一九七九年

数学竞赛试题解答

襄樊市教育局教研室编

目　　录

一九七九年全国中学数学竞赛试题及参考答案

第一试

一、求证：$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$。

证：原式右端$=2\sin\theta\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos(\pi+2\theta)\right]$

$=2\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right)=\sin\theta+2\sin\theta\cos 2\theta$

$=\sin\theta+(\sin 3\theta-\sin\theta)=\sin 3\theta=$原式左端。

二、已知双曲线的两条渐近线方程为$x+y=o$，$x-y=o$，两顶点的距离为2，求双曲线的方程。

解：因双曲线两顶点的距离为2，故半实轴的长为1。若双曲线的实轴在x轴上，则双曲线的方程为：

$$x^2-y^2=1;$$

若双曲线的实轴在y轴上，则双曲线的方程为：

$$x^2-y^2=-1\text{或}y^2-x^2=1。$$

三、在△ABC中，∠A为钝角，求作一个面积最小的园，把这个三角形完全盖住，并说明理由。

解：以BC边为直径作一园O，此园即为所求。理由如下：

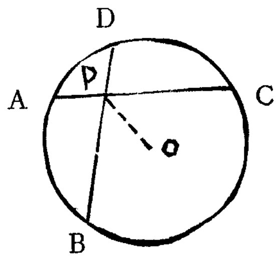
（1）∵BC为直径，∠A为钝角，直径上的钝角必在

园内，

∴A点在园内，即园O盖住$\triangle ABC$。

（2）若有另一园O′盖住$\triangle ABC$，B、C都在园O′内或园周上，则$BC \leqslant$园O′的直径。因此，园O是盖住$\triangle ABC$的最小园。

四、园内两条非直径的弦相交，试证它们不能互相平分。



已知：园O内两弦AC、BD都不是直径。

求证：AC、BD不能互相平分。

证明：假若P是AC和BD的中点，连OP，则$OP \perp AC$（园心与弦的中点的连线垂直于弦），$OP \perp BD$。但是一条直线不能垂直于两条相交的直线。

∴ P不能同时是AC、BD的中点。

五：解方程组：

$$\begin{cases} x-y+z=1 & (1) \\ y-z+u=2 & (2) \\ z-u+v=3 & (3) \\ u-v+x=4 & (4) \\ v-x+y=5。 & (5) \end{cases}$$

解：（2）+（3）-（5）得　　$x=0$,

（3）+（4）-（1）得　　$y=6$,

代入（1）得　　$z=7$,

代入（2）得　　$u=3$,

代入(4)得 $v=-1$。

故原方程组的解为：

$$\begin{cases} x=0 \\ y=6 \\ z=7 \\ u=3 \\ v=-1。\end{cases}$$

六、解方程：$5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$。

解：原方程变为

$$(5x^2-1)-x\sqrt{5x^2-1}+(x-1)=0,$$

左端分解因式

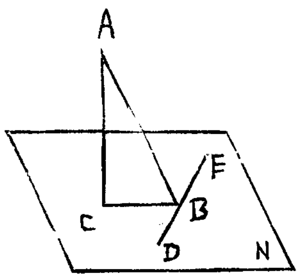
$$(\sqrt{5x^2-1}-x+1)(\sqrt{5x^2-1}-1)=0。$$

由$\sqrt{5x^2-1}-x+1=0$解得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-1$；

由$\sqrt{5x^2-1}-1=0$解得 $x_{3、4}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$。

