力学热学基础

北京师范学院物理系
力学热学教研室

一九七七年八月

说　　明

这部《力学热　基础》教材是以无产阶级文化大革命后几年来，我们在师院物理系学员中进行力学热学课教学的讲义为根据编写的。为了尊重基础理论的系统性、连贯性和典型机器的综合性这客观存在着的不同特点，我们把基础理论教材与学工教材分成两部分进行编写。在教学安排上，将学工讲义部分规定的教学内容安插在基础理论教学的前面和后期结合学工劳动来集中进行，力图作到理论与实践的紧密结合。

全部教材共分三册：

第一册——力学热学基础（中学力学热学知识补课及学工材料之一）

内容包括三部分：

1.中学力学、热学知识补课教材；

2.机工钳工初步知识；

3.汽车结构原理及维修保养的初步常识。

第二册——农业机械（学工教材之二）

内容包括：拖拉机、作业机械和水泵三部分。

第三册——力学热学基础（基础理论部分）

内容包括刚体的平衡、材料的力学性质、机械运动的基本规律、功和能和曲线运动、刚体力学、流体力学、振动和波、热学与分子物理学基础等九章。

第一、第二两册已分别于77年3月和76年10月印出。本册属于第三册。

由于编者马列主义、毛泽东思想水平不高，学识浅薄，教学经验不足，教材中一定会有许多缺点和错误，诚恳地希望读者批评指正。

目　　录

第一部分　力　学

第二部分 热 学

第一章　物体的平衡

物体平衡的知识是建筑工程和机械工程的重要基础。复杂如人民大会堂、南京长江大桥等大型工程，简单如路灯支架，起重设备等小型结构，在设计时都必须考虑其受力的平衡问题。

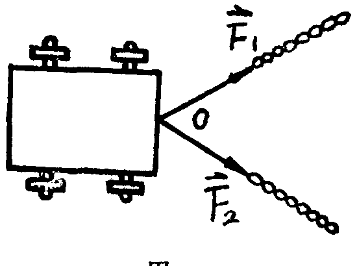
毛主席教导我们说：**“所谓平衡，就是矛盾的暂时的相对的统一。”“对立的统一是有条件的。”**研究物体的平衡，主要是研究物体平衡时所遵从的平衡条件。本章研究物体在不同力系作用下的平衡条件、受力分析和计算，同时介绍有关力的合成与分解的基本知识。这些内容是学习全部力学课程的重要基础，应予很好地掌握。另外，结合力学知识的学习，本章也讲一些矢量代数的初步知识，读者学习时可以参考有关的专门书籍。

§1　力的合成、矢量的加法

在生产实践中，我们常见到一个物体同时受到几个力作用的情况。我们就把这作用在同一物体上的一组力叫作一个力系。力系中的每一个力都会对物体发生作用。但是，在很多实际问题中，我们并不需要知道每一个力究竟对物体产生多大的作用，只需知道这些力对物体作用的总效果。例如两匹马拉一辆车，为要知道车的运动情况，只需知道这两个拉力作用的总效果就可以了。如果能够找出一个单力，它对物体作用的效果与几个力共同作用的总效果相同，这个力就叫做那几个力的合力。由几个已知的力求合力，就叫做力的合成。

一、两个共点力的合成

如果作用在同一物体上的几个力的作用点相同，这些力构成的力系就叫做共点力系，简称共点力。物体受两个共点力的情况是很常见的。例如用两条绳子拉着斗车前进（图１－１甲表示的是这种情况的俯视图）时，斗车受拉力的情况；以及用一水平绳把电线拉成与竖直方向成一角度（图１－１乙）时下垂的一段电线受拉力的情况，即为两个共点力的例子。



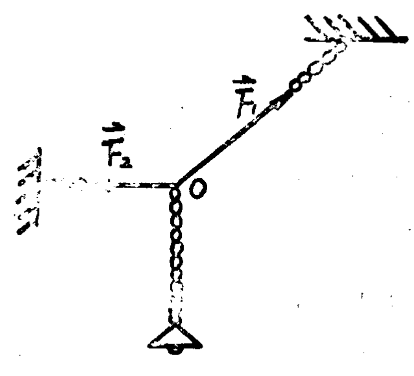


图１－１　物体受两个共点力作用的实例

求两个共点力的合力在数学上也就是求两个力相加之和。我们已经很熟悉标量的加法，比如一把锹加一把锹等于两把锹，一支笔加一支笔等于两支笔。但事实说明，一公斤力加一公斤力不一定等于两公斤力。这是因为力是矢量。两个矢量的相加和两个标量的相加完全属于两种不同性质的运算，不同质的矛盾只能用不同质的方法才能解决。

