★★★★★★★★★★★★★★★

TONGBU DAOXUE 新课程

同步导学

选修2-3

高中数学

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

Contents 目录

第1章 计数原理

第2章 概率

第3章 统计案例

第1章 计数原理

1.1 两个基本计数原理(1)

【新知导读】

1. 分类计数原理：

____

____

____.

2. 分步计数原理：

____

____

____.

3. 若整数 x, y 满足 $|x|<4$, $|y|<5$, 则 (x, y) 为坐标的点共________个.

4. 若集合 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B=\{b_1, b_2\}$, 从集合 A 到集合 B, 可建立________个不同的映射, 从 B 到 A 可建立________个不同的映射.

【范例点睛】

例 1 (1) 若 $1\leqslant x\leqslant 4$, $1\leqslant y\leqslant 5$, 则以有序整数对 (x, y) 为坐标的点共有多少个?

(2) 若 $x, y\in \mathbf{N}$ 且 $x+y\leqslant 6$, 则有序自然数对有多少个?

思路点拨: 先确定 x 取值的个数, 再确定 y 取值的个数, 使用分步计数原理计算.

例 2 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, $a\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $b\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 这样的椭圆共有多少个?

思路点拨: 注意要排除 $a=b$ 时的情况.

【自我检测】

1. 已知 $m\in\{1, 2, 3, 4\}$, $n\in\{5, 6, 7, 8\}$, 则 $m+n$ 可表示的不同值的个数为 ( )

A. 2　　B. 4　　C. 7　　D. 16

2. 一个书架上第一排有 5 本不同的文科书, 第二排有 6 本不同的理科书, 从书架上任取一本书的取法共有 ( )

A. 5 种　　B. 6 种　　C. 11 种　　D. 30 种

3. 教学大楼共有 4 层, 每层都有东西两个楼梯, 由一层到 4 层的走法共有 ( )

A. 2 种　　B. 2^2 种　　C. 2^3 种　　D. 3^2 种

4. 将三封信投入三个信箱, 可能的投放方法共有 ( )

A. 1 种　　B. 6 种　　C. 9 种　　D. 27 种

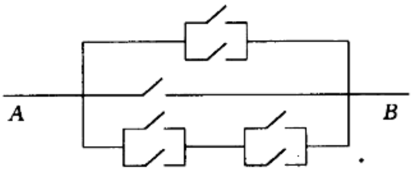
5. l_1 与 l_2 是异面直线, l_1 上有 5 个不同点, l_2 上有 4 个不同的点, 一共可组成直线 ( )

A. 9 条　　B. 20 条　　C. 22 条　　D. 30 条

6. $a\in\{1,2,3\}$, $b\in\{4,5,6\}$, $r\in\{9,16,25\}$, 则方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 所表示的不同圆共有________个.

7. 乘积 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有________项.

8. 如图,从 A 到 B 共有________条不同的线路可通电.



(第 8 题)

9. 沿着正方体的棱从一个顶点到与它相对的另一个顶点的最近路线共几条?　　(　　)

A. 6 条　　B. 5 条　　C. 4 条　　D. 3 条

10. 4 个同学各拿一张贺卡,先集中起来,然后每人从中拿出一张别人送的贺卡. 则四张贺卡的不同分配方式共有　　(　　)

A. 6 种　　B. 9 种　　C. 11 种　　D. 23 种

1.1　两个基本计数原理(2)

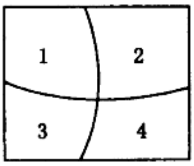
【新知导读】

1. 从 5 个中国人、4 个美国人、3 个日本人中各选一人的选法有　　(　　)

A. 12 种　　B. 24 种　　C. 48 种　　D. 60 种

2. AB 与 CD 为平面内两条相交直线,除交点外,在 AB 上取 4 个点,在 CD 上取 3 个点,则以这 8 个点为顶点的三角形的个数是____________.

3. 如图,用 5 种不同颜色给图中标有 1、2、3、4 各部分涂色,每部分只涂一种颜色,且相邻两部分涂不同颜色. 则不同的涂色方法共有　　(　　)



(第 3 题)

A. 160 种　　B. 240 种

C. 260 种　　D. 360 种

【范例点睛】

例 1　n^2 个人排成 n 行 n 列,若从中选出 n 名代表,要求每行每列都有代表,则不同的选法共有________种.