验算知$\frac{1}{2}$、-1都是增根；

∴ 原方程的根是$\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$。



七、写出并证明立体几何中的"三垂线定理"。

在平面内的一条直线，如果和一条斜线•在这个平面内的射

• 目前在中学课本内只论"一条'斜线'的情况。实际上，只要这条直线和该平面不垂直，便都适合这个定理的结论。

影垂直。那么它也和这条斜线垂直。

已知：如图，AC、AB分别是平面N的垂线和斜线，BC是AB在平面N内的射影，DE在平面N内，DE⊥BC。

求证：DE⊥AB。

证明：∵AC⊥平面N，DE在平面N内，

∴ DE⊥AC（垂直于平面的直线垂直这个平面内的所有直线）。

又∵DE⊥BC（题设），

∴ DE垂直于AC和BC所确定的平面（一直线垂直于相交的两直线，则这直线垂直于它们所确定的平面）。

∵ AB在AC和BC所确定的平面内，

∴ DE⊥AB（垂直于平面的直线，垂直这个平面内的所有直线）。

八、设△ABC三内角A、B、C成等差数列，三条对边长a、b、c之倒数也成等差数列，试求A、B、C。

解：由题设，令$A=B-d$，$C=B+d$ $(d\geqslant 0)$，

由$A+B+C=\pi$，得

$$(B-d)+B+(B+d)=\pi, \qquad \therefore \quad B=\frac{\pi}{3}。$$

由题设，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$，即 $bc+ba=2ac$，用正弦定理得

$$\sin B\sin C+\sin B\sin A=2\sin A\sin C,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}+d\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)\right]=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-d\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+d\right),$$

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\cos d=\cos 2d-\cos\frac{2\pi}{3},$$

$$\frac{3}{2}\cos d=\cos 2d+\frac{1}{2}=2\cos^2 d-\frac{1}{2},$$

$$4\cos^2 d-3\cos d-1=0,$$

$\therefore$ $$\cos d=1\text{ 或 }-\frac{1}{4}。$$

$\because$ $d<\frac{\pi}{2}$， $\therefore$ $\cos d\neq-\frac{1}{4}$而有$\cos d=1$，

$\therefore$ $$d=0。$$

因此： $$A=B=C=\frac{\pi}{3}。$$

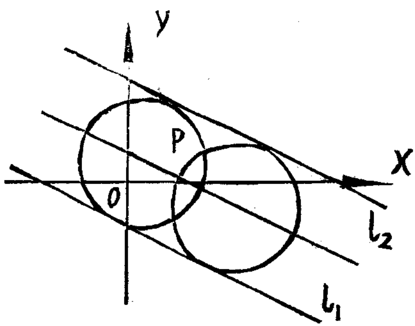
九、给定一点P（3.1）及两条直线

$$L_1:\quad x+2y+3=0,$$

$$L_2:\quad x+2y-7=0,$$

试求过P点且与L_1，L_2都相切的园的方程。

解：L_1，L_2两直线平行。园心在$x+2y-2=0$直线上，半径是L_1，L_2两平行线距离的一半。要求L_1，L_2的距离，在L_1上任取一点，如（-1，-1），求得这个点到L_2的距离为$2\sqrt{5}$。



$\therefore$园半径为$\sqrt{5}$。设园心为（α，β），则

$$\alpha+2\beta-2=0,\quad 即\ \alpha=2-2\beta,$$

$\therefore$ $$(2-2\beta-3)^2+(\beta-1)^2=5,$$

$$(2\beta+1)^2+(\beta-1)^2=5,$$

$$5\beta^2+2\beta-3=0,$$

$$(5\beta-3)(\beta+1)=0。$$

解得

$$\alpha=4,\ \alpha=\frac{4}{5};\qquad \beta=-1,\ \beta=\frac{3}{5}。$$

故所求园的方程为：

$$(x-4)^2+(y+1)^2=5,$$

或

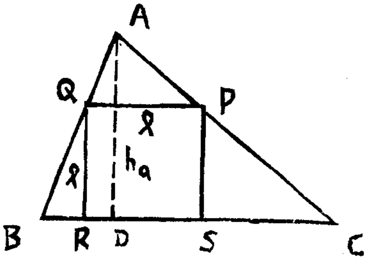
$$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=5。$$

十、已知锐角三角形的三边a、b、c满足不等式$a>b>c$，问四个顶点都在三角形边上的三个正方形，哪个面积最大？证明你的结论。

解：设三角形为△ABC，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，各边上的高线分别为h_a、h_b、h_c，在BC、AC、AB上所作正方形的边长分别为l、m、n。

正方形PQRS的一边落在BC上时，由于△AQP∽△ABC，

知道 $\dfrac{h_a-l}{h_a}=\dfrac{l}{a}$，



由此解得$l=\dfrac{ah_a}{a+h_a}$。

同理可得：

$$m=\frac{bh_b}{b+h_b},\quad n=\frac{ch_c}{c+h_c}。$$

因为 $ah_a=bh_b$，易得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{h_b}{h_a}$，故有$\dfrac{a-h_b}{b-h_a}=\dfrac{a}{b}>1$。

从而：　　$a-h_b>b-h_a$　或　$a+h_a>b+h_b$。

因而：

$$\frac{ah_a}{a+h_a}<\frac{bh_b}{b+h_b}.$$

同理可得：　　$\dfrac{bh_b}{b+h_b}<\dfrac{ch_c}{c+h_c}$.