矢量相加服从什么法则呢？下面通过实验进行研究。

如图1—2所示，用两条细绳吊起砝码A，将两绳另端绕过滑轮分别吊起重量不同的另两串砝码B与C。当平衡时，这几条绳必取一定的位置和方向。忽略滑轮与滑轮轴之间的摩擦，由砝码的重量可知二绳对砝码A的拉力的数值；由绳的方位可知拉力的方向。由此作出表示二力的有向线段$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$，如图。另外，由二力平衡的知识可知，如由一条绳吊起砝码A，则这一条绳对砝码A的拉力必定与砝码A所受的重力大小相等方向相反。由此作出这个力的矢量$\vec{F}$如图。现在，这一条绳对砝码A的作用力$\vec{F}$与两条绳对砝码A的作用力$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$同时作用的效果相同，故知$\vec{F}$为$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的合力。为求此合力与原来二力间的关系，可分别将有向线段$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$的末端与$\vec{F}$的末端相连成直线。结果发现，这二直线与表示二力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的有向线段共同构成一平行四边形，而表示合力$\vec{F}$的有向线段恰恰是这平行四边形的对角线。改变砝码A的数值，与砝码B、C相联的两条绳将取新的方位，但是表示这两条绳的拉力的两个新的力矢量$\vec{F}_1'$与$\vec{F}_2'$与合力$\vec{F}$之间仍保持平行四边形的两个相邻边与对角线之间的关系。

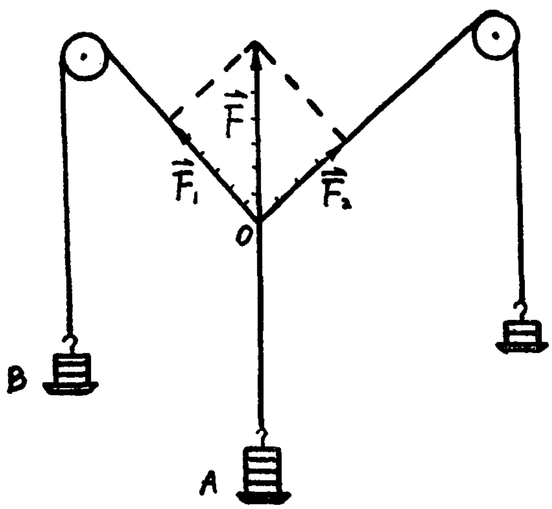


图1—2　研究两个共点力合成法则的实验

根据如上大量实验和实践的结果，总结出了两个共点力合成所遵从的客观法则——平行四边形法则。

1.平行四边形法则

求两个共点力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的合力$\vec{F}$时，可以代表$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的两个有向线段为邻边作一平行四边形，则由此二有向线段的交点出发作出的平行四边形的对角线就代表合力$\vec{F}$。这个法则称为力合成的平行四边形法则。

用数学式表示，即为

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2 \qquad (1-1)$$

合力$\vec{F}$的大小和方向由作图法求出，也可由公式法求出。用作图法求合力$\vec{F}$时，和在图1—2所示实验中的求法相同。即先由二力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的作用点出发，作出表示此二力的有向线段。有向线段的长短按预先选定的同一标准，表示力的大小；有向线段的方向分别按已知的$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的方向决定。然后按照平行四边形法则作出表示合力$\vec{F}$的有向线段。以表示$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$数值的

同一标准，量出$\vec{F}$的长短数值，由此合力的数值即可知道了。再用量角器测出$\vec{F}$与$\vec{F}_1$或$\vec{F}_2$之间的夹角，即可具体指出合力的方向。至于用公式求合力的方法，即将在下面介绍。

由图1—2可知，合力$\vec{F}$的数值F并不等于$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$的数值F_1、F_2的算术和，即$F \neq F_1 + F_2$。这是因为力是矢量，求二力之和应为矢量和，而矢量求和遵从平行四边形法则。

以上所得力合成的平行四边形法则，也是一切矢量合成（或说求和）所遵循的法则。比如第三章就要讲到的速度、加速度等物理量也都是矢量，它们合成时也都各自遵从平行四边形法则。于是，概括起来可以说：求矢量$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的和$\vec{F}$时，可以表示$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$的有向线段为邻边作一平行四边形，则自$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$的交点引出的对角线，即为所求的矢量和$\vec{F}$。

2.三角形法则

矢量合成的平行四边形法则也可简化为三角形法则。由图1—3来看，在平行四边形$OACB$中AC是OB的对边，二者平行且相等。根据矢量代数学的规定，有向线段$\overline{AC}$和$\overline{OB}$所代表的矢量相等。因此，有向线段$\overline{AC}$可代表矢量$\vec{F}_2$，于是代表矢量$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$及$\vec{F}$的有向线段构成一三角形，即图上的$\triangle OAC$。由此得出矢量合成的三角形法则为：求矢量$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的和$\vec{F}$时，可自表示$\vec{F}_1$的有向线段的末端引出表示$\vec{F}_2$的有向线段，则自$\vec{F}_1$的始端到$\vec{F}_2$的末端引出的有向线段，即为所求的矢量和$\vec{F}$。

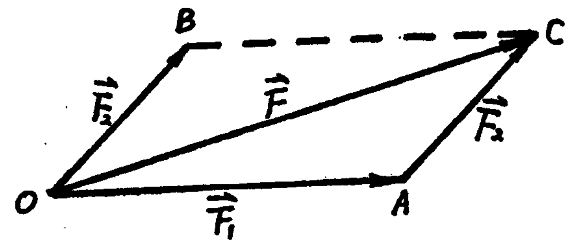


图1—3　矢量合成法则

掌握了矢量合成的三角形法则以后，就可以根据它更简便地求出两共点力的合力。

3.计算公式

根据以上介绍的求矢量和的平行四边形法则和三角形法则，除可用作图法求出合矢量的数值和方向外，还可应用三角学知识，通过计算求出合矢量的数值和方向。下面推导计算的一般公式。