思路点拨:第一行有 n 种选法,第二行有 $n-1$ 种选法,……,第 n 行有 1 种选法.

例 2　某座四层大楼共有三个大门,楼内有两个楼梯,那么由楼外到这座楼内的第四层的不同走法种数有多少?

思路点拨:每层楼有 2 种走法.

【自我检测】

1. 某学校高一年级共 8 个班,高二年级 6 个班,要从中选一个班级担任学校星期一早晨升旗任务,共有安排方法　　(　　)

A. 8 种　　B. 6 种　　C. 14 种　　D. 48 种

2. 设东、西、南、北四面通往某山顶的路分别有 k, l, m, n 条 ($k<l<m<n$)，要使从一面上山，再从任意方向下山的走法最多，应 ( )

A. 从东面上山 B. 从西面上山 C. 从南面上山 D. 从北面上山

3. 10 个苹果分成三堆，每堆至少 2 个，共有分法 ( )

A. 64 种 B. 16 种 C. 4 种 D. 1 种

4. 在六棱锥各棱所在的 12 条直线中，异面直线共有 ( )

A. 12 对 B. 24 对 C. 36 对 D. 48 对

5. 有 4 名高中毕业生报考大学，有三所大学可供选择，每人只能填报一所大学，则报名的方案数为 ( )

A. 3^4 B. 4^3 C. A_4^3 D. C_4^3

6. 从 1, 3, 5, 7 中任取 1 个数字，从 0, 2, 4, 6 中任取 1 个数字，组成没有重复数字的 2 位数，其中能被 5 整除的 2 位数共有________个.

7. 有五种颜色的小旗，任意取出三面排成一行表示各种信号. 共可以表示____________种不同的信号.

8. 将一个四棱锥的五个顶点各染上一种颜色，并使同一条棱的两端异色，若只有四种颜色可供选用，则不同的染色方法的种数为 ( )

A. 36 B. 48 C. 64 D. 72

9. 某仪器显示屏上一排有 7 个小孔，每个小孔可显示出 0 或 1，若每次显示其中 3 个孔，但相邻的 2 个孔不能同时显示，则这个显示屏能显示出不同信号的种数为 ( )

A. 80 B. 60 C. 48 D. 10

10. 有一角硬币 3 枚，贰元币 6 张，百元币 4 张，共可组成多少种不同的币值？

1.2 排 列 (1)

【新知导读】

1. 平面上有 5 个不同的点，以其中的 2 个点为向量的端点，则这样的向量有 ( )

A. C_5^2 B. 2^5 C. A_5^2 D. 5^2

2. 某城市的电话号码由六位升至七位(首位不为 0)，则该城市可增加的电话门数是 ( )

A. $9\times9\times10^5$ B. 9×10^6

C. 8×9^6 D. $9\times8\times7\times6\times5\times4\times3$

3. 身高互不相同的 7 名运动员排成一排，甲、乙、丙三人自左向右从高到矮排列且互不相邻的排法共有 ( )

A. $\frac{1}{2}A_4^4A_5^3$ B. $2A_4^4C_5^3$ C. $A_4^4A_5^3$ D. $A_4^4C_5^3$

4. 5 名学生站成 1 排，其中 A 不站在两端，B 不站在中间，则不同的排法有 ( )

A. 36 B. 54 C. 60 D. 66

【范例点睛】

例 1 由 1 到 9 这九个数字中每次选出 5 个组成无重复数字的 5 位数.

(1) 其中奇数位置上只能是奇数,问有多少个这样的 5 位数?

(2) 其中奇数只能在奇数位置上,又有多少个这样的 5 位数?

思路点拨:注意特殊元素、特殊位置优先考虑.

例 2 由 0, 1, 2, 3, 4 这 5 个数字组成无重复数字的 5 位数.

(1) 比 23 400 大的有多少个?

(2) 若按从小到大的顺序排列,则 42 130 是第几个数?

(3) 若按从小到大的顺序排列,第 60 个数是多少?

思路点拨:注意分类标准的确定,利用分类计数原理计算.

例 3 有 3 名男生,4 名女生,在下列不同的要求下,求不同的排法种数.