答：锐角三角形最小边上的内接正方形的面积最大。

第　二　试

一、已知$f(x)=x^2-6x+5$，问满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$和$f(x)-f(y)\geqslant 0$的点(x,y)在平面上的什么范围？并作图。

解：$f(x)+f(y)$

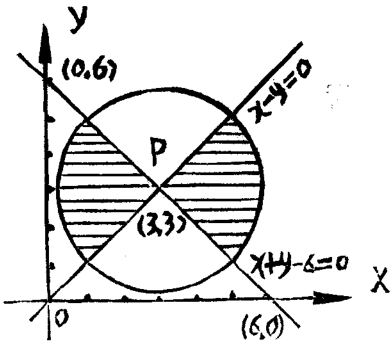
$=x^2+y^2-6x-6y+10$

$=(x-3)^2+(y-3)^2-8$，

$f(x)-f(y)$

$=x^2-y^2-6x+6y$

$=(x-y)(x+y-6)$.



满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$的点(x,y)在园$(x-3)^2+(y-3)^2=8$内和园周上；$f(x)-f(y)\geqslant 0$ 等价于

$$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-6\geqslant 0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x-y\leqslant 0\\ x+y-6\leqslant 0\end{cases}。$$

满足$x-y\geqslant 0$的点在直线$x-y=0$（见图）上及其右下方，满足$x+y-6\geqslant 0$的点在直线$x+y-6=0$（见图）上及其右上方；

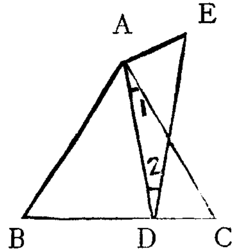
满足$x-y\leqslant 0$的点在直线$x-y=0$上及其左上方，满足$x+y-6\leqslant 0$的点在直线$x+y-6=0$上及其左下方。

所以满足$\begin{cases}f(x)+f(y)\leqslant 0\\ f(x)-f(y)\geqslant 0\end{cases}$的点在扇形PAB及其边界

和扇形PCD及其边界上（如图阴形部分）。

二、命题"一对对角及一对对边相等的四边形必为平行四边形"对吗？如果对，请证明；如果不对，请作一四边形满足已知条件，但它不是平行四边形，并证明你的作法。

解：命题不对。例如：任意作一等边三角形ABC，在底边BC上取D，使得BD＞DC，由D作∠2＝∠1（如图），取DE＝AC，联AE，则四边形ABDE满足要求。



因为从△ADC≌△DAE知

$$\angle E=\angle C=\angle B;$$

又 DE＝AC＝AB(作法，假设)，

所以四边形ABDE满足已知条件，但

$$AE=DC<BD,$$

故四边形ABDE不是平行四边形。

三、设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，证明：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9。$$

又问 α，β 取什么值时等式成立？

证：$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha\sin^2 2\beta}\geqslant\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}\qquad(a)$$

$$=1+\mathrm{tg}^2\alpha+4(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$$

$$=5+\mathrm{tg}^2\alpha+4\,\mathrm{ctg}^2\alpha$$

$$=5+2\left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2}+\frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right)\geqslant 5+2\times 2=9。\qquad(b)$$

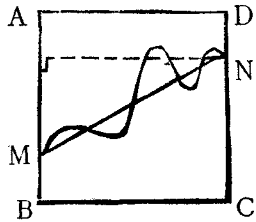
（利用不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$）

(a)式等式成立当且仅当$\sin 2\beta=1$，即$\beta=\frac{\pi}{4}$；

(b)式等式成立当且仅当$\operatorname{tg}^2\alpha=2$，即 $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$，亦即$\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$。

所以当 $\beta=\frac{\pi}{4}$，$\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$时原题中的等式成立。

