数学演習講座

5

初等幾何学

初等幾何学

大阪大学教授・理学博士

寺　阪　英　孝

秋月　康夫
功力金二郎
佐々木重夫
福原満洲雄
吉田　耕作
編　集

数学演習
講　座
5

共立出版株式会社

数学演習講座 5 （全 15 巻） Ⓒ

初 等 幾 何 学　　定 価 350 円

昭和 32 年 9 月 15 日　初版 1 刷発行
昭和 37 年 8 月 15 日　初版 6 刷発行

著 者　寺 阪 英 孝

発行者　南 條 初 五 郎
東京都千代田区神田駿河台3-9

印刷者　片 岡 義 郎
東京都中央区越前堀 2の22

発行所　東京都千代田区 神田駿河台 3-9　共立出版株式会社　電話東京291局 7121番（代表） 振替東京 57035

印刷 共立印刷 K.K.　製本 中條製本工場　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会 員

NSPA
自然科学書協会

序

初等幾何学の定理・問題から，基本定理をはじめとして，他の部門との関連で重要なもの，歴史的によく知られているもの，また幾何学的の感覚から面白いと思われるものなど選んで適当に配列し，自力で証明したり，あるいは解答を参照するなどして，初等幾何全般にわたる常識を涵養するのに役立つようにという考えで編んだのが本書である．

百余の基本定理には簡単な証明を附けておいたが，本来演習を目的とする主旨から，四百数十におよぶ問題には極めて卑近なものから有名な大定理に至るまで入れておいたから，ややこしい言い方をすれば，問題の中には問題にならないような問題もあるかと思うと，問題とするのは問題だというような問題もある．しかし，易しいといっても皆それぞれ立派な個性のあるものばかりではあるし，むずかしいといっても余りに初等幾何学的に偏するものは避けてあるから，力量に応じて問題を自ら手がけるなり，また手に負えないようなものは一時カブトをぬいで解答を御覧になるようにすれば，基礎数学講座の初等幾何学の併読と相まって，初等幾何学のかなり程度の高い常識は得られるようになると思う．

初等幾何は公理を使って図形的に研究するのが本来の姿ではあるけれども，また同時に解析的の方法による研究も排斥すべきではないし，またそれによって数学の他の部門との連絡が生きてくるのであるから，本書ではそのような演習も十分できるようにしておいた．微積分は使わないが，微積分的な考えにも慣れるような問題も選んである．

最後に，型にはまった初等幾何の問題ではないが，幾何好きの人に面白いと思われるような新しい型のものを，研究問題としていくつか挙げておいたから，中には随分むずかしいものもあるけれども，研究の資料として十分活用していただきたいと思う．

1957 年 8 月 23 日

目　　次

前編　定理と問題

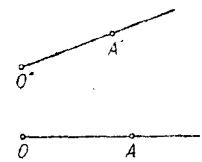
後編　問題の解答

前編　定理と問題

I. 直　線　形

1.　平面幾何の主な公理

平面幾何で使う公理のうち，主なものを次にあげる．



I.　異なる二点を通る直線は必ず一つある．しかし一つ以上はない．

II.　（Pasch の公理）平面は直線によって二つの側に分たれる．

III.　（運動の公理）半直線 OA を半直線 O′A′ に移すような平面の運動は丁度二つある．一つは同じ向の運動，他は裏返し（逆向）の運動である．

IV.　（平行線の公理）直線外の一点を通り，これと交わらない直線（すなわち平行線）は丁度一つある．

（この外にも連続の公理だとか順序の公理だとかあるが略す．詳しくは基初*，1～40頁）．

記号． A，B を両端とする線分を AB で表わす．A，B を通る直線は線分 AB と区別する必要があるときは $A \smile B$ で表わす．直線 a, b の交わりは $a \frown b$ で表わすが，A，B を通る直線 $A \smile B$ と，C，D を通る直線 $C \smile D$ との交わりは $AB \frown CD$ で表わすことにする．△ABC の辺というのは線分をさす場合とその線分を延長した直線をさす場合と両方ある．辺またはその延長，といういい方もあるが，いまの記号を用いれば，辺 AB，辺 $A \smile B$ で簡単に区別できる．