(1) 全部排成一排;

(2) 全部排成一排,其中甲只排在中间或两头;

(3) 全部排成一排,甲、乙必须在两头;

(4) 全部排成一排,甲不在最左边,乙不在最右边;

(5) 全部排成一排,男女生各排在一起;

(6) 全部排成一排,男生必须排在一起;

(7) 全部排成一排,男女生各不相邻;

(8) 全部排成一排,男生不排在一起;

(9) 全部排成一排,其中甲、乙、丙三位同学自左向右顺序不变;

(10) 全部排成一排,其中甲、乙两人中间必须有三个人.

思路点拨:注意特殊元素、特殊位置优先考虑.

【自我检测】

1. 5 本不同的课外读物分给 5 位同学,每人一本,则不同的分配方法有 ( )

A. 20 种　　B. 60 种　　C. 120 种　　D. 100 种

2. 对于小于 55 的自然数 n,乘积 $(55-n)(56-n)\cdots(68-n)(69-n)$ 等于 ( )

A. A_{69-n}^{55-n}　　B. A_{69-n}^{15}　　C. A_{55-n}^{15}　　D. A_{69-n}^{14}

3. 8 名同学排成 2 排,每排 4 人,排法总数为 ( )

A. $A_4^4+A_4^4$　　B. $A_4^4A_3^3$　　C. $A_4^4A_4^4$　　D. A_8^8

4. 有三张卡片,它的正反面分别写有 0 与 1, 2 与 3, 4 与 5,用这三张卡片排成三位数,共可得不同的三位数个数为 ( )

A. 720　　B. 48　　C. 40　　D. 6

5. 由 0, 1, 3, 5, 7, 9 中任取两个数作除法,可得到不同的商的个数为 ( )

A. 30　　B. 21　　C. 19　　D. 20

6. 2 名医生和 4 名护士被分配到 2 所学校为学生体检,学校分配 1 名医生和 2 名护士,不同的分配方式有 ( )

A. 6 种　　B. 12 种　　C. 18 种　　D. 24 种

7. (1) $\dfrac{2A_9^5+3A_9^6}{A_9^9-A_{10}^6}=$ ________; (2) $\dfrac{n[n!+(n-1)!]}{(n+1)!-n!}=$ ________.

8. 从 n 个不同元素中选 m $(2<m\leqslant n)$ 个元素作排列，排列总数为________，其中某个元素只能排在某个位置上的排列为________.

9. 数字 1, 2, 3, 4, 5 可组成________个没有重复数字的三位数，________个没有重复数字的四位数，________个没有重复数字的五位数.

10. 某餐厅供应客饭，每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 荤 2 素共四种不同的品种. 现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜，若每位顾客要求有 200 种以上的不同选择，则餐厅至少还需准备不同的素菜品种________种.

11. 从 1～100 的自然数中，每次取出 2 个不同的数相加，和不大于 100，共有多少种不同取法？

1.2 排 列 (2)

【新知导读】

1. 5 个人排成一排，其中甲、乙两人至少有一人在两端的排法种数有 ( )

A. A_3^3 B. $4A_3^3$ C. $A_5^5-A_3^2A_3^3$ D. $A_2^2A_3^3+A_2^1A_3^1A_3^3$

2. 某班委会五人分工，分别担任正、副班长，学习委员，劳动委员，体育委员，其中甲不能担任正班长，乙不能担任学习委员，则不同的分工方案的种数是________.

3. 从 a, b, c, d 这四个不同元素的排列中，取出三个不同元素的排列为________________.

4. 4 名男生，4 名女生排成一排，女生不排两端，则有________种不同排法.

【范例点睛】

例 1 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的数.

(1) 可组成多少个能被 5 整除的四位数.

(2) 可组成多少个奇数字与偶数字相间排列的四位数.

(3) 求所有四位数的个数和及所有四位数的和.

思路点拨：在求所有四位数的和时，可以考虑各个数字出现的次数.

例 2 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字，组成没有重复数字的五位数.

(1) 在下列情况，各有多少个?

①奇数；②能被 5 整除；③能被 15 整除；④比 35 142 小；⑤比 50 000 小且不是 5 的倍数.

(2) 若把这些五位数按从小到大排列，第 100 个数是什么?

