·内部发行·

数61级

高等代数补充讲义

丁石孙　郭悦成编

北京电视大学数学系

1963. 12.

目　　录

第一章　数　域

§1．复数的几何表示

同学们已经知道复数的一些基本性质，所以我们不打亦再从头讨论复数，这里我们给出复数的一种几何表示，它在以后是很有用的。

我们知道，所谓复数就是指形式为

$$a+bi$$

的数，其中 a、b 为实数，i 为虚数单位：$i^2=-1$，当 $\alpha=a+bi$ 时，a 称为 α 的实部，b 称为它的虚部。

我们在平面上取定一直角坐标系，这时，平面上每个点与每个向量都以一对实数作为坐标。复数 $a+bi$ 就可以用坐标为 (a,b) 的点或者向量来表示，这种表示方法称为复数的几何表示。在这种情况下，坐标横轴常常称为实轴，纵轴称为虚轴。

复数 $\alpha=a+bi$ 与 $\beta=c+di$ 的和是复数

$$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i,$$

很明显，复数的加法对应于向量的加法。所以复数的加法具有向量加法的同样性质：

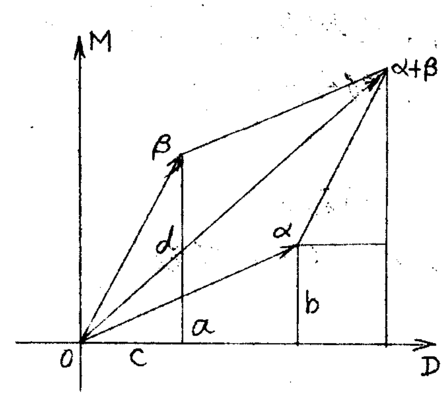

图 1.

1．交换律

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha;$$

2．结合律

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma);$$

3．零向量就是复数 0，它的特点是

$$0+\alpha=\alpha;$$

4．向量 α 的负向量（长

度与α同，方向与α反的向量）$-\alpha$对应复数α的负数，它的特点是

$$\alpha+(-\alpha)=0 。$$

利用负数，可以定义复数的减法如下

$$\beta-\alpha\equiv\beta+(-\alpha),$$

并且有

$$(\beta-\alpha)+\alpha=\beta 。$$

在复数的乘法运算中，$i^2=-1$是一个基本关系。复数$\alpha=a+bi$与$\beta=c+di$的乘积是复数

$$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

也可以用向量来解释复数乘法的几何意义，不过必须引进复数的三角表示。

在平面上取原点为极点，实轴为极轴，建立极坐标系。复数$\alpha=a+bi$对应于点(a,b)。设这点的极坐标是ρ与θ，ρ就是向量α的长度，称为复数α的模，用$|\alpha|$表示；θ是实轴到向量α的旋转角，称为复数α的辐角，用$\arg\alpha$表示。只有0的模才是0，它的辐角不定。对于其他非零复数，辐角不是唯一确定的，可以有2π的整倍数的差别。此外，从解析几何学知道直角坐标a，b与极坐标ρ，θ之间的关系式：

$$\begin{cases} a=\rho\cos\theta \\ b=\rho\sin\theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{a^2+b^2} \\ tg\theta=\dfrac{b}{a} 。\end{cases}$$

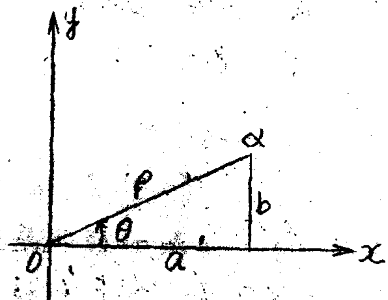

图2.