2.　合 同 定 理

運動によって重ね合すことができる図形を互に**合同**，または等しいという．特に図形を平面から外さずに重ね合すことができるとき**同じ向に合同**，一方の図形を一度裏返してから初めて重ね合すことができるとき**逆向に合同**であるという．合同は ≡ で表わす．AB≡A′B′ は線分が合同なこと，AB＝A′B′ は長さが等しいことを表わすが，実は同じことに

* 初等幾何学（基礎数学講座）

なるから大概＝で間に合わせる．$\angle A \equiv \angle A'$ と $\angle A = \angle A'$ についても同じ．しかし，$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ は三角形が合同なこと，$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ は面積が等しいことで，この場合は違う．

次の基本定理は重ね合すことですぐ証明できる．

定理　1　対頂角は等しい．

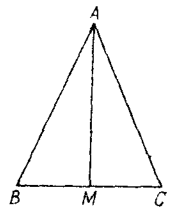
定理　2　(**二辺夾角**) 二辺と夾角がそれぞれ等しい三角形は互に合同である．

定理　3　(**二角夾辺**) 一辺とそれに隣る二角がそれぞれ等しい三角形は互に合同である．

二等辺三角形（二辺が等しい三角形）については

定理　4　(**底角定理**) 二等辺三角形の底角は等しい（逆も真）．

が基本定理であるが，このほか沢山の性質がある．

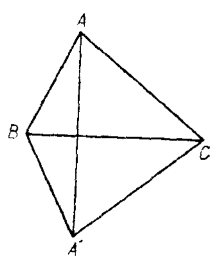


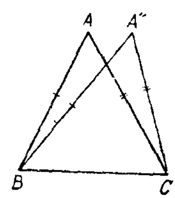
定理　5　二等辺三角形では，(i) 頂角の二等分線は底辺に垂直，(ii) 頂角の二等分線は底辺を二等分する，(iii) 頂角の二等分線，頂角から底辺への垂線，頂角から対辺への中線は皆一致し，底辺の垂直二等分線は頂点を通る．

問　1　定理５の逆について考えよ．

定理　6　(**三辺合同**) 三辺がそれぞれ等しい三角形は互に合同である．

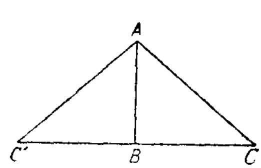
証　この定理は重ね合すことだけで直ぐ証明するというわけにいかない．一度背中合せに置いてから，底角定理（定理４）を使って証明する．





右図のように同じ側においても証明できるが，やはり底角定理を使うことになる（$A \neq A''$ とすれば $\triangle ABA''$，$\triangle ACA''$ はいずれも二等辺三角形だから定理５によって B, C は AA'' の垂直二等分線上の点となり，A, A'' が BC の同じ側にあるという仮定に反する)．

同様な背中合せの証明法で



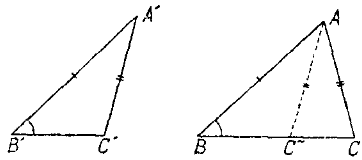
定理　7　(**直角三角形の合同**) 斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい直角三角形は合同である．

問　2　直角三角形について他の合同定理を考えよ．

定理　8　(**条件付合同定理**) 二辺と，その夾角でない一角がそれぞれ等しい三角形は夾

角でない第二の角が共に鋭角，直角，鈍角ならば合同である：

AB＝A′B′，AC＝A′C′，∠B＝∠B′ のとき，∠C, ∠C′ が共に鋭角，直角あるいは鈍角ならば △ABC≡△A′B′C′.

