

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(符号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述	5-1-30
§ 5-2 线性系统的最佳设计	5-2-1
5-2-1 最佳设计问题的提出	5-2-1
5-2-2 最佳设计的性能指标	5-2-4
5-2-3 最佳滤波原理	5-2-7
一、维纳最佳滤波原理	5-2-7
二、卡尔曼滤波原理	5-2-14
5-2-4 最佳控制原理	5-2-19
一、确定性系统最佳控制原理	5-2-19
二、随机性系统最佳控制原理	5-2-21
三、随机性系统最佳控制问题的分解原理	5-2-23
§ 5-3 线性系统的基本特性	5-3-1
5-3-1 引言	5-3-1
5-3-2 线性系统的可观性	5-3-2
一、系统可观性概念	5-3-2
二、系统完全状态可观性准则	5-3-2
三、系统一致可观性概念	5-3-14
5-3-3 线性系统的可控性	5-3-29
一、系统可控性概念	5-3-29
二、系统完全状态可控性准则	5-3-30
三、系统完全轨出可控性准则	5-3-39
四、系统一致可控性概念	5-3-40

5-3-4	线性系统的稳定性	5-3-57
一、	系统稳定性概念	5-3-57
1.	系统的描述	5-3-57
2.	平衡状态	5-3-58
3.	稳定性概念	5-3-58
二、	李雅普诺夫直接法	5-3-61
三、	线性系统的稳定性准则	5-3-68
四、	线性系统稳定性的一般形式	5-3-80
五、	利用李雅普诺夫函数	
	估计系统时间常数的上界	5-3-83
§ 5-4	线性系统的不变量及其规范形式	5-4-1
5-4-1	状态变量的线性变换及	
	系统的不变量	5-4-1
5-4-2	线性系统的若唐规范形式	5-4-3
5-4-3	线性系统的可控规范形式	5-4-25
5-4-4	线性系统的可观文规范形式	5-4-31
§ 5-5	常系数、线性系统的实现问题	5-5-1
5-5-1	常系数、线性系统的可控实现	5-5-1
5-5-2	常系数、线性系统的可观文实现	5-5-7
5-5-3	常系数、线性系统的并联形实现	5-5-9
一、	并联可控实现	5-5-9
二、	并联可观文实现	5-5-13

一、单轨入单轨出系统的降维观文口	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式	5-9-7

第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波	6-2-28

6-4-1	模型误差分析	6-4-1
	一、模型误差分析的一般方法	6-4-1
	二、特殊情况的讨论	6-4-6
6-4-2	泸波的发散现象	6-4-15
6-4-3	克服发散的方法	6-4-16
	一、限定下界法	6-4-16
	二、状态扩充法	6-4-20
	三、渐消记(衰减记忆泸波)	6-4-22
	四、限定记忆泸波	6-4-31
	五、自适应泸波	6-4-35

§ 5-6 状态反馈问题

5-6-1 反馈问题

在自动调节理论中，反馈原理是很重要的。通过反馈，能使系统自动消除误差。最常用的反馈有两种。一种是：通过反馈，并不增加系统零点和极点的数目，主要是调节系统的放大系数，以此来改变系统的内部参数，使系统达到所要求的品质指标。这种反馈形式如图 5-6-1 所示。

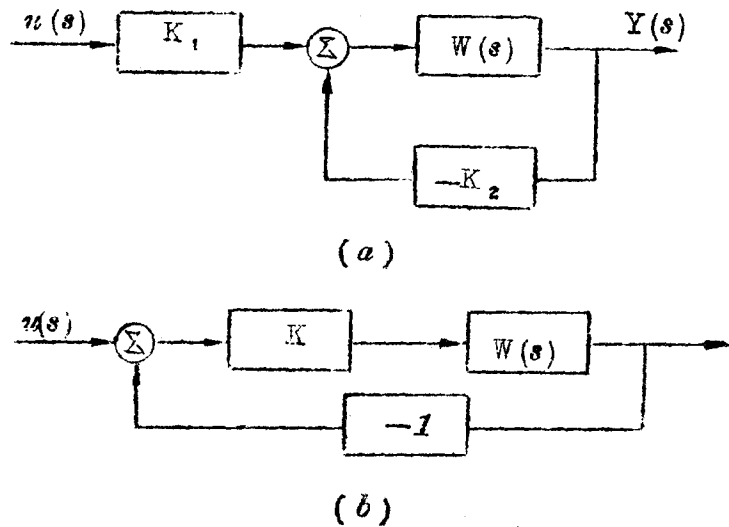
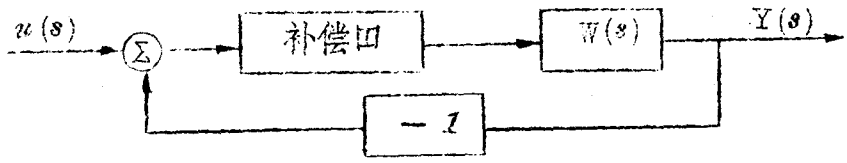
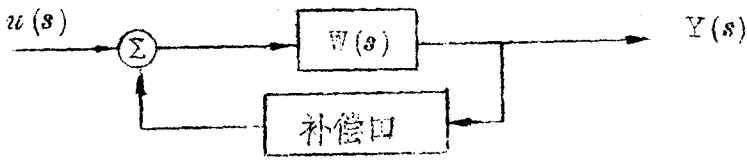