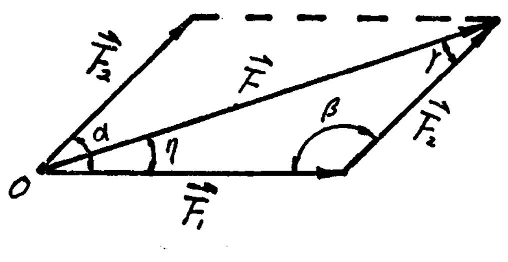


图1—4　用余弦定理和正弦定理可以推导出计算合矢量的公式。

如图1—4所示，设已知二矢量$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的数值及方向（$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的方向已知，故其间夹角α为已知量），则根据余弦定理有

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta$$
$$= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

所以，合矢量$\vec{F}$的数值为

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (1-2)$$

而其方向可以由正弦定理得出，即有

$$\frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\eta}$$

又因为 $\sin\beta = \sin\alpha$，于是有

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \sin^{-1}\frac{F_1\sin\alpha}{F} \\ \text{或}\qquad \eta &= \sin^{-1}\frac{F_2\sin\alpha}{F} \end{aligned}\right\}\qquad (1-3)$$

η和γ分别为合矢量$\vec{F}$与$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$之间的夹角。η和γ二者中求出任一个，则合矢量$\vec{F}$的方向即可确定。

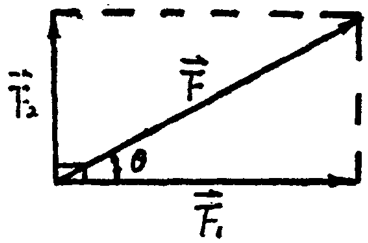


图1—5　互相垂直的两个分矢量的合成

由（1—2）式可知：

（1）当 α = 90°时（图1—5）

合矢量$\vec{F}$的数值为

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\qquad (1-4)$$

而$\vec{F}$的方向可由它与$\vec{F}_1$间的夹角θ表示

$$\theta=tg^{-1}\frac{F_2}{F_1}\qquad (1-5)$$

（2）当 α = 0°时（图1—6）

合矢量$\vec{F}$的数值为

$F = F_1 + F_2$

$\vec{F}$的方向与$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$的方向一致。

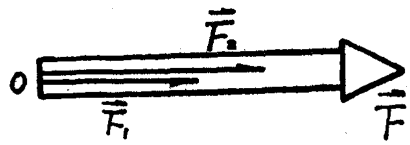


图1—6　同向平行的两个分矢量的合成

（3）当α = 180°时（图1—7）

合矢量$\vec{F}$的数值为

$F = |F_1 - F_2|$

$\vec{F}$的方向与$\vec{F}_1$及$\vec{F}_2$中数值大的方向相同。

以上各结果当然都适用于两个共点力的合成。

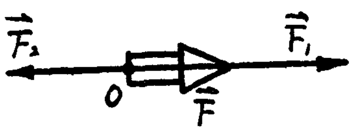


图1—7　反向平行的两个分矢量的合成

〔例1—1〕电业工人在架设电线时，为了防止电杆倾倒，在电杆两侧拉上铁丝，如图1—8所示。若两侧铁丝与地面的夹角都是60°，每条铁丝上的拉力是30公斤，这样作的结果，电杆对地的压力增大了多少？

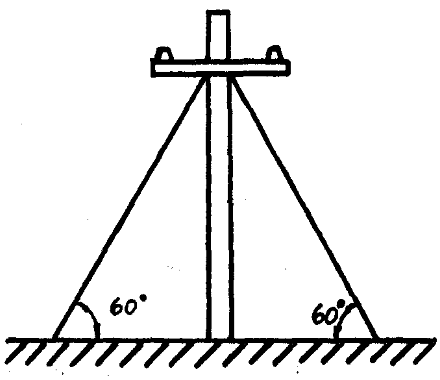


图1—8

解：电杆对地压力的增大是由于电杆受到了两侧铁丝的拉力引起的。故求出两铁丝对电杆拉力的合力，此力在数值上即等于电杆对地增加的压力的大小。

现分别用两种方法求解：

（1）作图法

作力矢量图如图1—9。根据平行四边形法则求二铁丝拉力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的合力$\vec{F}$。量出$\vec{F}$的长短数值，可知合力的大小约为52公斤；$\vec{F}$的方向竖直向下。

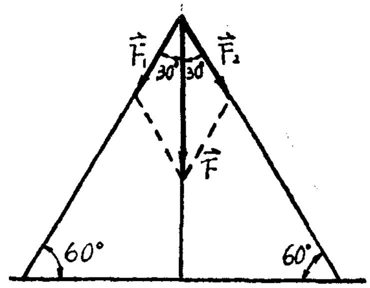


图1—9

（2）计算法

由公式（1—2）式可知合力的数值为

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{30^2+30^2+2\times30\times30\times\cos60^\circ}$$
$$=30\times\sqrt{3}$$
$$=51.9(\text{公斤})$$

由二拉力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$的对称性可知，合力$\vec{F}$的方向竖直向下，故对地增加的压力的方向竖直向下，压力的数值为51.9公斤。