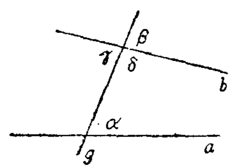


（注意．右図は ∠C′ が鈍角，∠C が鋭角だから，両三角形は合同になっていない）証明は ∠A′B′C′ を ∠ABC に重ね，底角定理 4 を用いる．

問 3 二辺とその夾角でない一角が等しい三角形は合同か，または夾角でない第二の角が互に補角である．

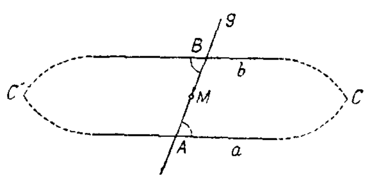
3. 平 行 線

一直線 a, b を直線 g で切ったとき，図において α, β を同位角，α, γ を錯角，α, δ を同側内角という．



定理 9（平行線の定理）平行線に他の直線が交わってできる同位角，錯角は等しく，同側内角は互に補角である（逆も真）．

証（i）逆の方から証明する．∠A＝∠B（錯角等し）とする．AB の中点を M として全図形を 180° 回転すれば図形は一致する．故に a, b が g の一方の側の C で交わっていたなら，反対の側の C′ でも交わっていなければならない．不合理．

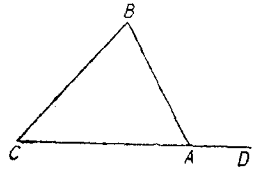


（ii）次に $a \parallel b$ とする．∠A≠∠B だったとすれば B において ∠ABD＝∠A となるような直線 b' を引けば，（i）により $b' \parallel a$．∴ 平行線の公理に反する．――この定理の逆の方は，平行線の公理を使わずに証明できるところが面白い．

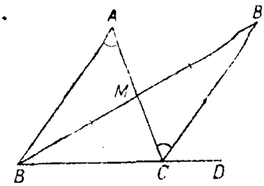
定理 10（内角定理）三角形の内角の和は二直角である．

一つの頂点を通って対辺に平行線を引いて証明する．

三角形 △ABC の頂角 ∠A に対しその補角 ∠DAB を ∠A の外角（または外接角）という．外角 ∠DAB に対し ∠B と ∠C とを内対角という．定理 10 から直ちに

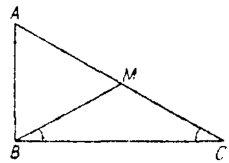


定理 11 三角形の外角は二つの内対角の和に等しい．



定理 12　(外接角定理)三角形の外角は内対角より大きい．

証　この定理は定理 11 から明らかだが，実は平行線の公理を使わずに（したがって定理 11 も定理 10 も使わずに）証明できる．その証明（基初，12 頁参照）：AC の中点を M とし，BM の延長上に BM＝MB′ なる点 B′ をとると $\triangle AMB \equiv \triangle CMB'$ ∴ $\angle A=\angle MCB'$．　CB′ は $\angle ACD$ の内部にあるから $\angle MCB'<\angle ACD$．∴ $\angle A$ は$\angle C$ の外角 $\angle ACD$ より小さい．

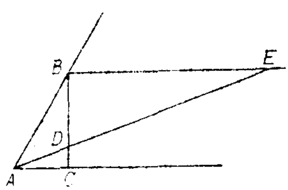


定理 13　直角三角形の斜辺の中点を直角の頂点に結ぶ線分は斜辺の $\frac{1}{2}$ である．

$\angle CBM=\angle C$ のような点 M を AC 上にとって証明する．同様にして

定理 14　内角が 30°，60°，90° なる直角三角形の斜辺は 30° に対する辺の 2 倍である（逆も真）．

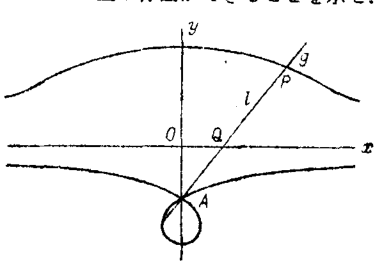
問 4　（角を三等分する法）与えられた角 $\angle A$ の一辺上に一点 B をとり，他の辺に垂線 BC を下ろし，また B から辺 AC に平行線 BE を引く．次に A を通って直線 ADE を引き（D は BC 上）DE＝2･AB のようにする．すると