因而

$$\alpha=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

它称为<u>复数α的三角表示</u>。

现在可以来看复数乘法的几何意义了。设复数α与β的三角表示为

$$\alpha=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$\beta=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

乘积$\alpha\beta$的三角表示是

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\rho r[(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)+\\&\quad+i(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)]\\&=\rho r[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)].\end{aligned}$$

从表示中看出，复数乘积的模等于模的乘积，复数乘积的辐角等于辐角的和：

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|;$$
$$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta.$$

由此可见，用复数β去乘α的结果是：先把α的长度放大（或缩小）一个倍数，就是β的模；再旋转一个角度，这个角度就是β的辐角。

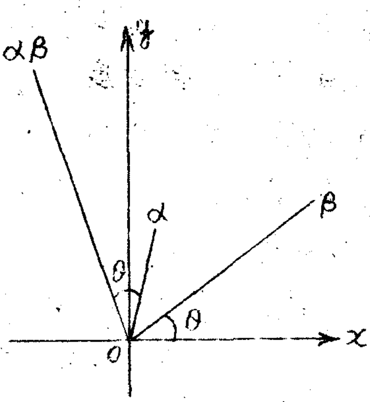

图3.

利用复数乘法的几何解释，也可以证明下述各性质：

1. 交换律

$$\alpha\beta=\beta\alpha;$$

2. 结合律

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma);$$

3. 实数的模就是实数的绝对值，正实数的辐角为0，负实数的辐角为π。实数1与任何实数相乘等于不乘：$1\cdot\alpha=\alpha$；

4. 设复数$\alpha=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\neq0$。模等于$\rho^{-1}$，辐角等于$-\theta$的复数就是$\alpha$的倒数，用$\alpha^{-1}$表示

$$\alpha^{-1}=\rho^{-1}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

它的特点是

$$\alpha\alpha^{-1}=1。$$

在直角坐标系下，若$\alpha=a+bi$,则

$$\alpha^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i。$$

有了倒数，就有除法

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\alpha=\beta。$$

关于商的辐角与模，有公式

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{|\beta|}{|\alpha|};\ arg\frac{\beta}{\alpha}=arg\beta-arg\alpha。$$

我们注意，0是没有倒数的，所以它不能作除数（或分母）。

利用复数乘法的几何解释，我们也可以证明（留给同学）

5. 分配律$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$。

关于两个复数和的模，我们没有精确的等式，但是有著名的三角不等式

$$\big||\alpha|-|\beta|\big|\le|\alpha\pm\beta|\le|\alpha|+|\beta|。$$

这可以利用平面几何中“三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”这个著名的定理来证明。

复数的共轭数是一个重要的概念。复数$\alpha=a+bi$的共轭数是复数$a-bi$，用$\overline{\alpha}$表示。α与$\overline{\alpha}$有相同的模，但它们的辐角却相差一个负号。所以α和$\overline{\alpha}$是与实轴成对称的两个点。显然，α与$\overline{\alpha}$是互为共轭的：$\overline{\alpha}$的共轭就是α。

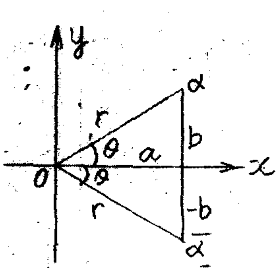

图4.

共轭复数的和与积都是实数。

若$\alpha=a+bi$则

$$\alpha+\overline{\alpha}=2a,$$

$$\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2=|\alpha|^2。$$

因此，α与$\bar{\alpha}$是实系数二次方程

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}=0$$

的两个共轭根。当$\alpha\neq0$时，$\alpha\bar{\alpha}$永远是一个正数。而且

$$\alpha^{-1}=\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i。$$

这个公式，我们在以前也曾经得到过。因为

$$\alpha+\bar{\alpha}=2a,$$
$$\alpha-\bar{\alpha}=2bi,$$

所以，只有在α是实数（即$b=0$）时，才有$\alpha=\bar{\alpha}$；只有在α是纯虚数（即$a=0$时，才有$\alpha=-\bar{\alpha}$。这个结论从几何上来看也是很明显的。

共轭数的另一个重要性质是：乘积的共轭数等于共轭数的乘积，和的共轭数等于共轭数的和。

$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}; \qquad \overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}。$$

这些公式是可以通过验算加以证明的。综合以上两个公式加以推广，可以得到下面的结论：设$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$表示$n$个复数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与其他另外一些实数经过一定的加、减、乘除等四则运算之后所得到的结果（这个结果当然也是一个复数）那么

$$\overline{f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}=f(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_n)。$$