二、两个以上共点力的合成

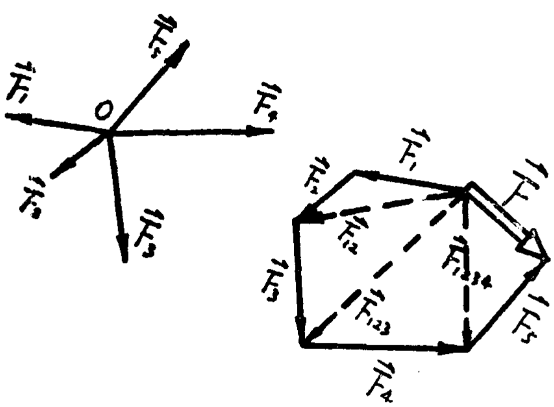


图1—10　多边形法则

求两个以上的共点力的合力时，可以连续使用三角形法则。例如，如图1—10所示，欲求已知诸力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$、$\vec{F}_4$、$\vec{F}_5$的合力时，可由三角形法则先求出$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$之和$\vec{F}_{12}$，再求$\vec{F}_{12}$与$\vec{F}_3$之和$\vec{F}_{123}$，依次类推，最后求出五个力的合力$\vec{F}$。

但是在刚才的实践过程中即已发现，这些作图的中间过程可以取消，而可直接将所有表示诸力的有向线段依次首尾连接作出多边形，最后由第一个有向线段的始端到最末一个有向线段的末端作一个有向线段，此即所求的合力。这个法则称为两个以上共点力合成的多边形法则。

§2　力的分解、矢量的减法

如上节所述，两个共点力可以合成为一个力。反过来，一个力也可以分成共点的两个力而使这两个力共同作用的效果与原来的力作用效果相同。把一个力等效地分为两个力，这种方法称为力的分解。这两个力分别称为原来那一个力的分力。

一、为什么要进行力的分解？

力的分解的概念是从许多实际问题中提出来的。在有些力学问题中，一个力可以同时起到两方面的作用，因此，将此力分解成为两个力来分别研究其作用，会使问题的解决更为简便。

例如用斜面装货的问题。如研究装货上车时为什么沿斜面推上去比直接扛上去省力，可将货物所受的重力$\vec{P}$如图1—11所示那样，分解为两个分力$\vec{P_1}$与$\vec{P_2}$。因为货物所受重力$\vec{P}$可

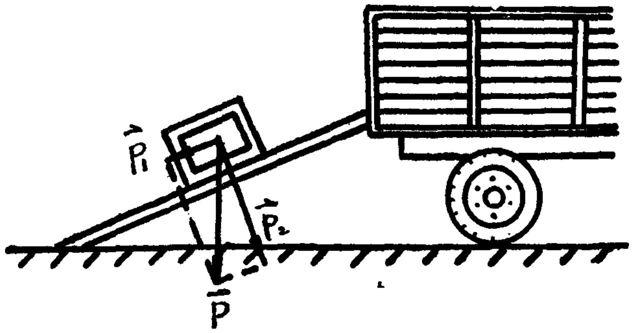
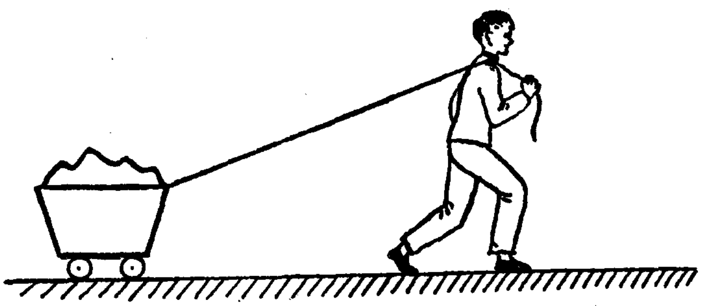


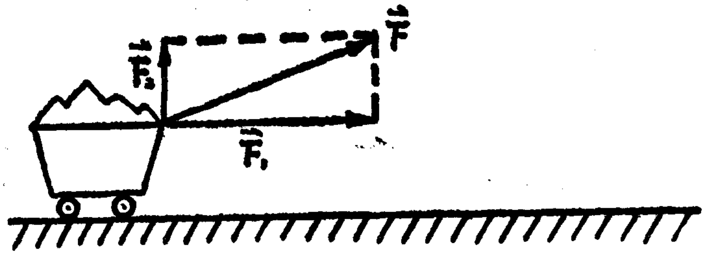
图1—11　用斜面装货，只需克服重力沿斜面向的分力。

起到两方面的作用：一方面使重物沿斜面下滑；另一方面由于重物沿垂直于斜面的方向受到地球重力的分力，此力有使货物沿此方向运动的倾向，但受到斜面阻碍，故重物压斜面。根据重力$\vec{P}$的这两方面效果，将其沿斜面方向和沿垂直于斜面的方向分解为二分力$\vec{P_1}$与$\vec{P_2}$。将货物沿斜面推上去时只须克服重力沿斜面的分力$\vec{P_1}$。只要看出P_1小于P，就可理解为什么沿斜面推上去比直接扛上去省力了。

又如用绳子拉车的问题。如图1—12甲所示，当人用斜向上的绳子拉着小车前进时，绳子对车的拉力$\vec{F}$起着两方面的作用：一方面使车沿水平向前；另一方面使车受到一个竖直向上的拉力，这样就可以减小车对地面的正压力，从而减小车所受地面的摩擦力。根据这两方面的效果将拉力$\vec{F}$分解为沿水平方向和沿竖直方向的两个分力$\vec{F_1}$与$\vec{F_2}$（图1—12乙），从而



