距離。
- 下午走完了；他距 0 點幾哩？以有向數表示。你能用兩有向數的和來表示結果嗎？
- $+2 + -3$ 等於什麼？