思路点拨：若一个数的数字之和能被 3 整除，则这个数能被 3 整除；一个数的末位数字能被 5 整除，则这个数能被 5 整除.

【自我检测】

1. 某班上午要上语文、数学、体育和外语四门课，体育老师因故不能上第一节和第二节，不同

的排课方法有 ( )

A. 24 种 B. 12 种 C. 20 种 D. 22 种

2. 书架上原来摆放着 6 本书,现在要插入 3 本不同的书,则不同的插法为 ( )

A. A_7^3 B. A_4^4 C. A_9^3 D. $2A_3^3$

3. A, B, C, D, E 五人并排站成一排,如果 B 必须在 A 的右边,A, B 可以不相邻,那么不同的排法共有 ( )

A. 24 B. 60 C. 90 D. 120

4. 用 0, 1, 2, 3, 4 这五个数字组成无重复数字的五位数,其中偶数共有 ( )

A. 36 个 B. 72 个 C. 48 个 D. 60 个

5. 要排 1 个有 5 个独唱节目和 3 个舞蹈节目的节目单,如果舞蹈节目不在排头,且任何两个舞蹈节目不相邻,则不同的排法总数为________.

6. 从 1 到 1 999 的所有自然数中,仅含一个数字 0 的自然数的个数为________.

7. 某城市的电话号码从 7 位升到 8 位,从理论上讲这一改号增加的用户数是 ( )

A. $8!-7!$ B. $8^{10}-7^{10}$ C. 10^8-10^7 D. $A_{10}^8-A_{10}^7$

8. $1!+2!+3!+\cdots+1\,000!$ 的个位数字是 ( )

A. 3 B. 5 C. 8 D. 9

9. 从$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$中取出 3 个不同元素作 $ax+by+c=0$ 的系数,可表示不同直线的个数为________.

10. 某天某班的课表上午有 5 节课,下午有 2 节课,要安排语、数、外、理、计算机、体育和美术七门课程,若上午第一节不排体育,数学必须排在上午,美术必须排在下午,共有不同的排课方法种数为________.

11. 由 1, 2, …, 7 七个数字排成一排,若 2, 6 两个数字中间插入两个数,则组成的各位数字相异的七位数有________个.

12. 有五面各种颜色的小旗,任意取出三面排成一行表示各种信号. 问:共可以表示多少种不同的信号?

1.3 组 合 (1)

【新知导读】

1. 填写下表:

	定 义	特 点	相同(排列或组合)	公 式
排 列				
组 合				

2. 组合数的概念：____.

3. $A_n^m=$ ________ $\cdot A_m^m$；$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=$ ____________________.

4. $C_{12}^5+C_{12}^6=$ （ ）

A. C_{13}^5 B. C_{13}^6 C. C_{13}^{11} D. C_{12}^7

5. $C_8^3=$ ________；$C_7^2=$ ________；$C_7^3=$ ________.

【范例点睛】

例1 写出从 A, B, C, D 四个景点选出 2 个进行游览的所有可能性.

思路点拨：列举时要不重不漏.

例2 (1) 求证：$C_{m+2}^n=C_m^n+2C_m^{n-1}+C_m^{n-2}$；

(2) 解关于 x 的方程：$C_{13}^{x+1}=C_{13}^{2x-3}$.

例3 一个口袋内装有大小相同的 8 个红球和 2 个黑球.