甲



乙

图1—12　斜向上的拉力同时对车产生水平向前和竖直向上的作用。

就可分别从数量上研究其不同效果。

二、怎样进行力的分解？

力的分解的根据仍然是由大量实验事实总结出来的平行四边形法则。以已知力为对角线作平行四边形，则由其始端引出的两个相邻边即代表两个分力。

但是，由于以同一有向线段为对角线可作的平行四边形有无数多个（图1—13），故由已知力求分力的答案是不确定的。

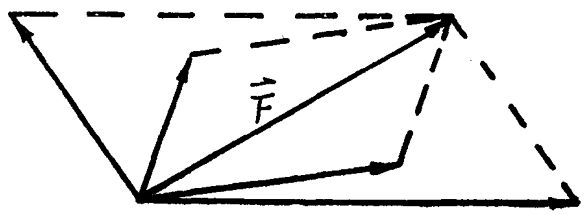


图1—13 立在同一对角线上的平行四边形可以有无数多个。

要得到确定的结果，必须附加条件。在实际的力学问题中，通常附加的条件有两类：

1.已知一个分力的大小及方向求另一分力的大小和方向。

已知力$\vec{F}$和一个分力$\vec{F}_1$，求另一分力$\vec{F}_2$，这问题实际上就是求已知二矢量之差的题。写成数学表示式即为

$$\vec{F}_2=\vec{F}-\vec{F}_1 \qquad (1-6)$$

这一矢量差问题可以化为求$\vec{F}$与另一矢量（$-\vec{F}_1$）的矢量和问题来求解，即化为

$$\vec{F}_2=\vec{F}+(-\vec{F}_1)$$

的形式。按矢量代数学规定：矢量($-\vec{F}_1$)是一个和矢量$\vec{F}_1$的数值相等而方向相反的量。于是，由平行四边形法则求这个矢量和，如图1—14，即得出所求的矢量$\vec{F}_2$。

但由图1—14可以看出，如果直接由$\vec{F}$与$\vec{F}_1$用三角形法则求它们的差，则由减量$\vec{F}_1$的末端向被减量$\vec{F}$的末端引一矢量，此即所求之矢量差$\vec{F}_2$。因此求二矢量之差时，可直接由三角形法则求出。但必须注意与用三角形法则求矢量和的情况加以区别。求二矢量$\vec{A}$、$\vec{B}$之差时将二已知矢量的始端重合在一起，然后由减量的末端到被减量的末端引出矢量，即得所求二矢量之差$\vec{C}$如图1—15甲所示。求二矢量$\vec{A}$、$\vec{B}$之和时，将二已知矢量之一的末端与另一矢量的始端重合在一起，然后由第一个矢量的始端到第二个矢量的末端引出矢量，即得所求二矢量之和$\vec{D}$，如图1—15乙所示。

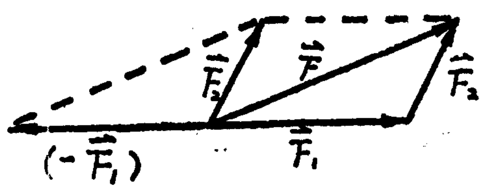
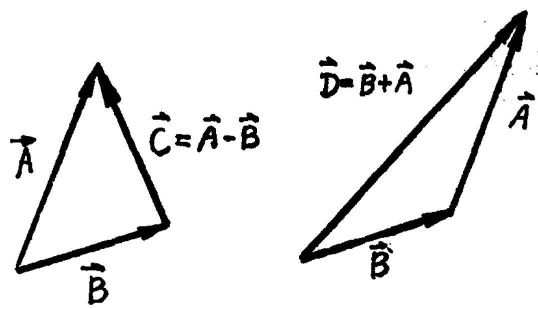


图1—14 根据三角形法则求矢量差



甲　　乙

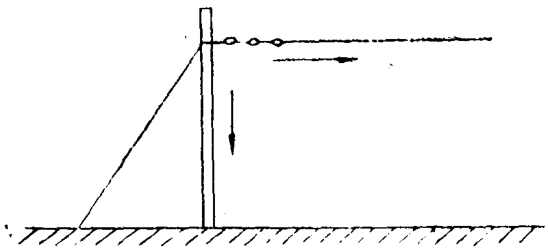
图1—15 要注意根据三角形法则求矢量和、差的区别

〔例1—2〕如图1—16甲所示，水平电线对竖直电杆的拉力是20公斤，为了使电杆不倾斜，在一旁用铁丝拉住它。这样，电杆受到一个30公斤竖直向下的压力。求铁丝的拉力以及铁丝和地面的夹角。

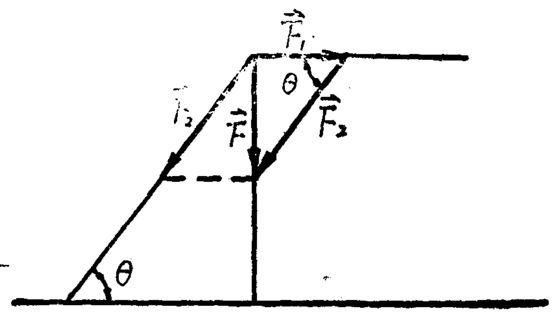
解：由题意可知，电杆所受的竖直向下的压力是由于水平电线的拉力和铁丝的拉力二者同时作用所造成的，这一个力相当于两个共点力共同作用的总效果，故这个竖直向下的力$\vec{F}$是电线的拉力$\vec{F_1}$和铁丝的拉力$\vec{F_2}$的合力。现在已知合力$\vec{F}$和一个分力$\vec{F_1}$，求另一分力$\vec{F_2}$（包括大小和方向），故属求矢量差问题。