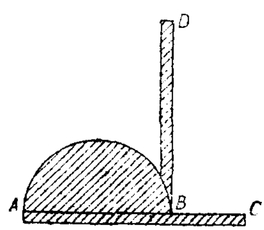


$$\angle CAD=\frac{1}{3}\angle A$$

注意　ただし A を通って DE＝2･AB となるような直線を求めることは，定規とコンパスだけではできない．何故かというと角の三等分は定規とコンパスを使っただけでは作図不能だからである（基初，206 頁以下参照）．

問 5　定直線 x 上にない定点 A を通って動直線 g を引き x と Q で交わらせ，g 上に QP＝l（一定）の線分をとったとき，P の軌跡を Nicomedes の曲線という．この曲線を画く道具があれば上の作図ができることを示せ．





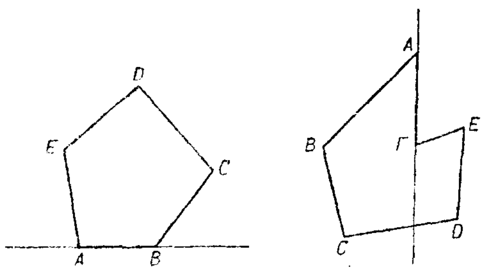
問 6 AB を直径とする半円, AB の延長上にある AB の $\frac{1}{2}$ に等しい線分 BC, B において AB と垂直な線分 BD の三部分からなる道具がある. これを用いて角の三等分をせよ.

問 7 直角三角形 △ABC (∠A=90°) のA から中線 AM, 垂線 AH, 二等分線 AN を引けば, AN は ∠MAH を二等分する.

問 8 直角二等辺三角形 △ABC (∠A=90°, AB=AC) の頂点 A から BC に平行線を引き, その上に点 D をとって BD=BC とし, BD$\frown$AC=E とすれば, CD=CE (BD$\frown$AC とは直線 B$\smile$D と A$\smile$C との交点のこと).

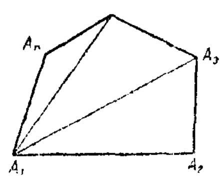
4. 多角形

一般の多角形に対し, 内角が皆2直角より小さい多角形, すなわち多角形が辺を延長した直線のいつも片側に来るようなものを凸多角形という (下図右の方の多角形では A$\smile$F の両側にまたがるから, 凸ではない. これを凹多角形という). 一般の凸多角形を考えるのは直観的には簡単なように見えても, なかなか面倒なことがあるので, 初等幾何では凸多角形だけを考えるのが普通である (だから凸という語を省いてしまうことが多い. 本書でも大体省くことにする).



定理 15 凸 n 角形の内角の和は $2(n-2)$ 直角 (すなわち $(n-2)\pi$ ラジアン) である.

証 四角形は1本の対角線で二つの三角形に分れるから, 内角の和は4直角, 一般に凸多角形は一つの頂点から $n-3$ 本の対角線を引いて $n-2$ 個の三角形に分けられるから, 内角の和は $2(n-2)$ 直角である.

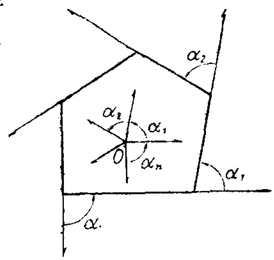


問 9 凸 n 角形を互に交わらない対角線で三角形に分割すると, どんな分け方をしても三角形の数は $n-2$ 個である.

問 10 凸多角形を互に交わらない対角線で $n-2$ 個の三角形に分割すると, その三角形のうちには元の多角形の隣り合った辺を辺に持つものが少なくも2個ある.

定理 16 凸 n 角形の外角の和は常に4直角 ($=2\pi$) である.