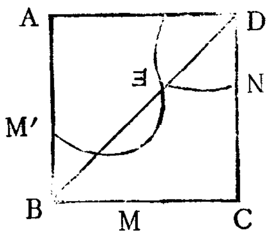
四、单位正方形周界上任意两点之间连一曲线，如果它把这个正方形分成两个面积相等的部分，试证这条曲线段的长度不小于1。



证：主要依据下述事实：连结两个定点的所有线段中以直线段为最短。

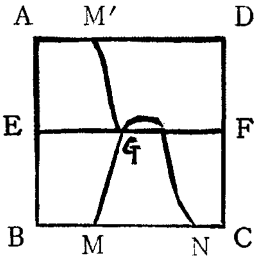
假设曲线$\overset{\frown}{MN}$把单位正方形ABCD分成两个面积相等的部分，分别就这条曲线段的端点M、N在正方形周界上的位置讨论如下（以$\overset{\frown}{MN}$表示从M到N的曲线段及其长度）。

（1）点M、N各在一双对边上，如图$\overset{\frown}{MN}\geqslant\overline{MN}$，但显然有 $\overline{MN}\geqslant 1$，所以 $\overset{\frown}{MN}\geqslant 1$。



（2）点M、N各在一双邻边上，设M在BC上，N在CD上，那么$\overset{\frown}{MN}$一定要和对角线BD相交，（否则$\overset{\frown}{MN}$分成的两部分显然面积不等）。假设从M出发$\overset{\frown}{MN}$与BD的第一个交点是E，作$\overset{\frown}{ME}$

关于BD的对称图形$\overset{\frown}{M'E}$，则M'在AB上，且$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MEN}=\overset{\frown}{M'EN}\geqslant 1$〔据(1)的结果〕。



(3)点M、N在同一条边BC上(M、N可以重合)。设E、F分别是AB、CD的中点，那么$\overset{\frown}{MN}$一定要和EF相交，(否则$\overset{\frown}{MN}$分成的两部分面积不等)。假设从M出发$\overset{\frown}{MN}$与EF的第一个交点是G，作$\overset{\frown}{MG}$关于EF的对称图形$\overset{\frown}{M'G}$，则M'在AD上，且$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MGN}=\overset{\frown}{M'GN}\geqslant 1$〔据(1)的结果〕。

五、在正整数上定义一个函数$f(n)$如下：当n为偶数时，$f(n)=\frac{n}{2}$；当n为奇数时，$f(n)=n+3$。

(1)证明：对任何一个正整数m，数列$a_0=m$，$a_1=f(a_0)$，……，$a_n=f(a_{n-1})$，……中总有一项为1或3。

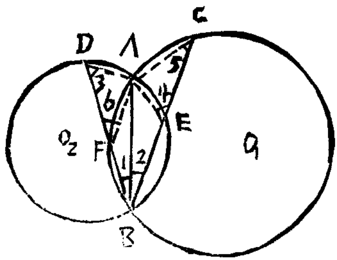
(2)在全部正整数中，哪些m使上述数列必然出现3？哪些m使上述数列必然出现1？

解：(1)若数列里有一个$a_k>3$，则下一项a_{k+1}或a_{k+2}必小于a_k(因为a_k为偶数时，$a_{k+1}=\frac{a_k}{2}<a_k$；$a_k$为奇数时，$a_{k+2}=\frac{a_{k+3}}{2}<a_k$)，故数列必达到3或2或1。如达到2，则下一项为1，故数列必能达到1或3。

(2)若m是3的偶数倍，则过几步后就变成3的奇数倍；若m是3的奇数倍，则下一项就是3的偶数倍。依此类推可知，当m是3的倍数时，数列的一切项都是3的倍数，因此数

列必然达到3。

若m不是3的倍数，如m为偶数，则下一项($\frac{m}{2}$)也非3的倍数；如m为奇数，则下一项（m+3）也非3的倍数。依次类推可知当m不是3的倍数时，数列的一切项都不是3的倍数，因此数列必然达到1。