例．设有行列式

$$d=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

其中$\alpha_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是复数，并且

$$\alpha_{ij}=\overline{\alpha}_{ji}。$$

求证：d是实数。

为了证明d是实数，只须证明$\overline{d}=d$，但是

$$\overline{d}=\begin{vmatrix}\overline{\alpha}_{11} & \overline{\alpha}_{12} & \cdots & \overline{\alpha}_{1n}\\ \overline{\alpha}_{21} & \overline{\alpha}_{22} & \cdots & \overline{\alpha}_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{\alpha}_{n1} & \overline{\alpha}_{n2} & \cdots & \overline{\alpha}_{nn}\end{vmatrix}$$

（为什么？）。所以

$$\overline{d}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}=d。$$

§2. 复数的方根

我们先来考虑复数的乘方。复数$\alpha=a+bi$的正整数n次方$(a+bi)^n$可先应用牛顿二项式定理展开；然后应用基本关系

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i$$

来加以集项。

如果我们已知α的三角表示

$$\alpha=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\tag{1}$$

那么根据复数乘积的模与辐角公式，可以立刻推出

$$\alpha^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

这就是著名的De Moivre公式。De Moivre公式对于负整数次方也是成立的，因为

$$\alpha^{-n}=(\alpha^{-1})^n=\left\{\rho^{-1}\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]\right\}^n$$
$$=\rho^{-n}\left[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\right]。$$

如果我们认为$\alpha^0=1$的话，那么De Moivre公式对一切整数次方都是成立的。

利用De Moivre公式可以求复数的方根。设已知复数α的三角表示(1)，试求α的n次方根（n是一个正整数）。假设这个n次根是β，它的模是γ，辐角是φ，那么就有$\beta^n=\alpha$，亦即

$$\left[\gamma(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)。$$

利用De Moivre公式

$$\gamma^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

两个复数相对时，它们的模必定相等，但辐角可以相差2π的整倍数。所以

$$\gamma^n=\rho,$$
$$n\varphi=\theta+2k\pi \qquad k\text{是整数。}$$

这样，我们求出

$$\gamma=\sqrt[n]{\rho},$$
$$\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots。$$

当k取不同的整数值时，我们得到α的所有可能的n次根：

$$\beta_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots。$$

但是，这并不表示α有无穷多个不同的n次根。因为给予k以不同的整数值时，我们可能得到相同的β_k。每当k增加或减少1时，β_k的辐角相应的增加或减少$\frac{2\pi}{n}$。所以我们只

有n个不同的n次根：

$$\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1},$$

而其余的β_k一定和这n个根中的某一个相等。要找出这个根是不难的，设k被n除后剩余r $(0 \leq r < n)$，得商q，则

$$k = nq + r,$$

$$\arg\beta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(nq+r)\pi}{n}$$

$$= \frac{\theta + 2r\pi}{n} + 2q\pi = \arg\beta_r + 2q\pi,$$

所以，$\beta_k = \beta_r$ $(0 \leq r < n)$。

这样一来，每一个复数α（只要它$\neq 0$）就恰有n个n次根。这些根分布在以原点为中心，以$\sqrt[n]{|\alpha|}$（即$\sqrt[n]{\rho}$）为半径的圆周上，并且把圆周n等分。图5表示了1的8个8次根。

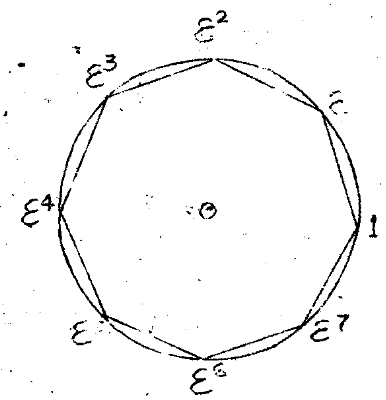

图5

特别我们会求1的n次根，这些根叫做<u>n次单位根</u>。这n个n次单位根是

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

它们分布在以原点为中心的单位圆周上，并且把它n等分。1是其中的一个分点；当n是偶数时，-1也恰巧是分点之一；当n是奇数时，-1就不是分点。所以当n是奇数时，只有1才是n次单位实根；当n是偶数时，± 1都是n次单位实根。除去± 1可能是n次单位实根外，其余的n次单位根都位于实轴之外，而且对于实轴是对称的，换句话说，这些n次单位根是两两共轭的。