証　一点Oを通って，辺を延長した半直線に平行な半直線を引くと，外角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ はOの周りの順々の角に等しくなるから，その和は4直角になる．

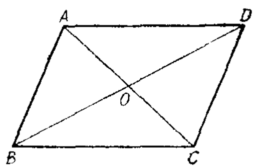


問 11　凸多角形では内角のうち，鋭角はせいぜい三個所だけである．

四角形（四辺形）を ⏢ で表わす．

問 12　⏢ABCD の対角 $\angle$A，$\angle$C の二等分線がなす鋭角は他の二角 $\angle$B，$\angle$D の差の $\frac{1}{2}$ である．

二組の対辺がそれぞれ平行な四辺形を**平行四辺形**といい ▱ で表わす．合同定理からすぐに



定理 17　平行四辺形では，1）対辺は等しい，2）対角は等しく，相隣る角は補角である，3）対角線によって同じ向に合同な三角形に分たれる，4）対角線は互に他を二等分する．

平行四辺形になることを結論するのに使う上の逆定理（証明は簡単）：

定理 18　1）一組の対辺が等しく，かつ平行な四辺形は平行四辺形である．2）対角線が互に他を二等分する四辺形は平行四辺形である．

長方形（＝矩形）とは内角がすべて直角な四辺形である．一つの角が直角であることが分っている平行四辺形ともいえる．□で表わす．正方形（＝辺の等しい長方形）も長方形の一種で，一組の辺が長いときだけ長方形というわけではない．

定理 19　長方形の対角線は等しい．対角線の等しい平行四辺形は長方形である．

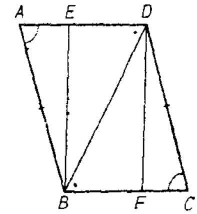
5.　誤った証明

誤った図を画くと恐ろしい結果が出るという例を二，三あげる．

問 13　次の命題およびその証明の正否を問う．

命題　一組の対辺と一組の対角がそれぞれ等しい四辺形は平行四辺形である．すなわち ⏢ABCD において AB＝DC，$\angle$A＝$\angle$C ならば ABCD は▱．

証　$\angle$A，$\angle$C が直角ならば △ABD，△CDB は直角三角形の合同定理（定理7）によって合同だから，⏢ABCD が矩形であることは明らか．故に $\angle$A＝$\angle$C は直角でないときだけ考える．



B, D よりそれぞれ辺 AD, BC に垂線 BE, DF を下ろすと，直角三角形 △ABE, △CDF は斜辺 AB, CD が等しく，直角ならざる他の角 ∠A, ∠C が等しいから合同（問2）：

△ABE≡△CDF　　∴　BE＝DF

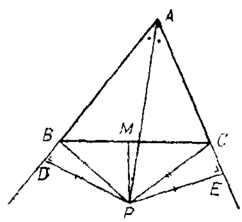
すると直角三角形 △BDE, △DBF は斜辺 BD が共通，他の一辺 BE, DF が等しいから合同（定理 7）：△BDE≡△DBF

∴　∠EDB＝∠FBD　∴　A⌣D, B⌣C は錯角が等しいから AD∥BC.

すると AD∥BC 故 ∠A と ∠ABC は同側内角で互いに補角となるから，∠C と ∠ABC も補角となり，AB∥CD.

∴　□ABCD は平行四辺形である．

問 14　次の証明の誤を指摘せよ．



命題　すべての三角形は二等辺三角形である．

証　△ABC を与えられた三角形とする．∠A の二等分線と辺 BC の垂直二等分線との交点 P から辺 A⌣B, A⌣C に垂線 PD, PE を下ろす．すると P は ∠A の二等分線上の点であるから

(1)　△APD≡△APE

∴　PD＝PE．また P は BC の垂直二等分線上の点であるから PB＝PC．よって直角三角形 △PBD, △PCE は斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいから合同（定理 7）：

△PBD≡△PCE.　∴

(2)　BD＝CE.　また　△APD≡△APE　からは

(3)　AD＝AE

∴　AB＝AD－BD＝AE－CE＝AC　　∴　AB＝AC.