(1) 从口袋内取出 3 个球，共有多少种取法？

(2) 从口袋内取出 3 个球，使其中含有 1 个黑球，有多少种取法？

(3) 从口袋内取出 3 个球，使其中不含黑球，有多少种取法？

【自我检测】

1. 正六边形的对角线的条数是 （ ）

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

2. 以下关于组合说法正确的是 （ ）

A. 组合就是排列 B. 组合关键是排好顺序

C. 组合不用考虑元素的顺序 D. 以上都不对

3. 以下各选项中不是组合的是 （ ）

A. 从 3 人中选 2 人做学生代表 B. 从 20 人中选 2 人做班长和团支书

C. 6 个人相互握手 D. 从 30 件相同产品中选 3 件做样本

4. 乘积 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_s)$ 展开后的项数是 （ ）

A. C_n^2 B. C_s^2 C. $C_n^1\cdot C_s^1$ D. $A_n^1\cdot A_s^1$

5. 若 $m\neq n$，则组合数 C_n^m 等于 （ ）

A. $\dfrac{A_n^m}{n!}$ B. $\dfrac{n}{m}C_{n-1}^m$ C. C_m^{n-m+1} D. $\dfrac{n}{n-m}C_{n-1}^m$

6. 已知 $C_{n+1}^7-C_n^7=C_n^8$，那么 n 等于 （ ）

A. 14 B. 12 C. 13 D. 15

7. 200 件产品中有 3 件是次品，现从中任意抽取 5 件，其中至少有 1 件次品的抽法种数为 （ ）

A. $C_{10}^2C_{197}^3$ B. $C_3^2C_{197}^3$ C. $C_{200}^5-C_{197}^5$ D. $C_{200}^5+C_2^1C_{197}^4$

8. 从 0, 1, 2, 3, 5, 7, 11 七个数字中每次取出三个相乘，共有________个不同的积.

9. 甲、乙、丙、丁四个建筑公司承包 8 项工程，甲公司承包 3 项工程，乙公司承包 1 项，丙和丁各承包 2 项，则共有________种承包方式.

10. 一个袋子里有 4 个不同的红球，6 个不同的白球，从中任取 4 个使得取出的球中红球比白

球多的取法有多少种？红球不少于白球的取法又有多少种？

11. 四个小球放入编号为 1，2，3，4 四个盒子中，依下列条件各有多少种放法.

(1) 四个小球不同，每个盒子各放一个；

(2) 四个小球相同，每个盒子各放一个；

(3) 四个小球不同，四个盒子恰有一个空着；

(4) 四个小球相同，四个盒子恰有一个空着.

1.3 组 合 (2)

【新知导读】

1. $C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+$________.

2. $C_{n-1}^{k}+C_{n-2}^{k}+C_{n-3}^{k}+\cdots+C_{k+1}^{k}+C_{k}^{k}=$________.

3. (1) 若 $C_{7}^{x}=C_{7}^{2}$，则 $x=$________；

(2) 若 $C_{x}^{12}=C_{x}^{18}$，则 $x=$________；

(3) $C_{97}^{94}+C_{97}^{95}+C_{98}^{96}+C_{99}^{97}=$________.

4. 从 10 本不同的科技书、3 本不同的外语书中选 5 本书，其中至少有 2 本外语书不同选法种数为________.

5. 10 人分成两队进行篮球比赛，每队 5 人的不同分法有________种.

【范例点睛】

例 1 有 4 名男生，5 名女生.

(1) 从中选出 5 名代表，有多少种选法？

(2) 从中选出 5 名代表，男生 2 名，女生 3 名且某女生必须在内有多少种选法？

(3) 从中选出 5 名代表，男生不少于 2 名，有多少种选法？

(4) 分成三个小组，每组依次有 4，3，2 人有多少种分组方法？

思路点拨：分组问题要注意有没有顺序.

例 2 6 本不同的书分给甲、乙、丙 3 同学，每人各得 2 本，有多少种不同的分法？

思路点拨：解排列组合混合应用题时，可以考虑“先取后排”；也可以构造适当模型来解决.

例 3 6 个人进两间屋子，(1)每屋都进 3 人；(2)每屋内至少进 1 人：问各有多少种分配方法？

思路点拨：正难则反，在解排列组合问题时，经常使用间接法，往往比较方便.

【自我检测】

1. 空间 9 个点分布在异面直线 l_1，l_2 上，l_1 上有 4 个点，l_2 上有 5 个点，则由它们可确定异面直线 （ ）

A. 180 对　　B. 21 对　　C. 121 对　　D. 60 对

2. 把半圆弧分成九等份,以这些分点(包括直径端点)为顶点,作出的钝角三角形有　(　　)

A. 120 个　　B. 112 个　　C. 165 个　　D. 156 个

3. 6 本相同的数学书和 3 本相同的语文书分给 9 个人,每人 1 本,共有不同分法　(　　)

A. C_9^3　　B. A_9^3　　C. A_9^6　　D. $A_9^3 \cdot A_3^3$

4. 身高互不相同的 6 个人排成 2 横 3 纵列照相,在第一行的每个人都比他同列身后的人个子矮,则不同的排法种数为　(　　)

A. 1　　B. 15　　C. 90　　D. 54

5. 平面上四条平行直线与另外五条平行直线垂直,则它们可以构成________个矩形.