图 5-6-1 反馈系统结构图

图中 $W(s)$ 为被调节对象的传递函数， K_1 ， K_2 或 K 为可调的放大倍数，这类反馈形式是无记忆的，所以称它为静态反馈。另一种反馈是：通过串联或跨接补偿口的方式，可以增加系统的零点或极点。补偿口也称为校正装置。如图 5-6-2 所示。



(a)



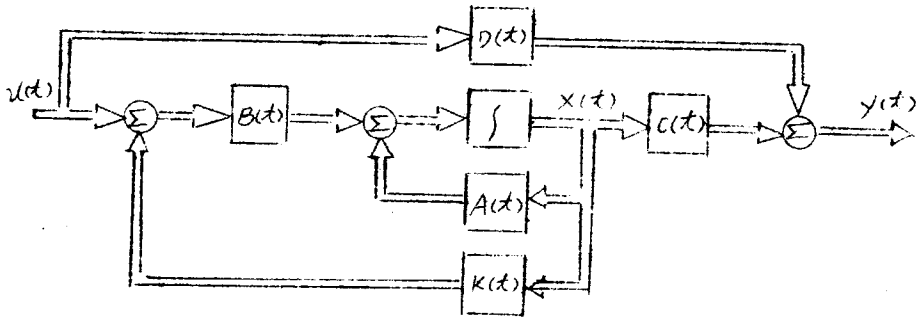
(b)

图 5-6-2 反馈系统结构图

由于补偿器中一般带有积分和微分元件，因此，这种反馈是有记忆的，故称它是动态反馈。

有时在综合系统时，这两种反馈形式是同时应用的。

在处理多输入多输出系统的状态空间分析法中，反馈原理同样是极为重要的，所不同的是采用所谓状态反馈或输出反馈，它也可分为两种形式。一种是：不增加新的状态变量的状态反馈或输出反馈。如图 5-6-3 所示



(a)

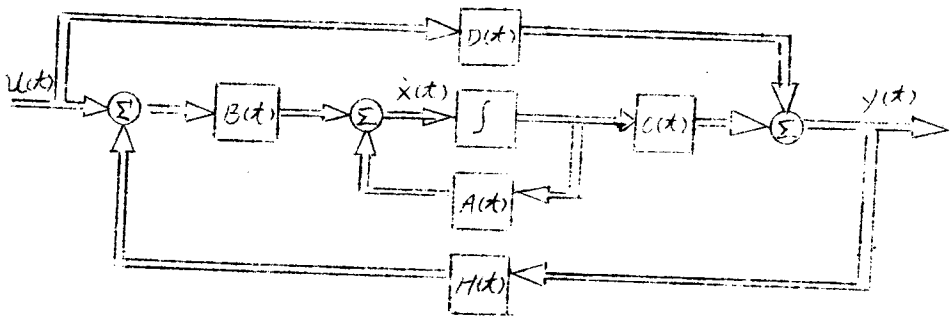
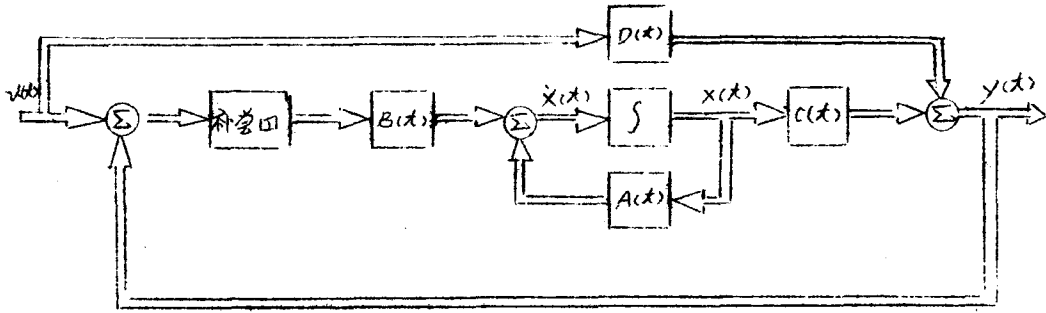