六、如图，两园o_1，o_2相交于A，B，园o_1的弦BC交园o_2于E，园o_2的弦BD交园o_1于F，证明：

①若$\angle DBA=\angle CBA$，则$DF=CE$；

②若$DF=CE$，则$\angle DBA=\angle CBA$。

证：如图，作连线AC，AE，AD，AF。

①假设$\angle 1=\angle 2$，求证：$DF=CE$。

$\because \angle 3=\angle 4$（园$o_2$的内接四边形BDAE的外角$\angle 4$等于内对角$\angle 3$），

$\angle 5=\angle 6$（同理）。

$\because$ $\angle 1=\angle 2$（假设），

$\therefore \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AE}$（园周角等则弧等），$DA=AE$（等弧对等弦）

$\triangle ADF \cong \triangle AEC$　（a，s，a），

$\therefore$　$DF=CE$　（对应边相等）。

②假设$DF=CE$，求证$\angle 1=\angle 2$。

$\because \angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$（同上），$DF=CE$（假设），

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle AEC$（a，s，a），$AD=CE$（对应边相等），

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AE}$（等弦对等弧），

$\angle 1=\angle 2$（弧等则园周角等）。

七、某区学生若干人参加数学竞赛，每个学生得分都是整数，总分为8250，前三名的分数是88，85，80，最低是30分，得同一分数的学生都不超过3人。问至少有多少学生得分不低于60分（包括前三名）？

解：除了前三名外，得分只能在30—79之中，总分为

$$8250-(88+85+80)=7997。$$

要使及格人数少，必然不及格人数多。因此按题意在30—59分里每种分数的人数尽可能多(即每种分都有三人)，这些人的总分应为

$$3\times(30+31+\cdots\cdots+59)=4005。$$

剩下的$7997-4005=3992$应分配给得60—79分的人，假定从60到79每种分数都是3人，共60人，总分为

$$3\times(60+61+\cdots\cdots+79)=4170,$$

比3992多出178分，所以应从这60人中减掉尽可能多的人使分数够分配。如果减掉3个得60分的人，剩57人得总分为

$$4170-180=3990,$$

但它比3992少2分，所以57人不够，60到79分之间的人数至少是58人，即把多余的2分给一个原来得58分的人让他得60分，因此不少于60分的学生总数（包括前三名）应不少于61人。

北京市一九七九年中学生数学竞赛题参考答案

第 一 试

一、求函数$y=\lg(\sqrt{x^2-3x-10}-x-3)$的定义域。

解：先解不等式： $x^2-3x-10\geqslant 0$ （1）

得 $x\leqslant -2$，$x\geqslant 5$。 （2）

再在条件（2）之下解不等式

$$\sqrt{x^2-3x-10}-x-3>0, \quad (3)$$

即

$$\sqrt{x^2-3x-10}>x+3。$$

当$x+3<0$即$x<-3$时，不等式显然成立。当$x+3\geqslant 0$即$x\geqslant -3$时，两边平方得：

$$x^2-3x-10>x^2+6x+9,$$

$$9x<-19,$$

故（3）的解是 $x<-\frac{19}{9}$。 （4）

（2）与（4）联立得函数的定义域是：$x<-\frac{19}{9}$。

二、已知：x、y、z均为锐角，且满足等式：

$$\cos x+\cos y+\cos z=1+4\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\cdot\sin\frac{z}{2},$$

试证：$x+y+z=\pi$。

证：$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$$=2\sin^2\frac{z}{2}+2\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\frac{z}{2},$$

$$\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{z}{2}$$

$$=\sin^2\frac{z}{2}+\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{z}{2},$$

$$\cos\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{z}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2}\right)。$$

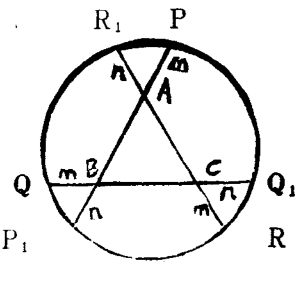
因为x、y、z均为锐角，所以$\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2}\neq 0$。因此$\cos\frac{x+y}{2}=\sin\frac{z}{2}$，即

$$\cos\frac{x+y}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right),$$

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}$$

$$\therefore\qquad x+y+z=\pi。$$

三、图中，园的三条弦：PP_1、QQ_1、RR_1两两相交，交点分别为A、B、C。已知：$AP=BQ=CR$，$AR_1=BP_1=CQ_1$。求证：△ABC是正三角形。



证：设$AP=BQ=CR=m$，$AR_1=BP_1=CQ_1=n$，$BC=x$，