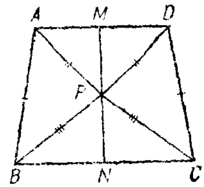
したがって，与えられた △ABC は二等辺三角形である．

問 15　次の証明の誤を指摘せよ．

命題　一組の対辺が等しい四辺形は梯形である：□ABCD において AB＝DC ならば AD∥BC である．

証　辺 AD, BC の垂直二等分線 MP, NP の交点を P とすれば，明らかに

PA＝PD　および　PB＝PC



∴　△PAB≡△PDC（三辺合同）

∴　∠APB＝∠DPC

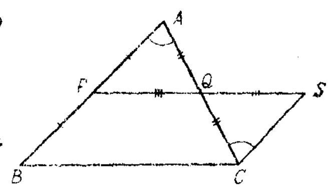
∴　MP または MP の延長は ∠BPC を二等分する．

したがって M, P, N は一直線上にあるから AD, BC はこの直線に垂直な直線，故に AD∥BC．∴　□ABCD は梯形である．

6. 重心，外心，垂心，内心，傍心

定理 20（中点定理）1）三角形の二辺の中点を結ぶ線分は第三辺に平行，かつその $\frac{1}{2}$ に等しい．2）一辺の中点から他の一辺に平行な直線を引けば，第三辺の中点を通る．

証　1）を証明し，それを用いて 2）を出すのと，まず 2）を証明し，それを用いて 1）を出すのと二通りの証明法がある（もちろん別々にもできる）．



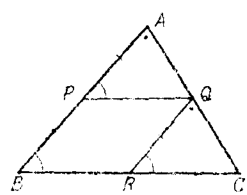
第一証．1）P, Q を AB, AC の中点とし，PQ の延長上に PQ＝QS の点 S をとると △AQP≡△CQS

∴　AP＝CS，かつ ∠A＝∠C　故　AP∥CS．

∴　PBCS は PB∥SC，PB＝CS となるから平行四辺形，

∴　PQ∥BC かつ PQ＝$\frac{1}{2}$PS＝$\frac{1}{2}$BC

2）AP＝PB とし PQ∥BC とする．いま AC の中点 Q′ をとれば，1）により PQ′∥BC，∴　PQ，PQ′ は一致する．



第二証．2）AB の中点 P から BC に平行線をひいて AC との交点を Q，次に Q から AB に平行線 QR を引くと，PBRQ は ▱ 故 AP＝PB＝QR

∴　△APQ≡△QRC（二角夾辺）

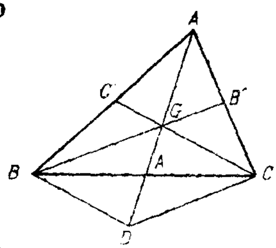
∴　AQ＝QC．

2）から 1）を出すのも容易．

定理 21（重心定理）三角形の三中線は一点（重心）で交わる：△ABC の三中線 AA′，BB′，CC′ は一点 G で交わる．このとき

$$\mathrm{AG}=\frac{2}{3}\mathrm{AA'},\quad \mathrm{BG}=\frac{2}{3}\mathrm{BB'},\quad \mathrm{CG'}=\frac{2}{3}\mathrm{CC'}.$$

証明はいろいろあるが，無難なのは：



$BB' \frown CC'$ を G とし，AG を延長してその上に $AG=GD$ なる点 D をとれば，中点定理 20 から

$B'G \parallel CD$,　$C'G \parallel BD$　∴　GBDC は ▱

∴　$G \smile D$ すなわち $A \smile G$ は BC の中点 A' を通る．

問 16　▱ABCD が $AB=CD$ なら AD, BC の中点 M, N を結ぶ直線は AB および CD と同じ傾をなす．

問 17　△ABC が $AB<AC$ のとき CA 上に $CD=AB$ なる点 Dをとり，BC, AD の中点を E, F とすれば，EF は AB, AC と同じ傾をなす．

問 18　四辺形の各辺の中点を順に結ぶと平行四辺形になる．

問 19　四辺形の二組の対辺の中点を結んだ線分は，両対角線の中点を結んだ線分と共に一点で交わる．

問 20　四辺形の各頂点を残りの三頂点からなる三角形の重心と結ぶ直線四本は一点で交わる．

注意　問 19, 20 の点は同じ点で，これを四辺形の重心という．重心に関することは座標を使うと，点の数がふえた場合もアッサリ解決できることが多い（空間の場合も成立つ）（問 49 参照）．