作已知力矢量$\vec{F}$和$\vec{F_1}$如图1—16乙所示。根据三角形法则，求$\vec{F}-\vec{F_1}$可自减量$\vec{F_1}$的末端到被减量$\vec{F}$的末端引一有向线段即得$\vec{F_2}$。$\vec{F_2}$的方向既定，铁丝的地面的夹角可知。

根据矢量图，解直角三角形，可求出$\vec{F_2}$的数值及其与地面的夹角θ：



甲



乙

图1—16

$$F_2=\sqrt{F^2+F_1^2}=\sqrt{30^2+20^2}=36(\text{公斤})$$

$$tg\theta=\frac{F}{F_1}=\frac{30}{20}=1.5$$

故　　　　$\theta=56°19'$

即铁丝的拉力为36公斤，它与地面的夹角为56°19′。

2.已知两个分力的方向，求两个分力的大小。

〔例1—3〕 用扁铲錾削工件时，若錾削的倾角为30°，锤击力为15公斤，求工件所受到的水平向前的切削力和竖直向下的压力各是多少公斤？

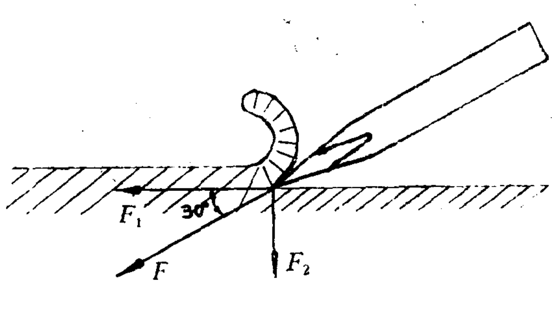


图1—17

解：这是已知合力及两个分力的方向，求两个分力大小的问题。

用$\vec{F}$代表锤击力，$\vec{F_1}$和$\vec{F_3}$分别代表切削力和压力，如图1—17所示。为求分力的大小，按一定比例画出$\vec{F}$，自$\vec{F}$的始端和末端分别引出水平方向和竖直方向的直线，相交成一以$\vec{F}$为对角线的矩形。则与

$\vec{F}$ 相交的矩形的两边即代表两个分力$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$。按规定的比例量出$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$的长度，可得切削力及压力的大小。

或由三角知识得

$$F_1 = F\cos 30^\circ$$
$$= 15 \times 0.866$$
$$= 12.99(\text{公斤})$$
$$F_2 = F\sin 30^\circ$$
$$= 15 \times 0.5$$
$$= 7.5(\text{公斤})$$

即切削力为12.99公斤；
压力为7.5公斤。

§3 力的解析表示法

为了研究和计算的方便，平时多是将已知力沿坐标轴的方向分解，因为坐标轴的方向是已经确定了的。不仅力矢量如此。我们今后即将学到的速度矢量、加速度矢量等矢量也常需沿坐标轴分解。因此，我们有必要学习一些矢量沿坐标轴分解的有关知识。

一、矢量的解析表示法

因为坐标轴的方向已经确定，所以一矢量分解在各轴上的分矢量只需用其数值和正负即可表示清楚。这些带有正负的数值（代数值）是标量，叫作矢量在坐标轴上的投影。建立如图1－18所示的平面直角坐标系，若用F_x及F_y分别表示矢量$\vec{F}$在x轴及y轴的投影，则由图上不难看出：

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta \\ F_y &= F\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1-7)$$

式中 θ 是矢量$\vec{F}$与x轴正方向的夹角。

反过来，如果已知一个力$\vec{F}$在x、y坐标轴上的两个投影F_x、F_y，则这个力的数值及方向就可由下式确定，即

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \theta &= tg^{-1}\frac{F_y}{F_x} \end{aligned}\right\} \qquad (1-8)$$

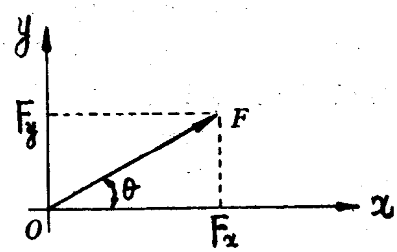


图1－18 矢量在坐标轴上的投影

这种用矢量在两个互相垂直的坐标轴上的投影来表示矢量的方法，叫作矢量的解析表示法。力是矢量，故也可采用解析表示法。

在实践中，根据需要有时还需将一个矢量沿着互相垂直的三个坐标轴的方向分解。例如，当车床车削工件时，车刀就要受到工件的切削阻力（或切削抗力）的作用。这个力，车工师傅也把它叫作切削力。为了分析切削力对加工的影响，就需要将切削力沿工件的轴向、径向和垂直方向等三个互相垂直的方向进行分解。为此，如图1－19所示，沿工件的轴向、