6. 3 个人坐在一排的 8 个座位上,若每人两边都有空位,则不同的坐法种数为________.

7. $C_{10}^{r+1}+C_{10}^{17-r}$ 可能的值的个数为　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 不确定

8. 马路上十盏路灯,为了节约用电需要关掉三盏路灯,但两端两盏不能关掉,也不能同时关掉相邻的两盏或三盏,这样的关灯方法有　(　　)

A. 56 种　　B. 36 种　　C. 20 种　　D. 10 种

9. 2 310 的正约数有________个,其中偶数有________个.

10. 一条铁路原有 n 个车站,为适应客运需要新增加了 m 个车站 ($m>1$),客车车票增加了 62 种,问原有多少个车站?现有多少个车站?

11. 一个口袋内装有 4 个不同的红球,6 个不同的白球,若取出一个红球记 2 分,取出一个白球记 1 分,从口袋中取 5 个球,使总分不小于 7 分的取法有多少种?

1.4　计数应用题

【新知导读】

1. 从 4 种蔬菜品种中选出 3 种,分别种植在不同土质的 3 块土地上进行试验,不同的种植方法有(　　)种

A. 4　　B. 12　　C. 24　　D. 72

2. 3 名乒乓球国手参加“希望工程”献爱心活动,他们准备救助云南边远山寨 7 名失学孩子,使他们重返校园,其中把 7 名孩子分成 1 人、3 人、3 人三个组后再分给 3 名国手,这样的方案有____________种.

3. 某届世界杯足球赛决赛,共有 24 个队参加,它们先分成六个小组进行单循环赛,决出 16 强,这 16 个队按照确定的程序进行淘汰赛,最后决出冠、亚军和第三四名. 总共需要安排______________场比赛.

【范例点睛】

例 1 导演从学校选出 200 名预备群众演员，其中有两人是教师，其余是学生，现在要从中选出 5 人上场演出.

(1) 两名教师都被选的情况有多少种?

(2) 没有选到教师的情况有多少种?

(3) 只有一个教师被选的情况有多少种?

(4) 至少有一个教师被选出的情况有多少种?

思路点拨：考察常见的基本组合问题的处理. 要求能对题目中不同的叙述，对不同的条件进行正确判断、理解、处理.

例 2 一名优秀学生今年被保送到重点院校深造，他要填报志愿表. 如果有 4 所院校，并且每所院校有 3 个不同的专业可供他选择. 他的志愿表如下：

学　　校	专　　业	
1.	1.	2.
2.	1.	2.
3.	1.	2.

填表时要求只能选择 3 所学校，每所学校只能选择 2 个专业，那么这名优秀生的志愿表有多少种不同的填法?

思路点拨：这是一个分排的排列问题. 如同电影院座位问题，选多少人坐，坐什么位置. 分排的排列问题一般可以直排处理.

例 3 有 x 名棋手参加的单循环制象棋比赛，其中有 2 名选手各比赛了三场就退出比赛，且这两选手之间未进行比赛，这样到比赛全部结束时共比赛了 84 场. 问原来有多少人参加这项比赛?

思路点拨：这是一个简单的列解组合数方程的问题，关键在“列”.

【自我检测】

1. $A_{2n}^3=20A_n^3$，则 $n=$ ________；已知 $C_{22}^{n+3}=C_{22}^{3n-5}$，则 $n=$ ________.
2. 把 5 本不同的书分给 4 位同学，每人至少 1 本，不同分法的种数为________.
3. 从正六边形的顶点及中心共 7 个点中，任取 3 个点为顶点的三角形共有________个.
4. 已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{6, 7, 8, 9, 10\}$，从集合 A 中选 3 个元素，从集合 B 中选 2 个元素，则能组成____________个含有 5 个元素的集合.
5. 用 0，1，2，3，4 这五个数字组成没有重复数字的五位数，且其中奇数数字相邻的有____________个.
6. 若一辆公共汽车上有乘客 4 人，其中任何两人不在同一车站下车，汽车沿途停靠 6 个车站，那么不同的下车方法有____________种.
7. 从 1，3，5 中任取两个数字，从 2，4，6 中任取两个数字，共可组成多少个没有重复数字的四位偶数有____________个.
8. “渐升数”是指每个数字比左边的数字大的自然数(如 25 789)，则在所有的四位数中，“渐升

数”共有____________个.