复数α的n个n次根可以从其中的一个根β分别乘上n个n次单位根得到。这是因为下列n个数

$$\beta=\beta\varepsilon_0,\ \beta\varepsilon_1,\cdots,\beta\varepsilon_{n-1}$$

两两不同，而且都是α的n次根：$(\beta\varepsilon_k)^n=\beta^n\varepsilon_k^n=\alpha$，所以，它们恰好是$\alpha$的$n$个$n$次根。

我们指出单位根的一个重要的代数性质，两个n次单位根的乘积或商还是一个n次单位根；一个n次单位根的倒数还是n次单位根：

$$\varepsilon_k\varepsilon_l=\varepsilon_{k+l},\qquad \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_l}=\varepsilon_{k-l},\qquad \varepsilon_k^{-1}=\varepsilon_{-k}。$$

因此

$$\varepsilon_k=\underbrace{\varepsilon_1\varepsilon_1\cdots\varepsilon_1}_{k个}=\varepsilon_1^k,\qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

这说明n个n次单位根可以由其中的一个ε_1作若干次乘方得到。

例如，当$n=3$时，有三个三次单位根：

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega$$

$$和\ \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega^2。$$

ω与ω^2都是大家所熟悉的。

定义1. 设$\varepsilon=\varepsilon_k$是一个$n$次单位根。若

$$1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$$

是n个不同的n次单位根，则称ε为n次单位原根。

按照这个定义，$\varepsilon=\varepsilon_1$就是一个$n$次单位原根。下面的定理为我们指出了全部可能的单位原根。

定理1. $\varepsilon=\varepsilon_k$是一个$n$次单位原根的充分必要条件是$k$与$n$互素。

证明 必要性 ε_k 是单位原根，按定义，在序列

$$1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \cdots, \varepsilon_k^{n-1}$$

中必须出现 ε_1。所以有一个整数 p 存在，使 $(\varepsilon_k)^p=\varepsilon_1$，即 $\varepsilon_{kp}=\varepsilon_1$。比较等式左右之幅角

$$\frac{2kp\pi}{n}=\frac{2\pi}{n}+2q\pi \quad (q\text{是一个整数})。$$

所以，$kp=1+qn$。这证明了 k 与 n 互素。

充分性 设 k 与 n 互素，则在序列

$$1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \cdots, \varepsilon_k^{n-1}$$

之中不可能有两个是相等的 n 次单位根。否则，设有 $0 \leq P_1 < P_2 \leq n-1$，使得 $\varepsilon_k^{P_1}=\varepsilon_k^{P_2}$，即 $\varepsilon_{kP_1}=\varepsilon_{kP_2}$，比较左右两边之幅角，

$$\frac{2kP_1\pi}{n}=\frac{2kP_2\pi}{n}+2q\pi(q\text{是一个整数})$$

得 $k(P_2-P_1)=qn$。因为 n 与 k 互素，所以 n 必须能够除尽 P_2-P_1，但 P_2-P_1 是一个小于 n 的正整数，它不可能被 n 除尽。因此，序列

$$1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \cdots, \varepsilon_k^{n-1}$$

是 n 个不同的 n 次单位根。ε_k 是 n 次单位原根。‖

§3. 数环与数域

从自然数到复数是数的范围的不断扩大。这是人们对客观世界的数量关系，逐步深入研究的结果，现在我们仅从四则运算这一个侧面来看一下数的发展。

如果只有正整数，我们就不可能有大小不同的度量衡单位。这说明小数与分数是必要的。这实际上是一个除法的问题，为了能进行除法，我们引入了正有理数。

中学代数与算术的主要区别之一是引入了负数。负数概念

的引入，是为了我们能够任意地进行减法。这样一来，正有理数、负有理数和零，就构成全体有理数。对于算术中的加减乘除四则运算与解一次方程（或线性方程组）来说，有理数就已经够用了。