問 21　三角形は三辺の中点の位置できまる．

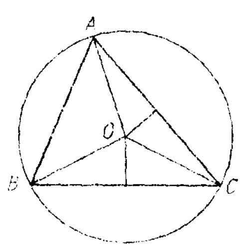
問 22　五辺形の中点を与えてこの五辺形をつくれ．

問 23　一般に奇数辺の多角形は辺の中点の位置できまる．

定理 22　（外心定理）三角形の各辺の垂直二等分線は一点（外心）で交わる．この点は外接円の中心である．

定理 23　（垂心定理）三角形の各頂点から対辺に下した三垂線は一点 H（垂心）で交わる．

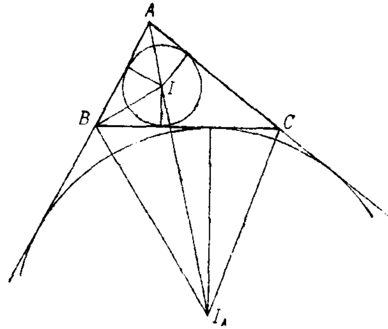
外心定理の方は：二辺 BC, CA の垂直二等分線の交点を O とすれば，O から三頂点までの距離が等しくなることになり，O は第三辺の垂直二等分線上の点になることから分る．



垂心定理は証明がいろいろある．△ABC の各頂点 A, B, C から対辺に平行線を引けば，これら三直線が交わってできる △A'B'C' の外心が △ABC の垂心を与えることから証明するのが外心定理を応用したやり方，その外定理 5 による法，円論による法，Ceva の定理 59 を用いる法などがある．

注意　重心，外心，垂心は一直線上にある（問 159）．

定理 24 **(内心定理)** 三角形の各頂角の二等分線は一点 I (内心) で交わる. I から三辺に下ろした垂線は等しい. I は内接円の中心である.



二つの二等分線の交点から三辺に下ろした垂線が等しいことから証明する. 次のも同様.

定理 25 **(傍心定理)** 三角形の一頂角と他の二頂角の外角の二等分線は一点 (傍心) で交わる. 傍心から三辺へ下ろした垂線は等しい. 傍心は三個あって, いずれも傍接円 (一辺と他の二辺の延長に接する円) の中心である.

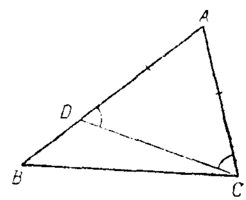
問 24 $\triangle ABC$ において内心を I とし, $BI \frown AC = D$, $CI \frown AB = E$ とする. このとき $DI = EI$ なら $\triangle ABC$ はどんな三角形か.

問 25 四辺形が円に外接するための必要かつ十分な条件は対辺の和が等しいことである.

7. 不　等　式

定理 26 **(辺と角の大小)** 三角形では大きい辺に対する角は小さい辺に対する角より大きい: $AB > AC$ なら $\angle C > \angle B$ (逆も真).

本定理の証明は: AB上に $AD = AC$ なる点 D を求めると定理 12 (外接角定理) により $\angle B < \angle ADC$. しかるに底角定理 4 から $\angle ADC = \angle ACD < \angle C$　∴　$\angle B < \angle C$.



それ故, この定理には平行線の公理はいらない (定理 12 の証明参照). 逆定理は普通転換法と称する方法で証明する. すなわち, 本定理と底角定理 4 とから

(i)　$AB > AC$　⇒　$\angle C > \angle B$

(ii)　$AB = AC$　⇒　$\angle C = \angle B$

(iii)　$AB < AC$　⇒　$\angle C < \angle B$

故,「$\angle C > \angle B$ ならば $AB = AC$ でもあり得ないし, $AB < AC$ でもあり得ないから $AB > AC$ となる」と結論する.

平行線の公理を使うのだったら, 逆定理は直接に次のようにも証明できる.

$\angle A$ の二等分線 AD を引くと,