9. 在0到9这10个数字中任取4个不同整数组成一个四位数,则其中偶数的个数是____________.

10. 一次乒乓球赛有9个国家的乒乓球队参加,其中有3个是亚洲国家.现抽签分成A, B, C三组(每组三队)三组进行预赛.

(1) 如果是单循环赛制,预赛共要安排多少场比赛?

(2) 三个组中各有一个亚洲国家的分法有多少种?

(3) 三个亚洲国家球队集中在某一组的分法有多少种?

1.5　二项式定理(1)

【新知导读】

1. $(a+b)^n=$________________________;

$(a-b)^n=$________________________.

2. 在$(1+x)^n$的展开式中,第9项为　(　　)

A. $C_n^8Cx^{n-8}$　　B. $C_n^8x^8$　　C. $C_n^9x^{n-9}$　　D. $C_n^9x^9$

3. 在$(a-b)^n$ $(n\in \mathbf{N}_+)$展开式中,第r项的系数为　(　　)

A. C_n^r　　B. C_n^{r-1}　　C. $(-1)^rC_n^r$　　D. $(-1)^{r-1}C_n^{r-1}$

4. 在$\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)^n$展开式中,第5项的二项式系数和第七项的二项式系数相等,则n等于　(　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

【范例点睛】

例1　已知$(1+a)^n$展开式中连续3项的系数比为3∶8∶14,求展开式中系数最大的项.

思路点拨:本题中系数最大的项就是二项式系数最大的项.

例2　求$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^3$展开式中的常数项.

思路点拨:从形式上$x+\frac{1}{x}-1$“凑”成两项,从而满足二项式定理的形式要求.

例3　在$(a+b)^{23}$的展开式中,是否存在连续三项,这三项的系数成等差数列?如果存在,说明是哪些项,如果不存在,说明理由.

思路点拨:利用通项公式.

【自我检测】

1. 二项式$(a+b)^{2n}$ $(n\in \mathbf{N}_+)$的展开式中,二项式系数最大的项是　(　　)

A. 第 n 项　　B. 第 $n+1$ 项　　C. 第 $n+2$ 项　　D. 不确定

2. 在 $(a+b)^n$ 展开式中与第 k 项系数相同的项是　（　　）

A. 第 $n-k$ 项　　B. 第 $n-k+1$ 项　　C. 第 $n-k+2$ 项　　D. 第 $n+k-1$ 项

3. $(a+b)^n+(a-b)^n$ (n 是奇数)展开式合并后还有　（　　）

A. $2(n+1)$ 项　　B. $\frac{n+1}{2}$ 项　　C. $n+1$ 项　　D. $\frac{n-1}{2}$ 项

4. 若 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ ($n\in\mathbf{N}_+$) 展开式中含有常数项,则 n 必为　（　　）

A. 奇数　　B. 偶数　　C. 3 的倍数　　D. 6 的倍数

5. 在 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ 展开式中系数最大的项是　（　　）

A. 第 5、7 项　　B. 第 6、2 项　　C. 第 5、6 项　　D. 第 6、7 项

6. 在 $(a+b+c)^6$ 展开式中,含 a^3b^2c 的项的系数是　（　　）

A. $C_6^3C_3^2$　　B. C_6^3　　C. $C_6^3C_5^2$　　D. $C_6^1C_4^2$

7. $\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$ 展开式中有理项共有________项.

8. $35^{2\,003}$除以 6 的余数为________.

9. 若 $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{a}\right)^n$ 展开式中,第三项含有 a^4,则 $n=$________.

10. 已知 $(x^{\lg x}+1)^n$ 展开式中最后三项系数之和 22,且二项式系数最大的项的值为 20 000,则 x 的值为________.

11. $(1+x)^6(1-x)^4$ 展开式中含有 x^3 项的系数为________.