但自然界中的数量关系却不限于四则运算与一次方程。因此人们对于“数”的概念也没有停留在有理数的水平上。边长为1的正方形，其对角线的长是$\sqrt{2}$，这不是一个有理数。此外，还有更多不能用圆规和直尺作出来的几何量。于是人们逐渐形成无理数的概念。但是，不要认为无理数只限于那些带有根号的数，某些系数为有理数的高次方程的根，就不可能通过四则运算与根式来表示。

从有理数到全体实数（即有理数与无理数的全体）不是一个代数过程。正如大家在数学分析中学到的那样，它是一个极限过程完备化。无理数把数轴上有理点之间的全部“空隙”都填满了。在实数范围内，数学分析中最重要的运算——极限运算可以毫无困难地进行。

由极限过程所得到的无理数往往不能够满足任何一个具有有理系数的高次方程。例如著名的无理数e和π就是这样。这种数叫做超越数。

复数的出现直到它被大家所公认为止，有一段较长的历史。大家知道，二次方程往往没有实根。最初，为了解

$$x^2+1=0,$$

人们引入了虚数单位$i=\sqrt{-1}$。但是$\sqrt{-1}$不像$\sqrt{2}$那样容易为人们所接受。大家宁愿这个二次方程没有根，也不愿意承认“一个数的平方可以是负数”这个现象。

为了扩大数的范围，丰富数的内容，往往不得不放弃数的某些已知性质。复数推广了实数，使得每一个n次方程永远有

n个复根。但它却不像实数那样，有正负数之分，有大小次序之别。复数之间是不可能比较大小的。通常我们只是比较复数模的大小。既然没有大小之分，当然也谈不上大于零小于零，即正负数之分了。这里，很自然的打破了“一个数的平方必须是正数”这个传统概念，因为对于复数来说，根本没有正负数之分。

十九世纪初，复数有了具体的几何解释：人们把复数看成是平面上的点或向量。以后又在许多数学、物理问题中应用了复数。这样，复数才取得了数学上的合法地位。今天，对于复数已经不应该有任何神秘的感觉。在复数的基础之上发展起来的复变函数论，在实际问题中已有了巨大的应用。

数的范围的扩大过程经历了自然数，整数，有理数，实数等阶段，最后，达到复数。我们考察一下，就代数观点看来，它们有什么异同之处。为叙述方便起见，用N表示全体自然数组成的集合。用I，R，D，C 分别表示由全体整数，有理数，实数与复数组成的集合。

在代数学的观点看来，四则运算占主要的地位。数集N，I，R，D，C有一个共同的特点：在这些数集中可以进行加法与乘法运算，而且运算的结果不会超出各个数集的范围。例如，在N中两个自然数可以相加，也可以相乘，而且它们的和与积仍然还是一个自然数，并没有超出N的范围。对于I，R，D，C这几个数集来说，也有类似的结论。在这个意义下，我们说N，I，R，D，C 这几个数集对于加法与乘法来说是封闭的。

再来看减法。两个自然数的差当被减数比减数小的时候，就不再是一个自然数了。所以数集N对于减法来说，是不封闭的。至于数集I，R，D，C则不然，它们对于减法来说，是封闭的。例如，在I中两个整数的差仍是一个整数，没有超出I的

范围。对于R，D，C这些数集来说，也有类似的结论。

最后来看除法。两个整数相除时，它们不一定可以除尽，因此两个整数的商一般不再是一个整数。这说明数集I对于除法来说是不封闭的。至于数集R，D，C则不然，它们对于除法来说都是封闭的。两个有理数的商，仍然是个有理数；两个实数之商，仍然是个实数；两个复数之商，仍然是个复数。

根据以上的分析，加以概括，得出下面的定义。

定义2. 设有某些数组成的数集S。如果数集S中任何两个数（注意，这两个可以是相同的）的和、差、积等仍然在S内，没有超出S的范围，我们就说S是一个数环。换句话说，如果数集S对于加法、减法与乘法来说是封闭的，我们就说S是一个数环。