图 5-6-3 多输入多输出系统
反馈结构图

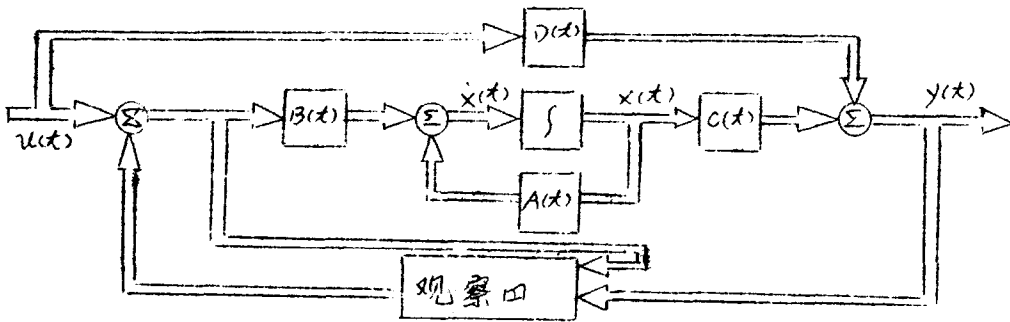
图中 $K(t)$ 或 $H(t)$ 是状态或输出反馈系数， $A(t)$ ， $B(t)$ ， $C(t)$ ， $D(t)$ 矩阵是由系统方程决定的。另一种反馈是：增加新的状态变量，例如串接一个补偿口或跨接一个观察口等。如图 5-6-4 所示。

下面主要分析状态反馈和输出反馈在常系数、线性、连续系统情况下的一些主要性质。

在以下的讨论中，我们都假定矩阵 D 为 0 矩阵。



(a)



(b)

图 5-6-4 多轨入多轨出系统

反馈结构图

设具有状态反馈的系统方程为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BV(t) \\ Y(t) = CX(t) \\ V(t) = KX(t) + u(t) \end{cases} \quad (5-6-1)$$

则由此得：

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (A + BK)X(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= CX(t)\end{aligned}\quad (5-6-2)$$

由方程式 (5-6-2) 所描述的常系数、线性、连续状态反馈系统的一个重要特性是：状态反馈保持了系统的可控性。这是因为状

态反馈系统 $S : \{ A + BK, B, C \}$ 的可控性矩阵为

$$Q_{ck} = \{ B \ ; \ (A + BK)B \ ; \ \dots \ ; \ (A + BK)^{n-1} \cdot B \}$$

而由于

$$(A + BK)B = AB + BKB$$

所以 $(A + BK)B$ 的列向量可由 $\{ B \ ; \ AB \}$ 的列向量的线性组合表示。同理 $(A + BK)^2 B$ 的列向量可由 $\{ B \ ; \ AB \ ; \ A^2 B \}$ 的列向量的线性组合表示等等，这样

$$\text{rank } Q_{ck} \leq \text{rank } Q_c$$

式中

$$Q_c = \{ B \ ; \ AB \ ; \ \dots \ ; \ A^{n-1}B \}$$

但是系统 $S : \{ A, B, C \}$ 又是系统 $S : \{ A + BK, B, C \}$ 经状态反馈 $-K$ 得到的，因此又有

$$\text{rank } Q_c \leq \text{rank } Q_{ck}$$

因此，状态反馈保持了可控性。但是状态反馈就不一定能保持可观察性。

设具有输出反馈的系统方程为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BV(t)$$

$$Y(t) = CX(t)$$

$$V(t) = HY(t) + u(t) = HCX(t) + u(t) \quad (5-6-3)$$

则由此得：

$$\dot{X}(t) = [A + BHC]X(t) + Bu(t) \quad (5-6-4)$$

$$Y(t) = CX(t)$$

由方程式(5-6-4)所描述的常系数、线性、连续，轨出反馈系统的一个重要特性是：轨出反馈保持了系统的可控性和可观察性。

这是因为轨出反馈系统 $S : [A + BHC, B, C]$ 等效于反馈为 $K = HC$ 时的状态反馈系统，因此它保持了系统的可控性。

并且又因为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A + BHC) \\ \vdots \\ C(A + BHC)^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