12. 已知 $S_n=2^n+C_n^1 2^{n-1}+C_n^2 2^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot 2+1$ ($n\in\mathbf{N}_+$),
求证:当 n 为偶数时,S_n-4n-1 能被 64 整除.

1.5　二项式定理(2)

【新知导读】

1. 已知 $(1+x)^n=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$,若 $2a_4=3a_{n-6}$,则 n 的值是________.

2. 2^{220}除以 17 的余数是________.

3. 已知 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$,若 $b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n=30$,则 $n=$________.

4. 在 $(5x+2y)^{20}$ 的展开式中,第________项系数最大.

【范例点睛】

例 1　已知 $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中前三项的二项式系数和为 37，求此展开式中的有理项.

思路点拨：有理项即 x 的指数为整数的项.

例 2　利用二项式定理证明：$3^n>2^{n-1}(n+2)$. $(n\in\mathbf{N}_+,\ n>2)$

思路点拨：将 3^n 改写成 $(2+1)^n$，再用二项式定理展开.

例 3　在二项式 $(ax^m+bx^n)^{12}$ $(a>0,\ b>0,\ m,\ n\neq 0)$ 中 $2m+n=0$，如果它的展开式中系数最大的项恰为常数项.

(1) 此项是第几项？

(2) 求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

思路点拨：系数最大的项即为满足 $\begin{cases}C_n^r a^{n-r}b^r\geqslant C_n^{r-1}a^{n+1-r}b^{r-1}\\ C_n^r a^{n-r}b^r\geqslant C_n^{r+1}a^{n-r-1}b^{r+1}\end{cases}$ 的项，再由此条件求出 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

【自我检测】

1. 已知 $C_{n+1}^7-C_n^7=C_n^8$，那么 n 等于　(　　)

A. 14　　B. 12　　C. 13　　D. 15

2. $C_n^0+3C_n^1+9C_n^2+\cdots+3^nC_n^n$ 的值等于　(　　)

A. 4^n　　B. $3\cdot 4^n$　　C. $\frac{4^n}{3}-1$　　D. $\frac{4^n-1}{3}$

3. $C_{11}^1+C_{11}^3+\cdots+C_{11}^9$ 的值为　(　　)

A. 2 048　　B. 1 024　　C. 1 023　　D. 512

4. $(x+1)(2x+1)(3x+1)\cdots(nx+1)$ 展开式中 x 的一次项系数为　(　　)

A. C_n^{n-1}　　B. C_n^2　　C. C_{n+1}^2　　D. 不能用组合数表示

5. 设 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$ 等于　(　　)

A. 2^{2n}　　B. 3^n　　C. $\frac{3^n-1}{2}$　　D. $\frac{3^n+1}{2}$

6. $(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$ 展开式中 x^4 的系数为　(　　)

A. C_{11}^5　　B. C_{11}^4　　C. C_{10}^5　　D. C_{10}^4

7. 已知 $(\sqrt{2}-x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则 $(a_0+a_2+\cdots+a_{10})^2-(a_1+a_3+\cdots+a_9)^2$ 的值为　(　　)

A. $(\sqrt{2}-1)^{10}$　　B. 0　　C. -1　　D. 1

8. 0.95^5 精确到 0.01 的近似值为________.

9. $11^{100}-1$ 的末位连续零的个数为________.

10. 在 $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$ 展开式中各项的二项式系数和为 1 024，则展开式中常数项为________.

11. $(2x+3y)^{28}$ 展开式中系数最大的项是第________项.

12. 已知：$a, b \in \mathbf{R}^{+}$，$n>1$，$n \in \mathbf{N}^{*}$，求证：$\dfrac{a^{n}+b^{n}}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{n}$.

13. 如下表，它满足：①第 n 行的首尾两数均为 n；②表中的递推关系类似杨辉三角；则第 n 行 $(n \geqslant 2)$ 的第二个数是多少？

$$
\begin{array}{c}
1 \\
2 \quad 2 \\
3 \quad 4 \quad 3 \\
4 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \\
5 \quad 11 \quad 14 \quad 11 \quad 5 \\
6 \quad 16 \quad 25 \quad 25 \quad 16 \quad 6 \\
7 \quad 22 \quad 41 \quad 50 \quad 41 \quad 22 \quad 7
\end{array}
$$