径向和垂直方向建立0——xyz直角坐标系。先将切削力$\overrightarrow{P}$沿z轴和水平面分解为$\overrightarrow{P}_z$和$\overrightarrow{P}$平，$\overrightarrow{P}_z$即为垂直分力，又叫主切削力。将$\overrightarrow{P}$平再沿ox和oy轴分解，得到轴向分力$\overrightarrow{P}_x$和径向分力$\overrightarrow{P}_y$。改变吃刀深度、进刀量和偏角，可以改变$\overrightarrow{P}_x$、$\overrightarrow{P}_y$和$\overrightarrow{P}_z$的大小，从而提高工效和保证工件的精度要求。

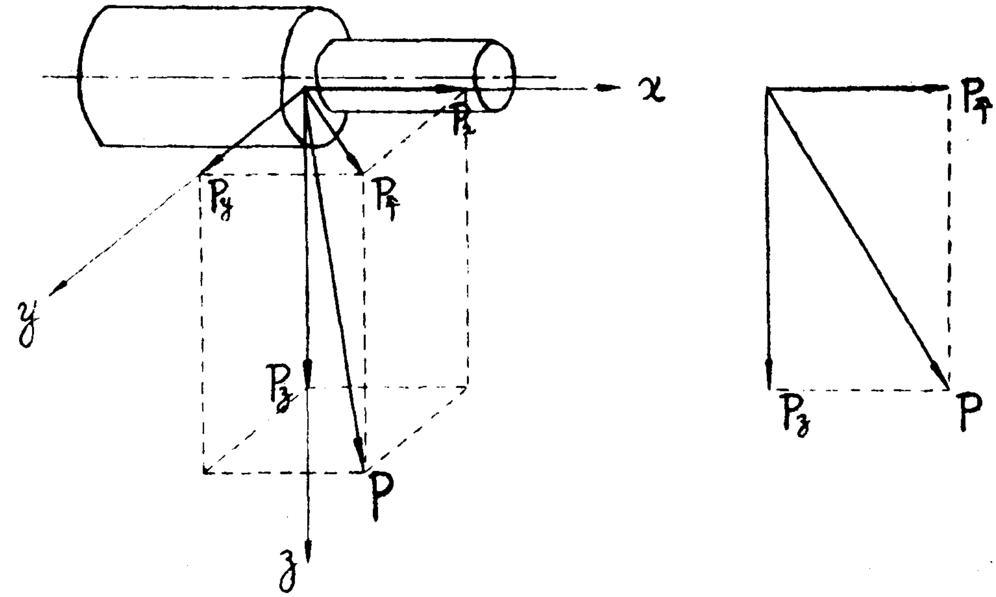


图1—19　矢量在三个互相垂直的坐标轴上投影的实例

关于矢量沿互相垂直的三个坐标轴分解的知识，我们不作过多的介绍。

二、用解析法求共点力的合力

毛主席教导说：**“为了向正面而向侧面，为了走直路而走弯路，这是许多事物在发展过程中所不可避免的现象。”**解决共点力的合成问题除了采用如§1中所述的作法等（统称几何法）外，也可采用解析法。这种方法的基本途径就是为了将共点诸力合成，先对每一力沿坐标轴进行分解，然后根据各力矢量投影之和求合力。为说明这种方法，下面先介绍一个预备定理。

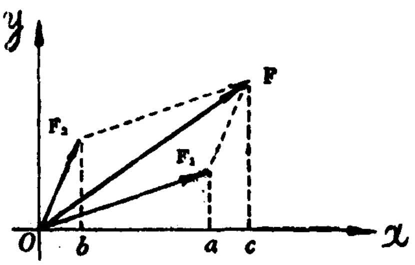


图1—20　就一最简单的情况来证明投影和定理

1.投影和定理

可以证明，矢量和在直角坐标轴上的投影，等于诸分矢量在同一坐标轴上投影的代数和。这一关系称为投影和定理。证明如下：

如图1—20所示，二矢量$\overrightarrow{F}_1$及$\overrightarrow{F}_2$的矢量和为$\overrightarrow{F}$。

用F_{1x}、F_{2x}及F_x分别表示它们在x轴上的投影。不难看出，$F_{1x}=oa$，$F_x=oc$，又因平行四边形对边平行且相等，由图上可以看出，$\overrightarrow{F}_2$在

x轴上的投影ob等于其对边在x轴上的投影ac，即有$\vec{F}_{2x}=\dot{ob}=ac$，但是$\dot{oc}=\dot{oa}+ac$，故有

$$F_x=F_{1x}+F_{2x}$$

此式表明，合矢量$\vec{F}$在x轴上的投影等于分矢量$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$在x轴上投影的代数和。

上面就两个矢量得到的结论，不难推广到任意多个分矢量的情况。设有n个矢量$\vec{F_1}$、$\vec{F_2}$……$\vec{F}_n$，其矢量和为$\vec{F}$，令F_{1x}、F_{2x}……F_{nx}分别表示它们在x轴上的投影，则仿照上述证明方法可以证明：

$$F_x=F_{1x}+F_{2x}+\cdots\cdots+F_{nx}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}$$

同法可证明：

$$F_y=F_{1y}+F_{2y}+\cdots\cdots+F_{ny}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy} \qquad (1-9)$$

$$F_z=F_{1z}+F_{2z}+\cdots\cdots+F_{nz}=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}$$