因此，轨出反馈又保持了系统的可观察性。

下面求在轨出反馈情况下，系统的闭环传递矩阵与开环传递矩阵的关系。设具有轨出反馈时，系统的闭环传递矩阵为 $W(S)$ ，没有轨出反馈时，系统的开环传递矩阵为 $W_0(S)$ ，则由系统方程和传递矩阵的计标式得：

$$W_0(S) = C(SI - A)^{-1}B \quad (5-6-5)$$

$$W(S) = C(SI - A - BHC)^{-1}B \quad (5-6-6)$$

$W_0(S)$ 与 $W(S)$ 间的关系可如下求得：

首先计祿

$$\begin{aligned} W(S)(I - HW_0(S)) &= W(S) - W(S) \cdot H \cdot W_0(S) \\ &= C(SI - A - BHC)^{-1}B - C(SI - A - BHC)^{-1}BHC(SI - A)^{-1}B \\ &= C\{(SI - A - BHC)^{-1} - (SI - A - BHC)^{-1}BHC(SI - A)^{-1}\}B \end{aligned} \quad (5-6-7)$$

因为

$$\begin{aligned} &(SI - A - BHC)^{-1}BHC \\ &= (SI - A - BHC)^{-1}BHC + (SI - A - BHC)^{-1}(SI - A - BHC) - I \\ &= (SI - A - BHC)^{-1}(SI - A) - I \end{aligned}$$

将此结果代入 (5-6-7) 式得

$$\begin{aligned} W(S)(I - HW_0(S)) &= C\{(SI - A - BHC)^{-1} - ((SI - A - BHC)^{-1}(SI - A) - I)(SI - A)^{-1}\}B \\ &= C\{(SI - A - BHC)^{-1} - (SI - A - BHC)^{-1} + (SI - A)^{-1}\}B \\ &= C(SI - A)^{-1}B \\ &= W_0(S) \end{aligned}$$

因此得

$$W(S) = W_0(S)(I - HW_0(S))^{-1} \quad (5-6-8)$$

另一方面因为

$$\begin{aligned} (I - W_0(S)H)W(S) &= W(S) - W_0(S)HW(S) \\ &= C(SI - A - BHC)^{-1}B - C(SI - A)^{-1}BHC(SI - A - BHC)^{-1}B \\ &= C\{(SI - A - BHC)^{-1} - (SI - A)^{-1}BHC(SI - A - BHC)^{-1}\}B \end{aligned} \quad (5-6-9)$$

$$\begin{aligned}
& BHC(SI-A-BHC)^{-1} \\
= & BHC(SI-A-BHC)^{-1} - (SI-A-BHC)(SI-A-BHC)^{-1} - I \\
= & (SI-A)(SI-A-BHC)^{-1} - I
\end{aligned}$$

将此结果代入 (5-6-9) 式得

$$\begin{aligned}
& (I - W_o(S)H)W(S) \\
= & C\{(SI-A-BHC)^{-1}(SI-A)^{-1}[(SI-A)(SI-A-BHC)^{-1} - I]\}B \\
= & C\{(SI-A-BHC)^{-1} - (SI-A-BHC)^{-1} + (SI-A)^{-1}\}B \\
= & C(SI-A)^{-1}B \\
= & W_o(S)
\end{aligned}$$

因此得：

$$W(S) = (I - W_o(S)H)^{-1}W_o(S) \quad (5-6-10)$$

由此可知：

$$\begin{aligned}
W(S) &= (I - W_o(S)H)^{-1}W_o(S) \\
&= W_o(S)(I - HW_o(S))^{-1}
\end{aligned} \quad (5-6-11)$$

关系式 (5-6-10) 中，当 $H = -H(S)$ 时便得

$$W(S) = (I + W_o(S)H(S))^{-1}W_o(S) \quad (5-6-12)$$

这就是 (5-1-53) 式，也就是当取出反馈是负反馈时，系统的闭环传递矩阵与开环传递矩阵之间的关系。

5-6-2 极点配置问题

下面只讨论常系数，线性系统。

所谓极点配置问题，就是对于系统 $S: [A, B, C]$ ，通过状

态反馈 K ，使得矩阵 $A + BK$ 的特征值，也就是系统

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad y(t) = cx(t)$$

的传递矩阵的元素的极点进行任意配置，以便使系统品质达到设计的要求。

一、单轨入单轨出系统的极点配置

如果认为所讨论的单轨入单轨出系统是完全状态可控的，那末，我们总可通过坐标变换把它变为可控规范形式，因此我们就不妨假定所讨论的系统已经就是可控规范形式了。也就是说，系统

S: $\{A_{c\Pi}, b_{c\Pi}, c_{c\Pi}\}$ 的各矩阵为

$$A_{c\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$b_{c\Pi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$c_{c\Pi} = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$$

由系统的可控形实现与系统传递函数间的关系可知，这时相应的系统的传递函数为