因此，I，R，D，C等都是数环，但N不是数环。

定义3. 设有某些数组成的数集S，数集S至少含有两个不同的数。如果数集S中任何两个数的和、差、积、商（注意在作除法时，必需假设分母不为零）仍然在S内，我们就说S是一个数域。换句话说，如果S对于加法、减法、乘法与除法来说是封闭的，我们就说S是一个数域。

因此，R，D，C等都是数域，但I不是数域。

从定义可以看到，数环要比数域更广泛一些，凡数域必是数环，但数环却不一定是数域。下面来看几个例子。

例1. 所有的偶数组成一个数环，因为两个偶数的和、差、积仍然是个偶数。更一般地，整数m的一切整倍数组成一个数环，用mI表示这个数环。mI不是数域。

例2. 设P是一个素数，所有分母是P的方幂的有理数组成一个数环；所有分母与P互素的有理数也组成一个数环。

例3. 所有具有形状

$$a+b\sqrt{2}$$

的数，（其中 a，b 是任意的有理数）构成一个数域。通常用 $R(\sqrt{2})$ 来表示这个数域。数集 $R(\sqrt{2})$ 对于加减法来说，显然是封闭的。现在证明它对乘除法来说也是封闭的。

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2},$$

因为 a、b、c、d 都是有理数，所以 $ac+2bd$，$ad+bc$ 也是有理数，这就说明乘积 $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$ 还在 $R(\sqrt{2})$ 内，所以 $R(\sqrt{2})$ 对于乘法是封闭的。

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，则 $a-b\sqrt{2}$ 也不为零（为什么？）而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

因为 a、b、c、d 是有理数，所以 $\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}$，$\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$ 也是有理数。这就证明了 $R(\sqrt{2})$ 对于除法的封闭性。

如果在上述例子中，把系数 a，b 限制为整数，我们就得到一个数环，而不是数域。

显然，我们可以考虑 $R(\sqrt{3})$，$R(\sqrt{5})$，…，甚至 $R(\sqrt{-1})$，这些都是数域。

4．所有 π 的整系数多项式

$$a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots+a_n\pi^n\ (a_i 是整数)$$

组成一个数环。所有 π 的整系数有理分式

$$\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}\ (a_i, b_i 是整数)$$

组成一个数域。

例5，所有奇数组成的数集，它对于乘法是封闭的，但对于加减法却不是封闭的。n 个 n 次单位根组成一个数集，它对于乘除法都是封闭的，对于加法却不封闭。$\sqrt{2}$ 的全体整倍数组

成一数集，它对于加减法是封闭的，但对于乘除法却不封闭。当然，以上各数集都不是数环，更不会是数域。

在所有的数环中，都必须包含零。为证明这点，只要在数环中任取一个数a，并且注意到数环对于减法是封闭的，所以$a-a=0$应该在该数环中。

所有的数域都必须包含有理数域R作为它的一部分。换句话说，有理数域R是最小的数域。现在来证明这点，设P是一个数域。因为P中至少有两个不同的数，所以P中除了零之外，一定还有一个不为零的数，设为a。P对于除法是封闭的，所以$\frac{a}{a}=1$必属于P。既然P含有1，它也一定含有一切的有理数，因为有理数作为1经过有限次加减乘除运算后的结果，应该还在P内。

如果在我们讨论某一个问题的过程中，只是进行了有限多次的加减乘等运算，并且只是与这些运算的代数性质有关，那么可以把讨论的范围规定在某一个数环之内。这个数环是可以任意选择的。而讨论所得到的结果，对于每一个数环都是适用的。

例如行列式的理论，是对于任何一个数环都能适用的普遍理论。

如果在讨论某一个问题的过程中，只是进行了有限次的加减乘除等四则运算，并且只是与这些运算的代数性质有关，那么可以把讨论的范围限制在某一个数域之内。这个数域是可以任意的。而讨论所得的结果，对于每一个数域都是适用的。

例如有关线性方程组，初等变换，向量的线性相关等理论，是对于任何数域都能适用的普遍理论。

这就是引进数环与数域的好处。