式中Σ为取和号，n为取和的总项数，i表示各项的编号。

2. 用解析法求合力

设有在同一平面内的共点力$\vec{F_1}$、$\vec{F_2}$、$\vec{F_3}$……（图1—21），今由解析法求其合力如下：

以力的作用点为坐标原点取直角坐标（坐标轴具体方向可按有利于计算简便的原则选定），将各力沿x、y轴投影，由（1—7）式得各力的投影值为

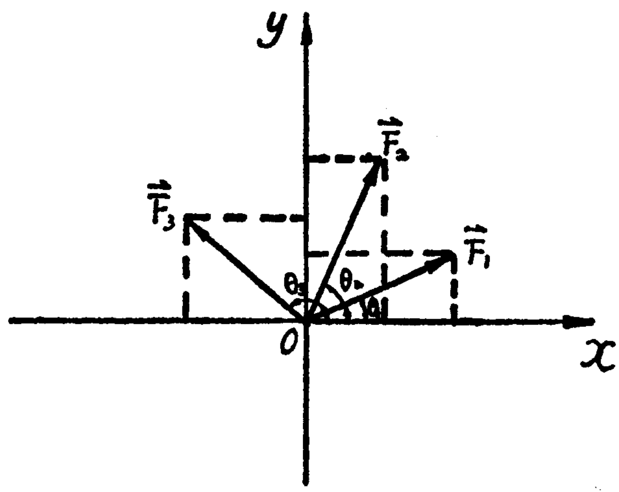


图1—21 用解析法求合力

$$F_{1x}=F_1\cos\theta_1; \qquad F_{1y}=F_1\sin\theta_1;$$
$$F_{2x}=F_2\cos\theta_2; \qquad F_{2y}=F_2\sin\theta_2;$$

根据上述投影和定理知合力矢量在某一坐标轴上的投影等于各分力矢量在同一坐标轴上投影的代数和，设以F_x、F_y分别表示合力在x、y轴上的投影，则有

$$\vec{F}_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots\cdots + \vec{F}_{nx} = F_1 cos\theta_1 + F_2 cos\theta_2 + \cdots\cdots + \vec{F}_n cos\theta_n = \sum_{i=1}^{n} F_i cos\theta_i$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \cdots\cdots + F_{ny} = F_1 sin\theta_1 + F_2 sin\theta_2 + \cdots\cdots + F_n sin\theta_n = \sum_{i=1}^{n} F_i sin\theta_i$$

于是，由（1—8）式可得出合力的数值及方向为

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2} = \sqrt{(\Sigma F_i cos\theta_i)^2 + (\Sigma F_i sin\theta_i)^2} \\ tg\theta &= \frac{Fy}{Fx} = \frac{\Sigma F_{iy}}{\Sigma F_{ix}} = \frac{\Sigma F_i sin\theta_i}{\Sigma F_i cos\theta_i} \end{aligned}\right\} \quad (1—10)$$

〔例1—4〕一固定环受三条绳子的拉力作用（图1—22甲），$\vec{F}_1$沿水平方向，$\vec{F}_2$与水平方向成40°角，$\vec{F}_3$沿竖直方向向下。三力的大小分别为：$F_1 = 150$ 公斤，$F_2 = 200$ 公斤，$F_3 = 250$公斤，求合力的大小和方向。

解：这是三个力合成的问题。现用解析法求其合力。

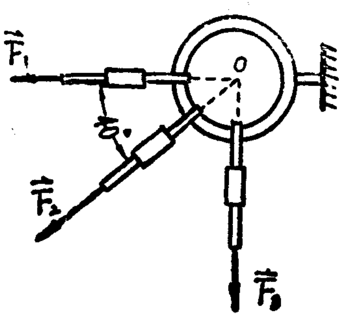
取坐标如图1—22乙，将$\vec{F}_2$沿x、y坐标轴分解。

以F_x表示合力在x轴上的投影，则根据合力在x轴上的投影等于各分力在x轴上的投影的代数和知

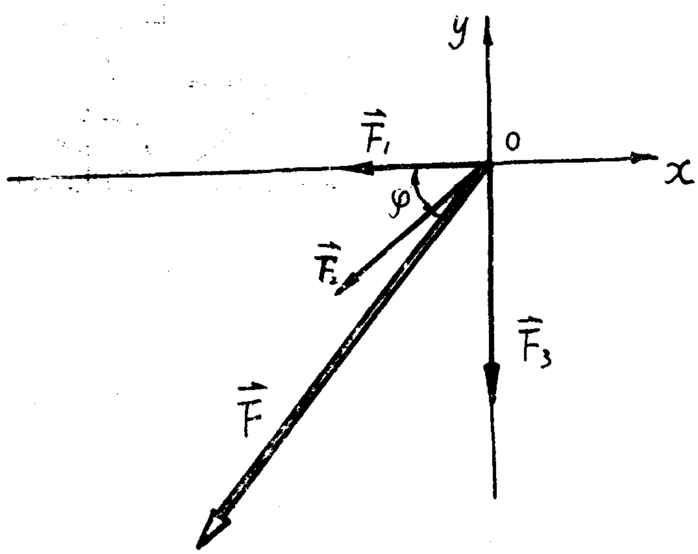
$$F_x = \sum_i F_{xi} = -F_1 - F_2 cos40° + 0$$
$$= -303.2$$
$$F_y = \sum_i F_{yi} = 0 - F_2 sin40° - F_3$$
$$= -378.6$$

故得合力的数值

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 485.1(\text{公斤})$$



甲



乙

图1—22