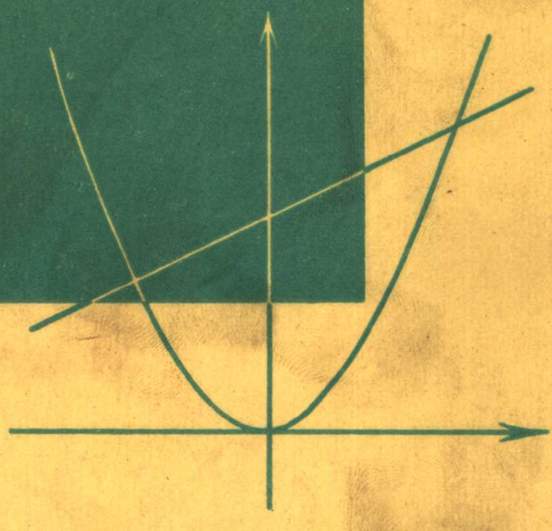
中学数学教师进修讲义

初等代数复习与研究

上册



太原市教育学院

一九七八年五月

中学数学教师进修讲义

初等代数复习与研究

上　　册

太原市教育学院

一九七八年五月

前　　言

以英明领袖华主席为首的党中央，高举毛主席的伟大旗帜，清除“四害”，抓纲治国，我国的社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。毛主席的教育路线得到全面贯彻，无产阶级教育事业蓬勃发展。广大教师正在又红又专的大道上阔步前进，为“四个现代化”早出人才、快出人才贡献力量。

为了适应教育事业发展的新形势，提高师资水平，现将我院（原太原市教干校）根据历年教学实践于一九七四年编写的中学数学教师进修讲义《代数》（试用稿）油印本，稍加增删再次付印并更名为《初等代数复习与研究》（分上、下册），供我市中学数学教师进修培训和教学参考之用。

全书共四编，一、二编为上册，三、四编为下册。基本上包括了教育部《中学数学教学大纲》中有关初等代数的内容，并在深度和广度上有一定的加深加宽。主要内容有：第一编，数的概念，在介绍集合知识的基础上，按自然数、零、分数、有理数、实数、复数的顺序，将数的概念逐步地加以扩充；第二编，解析式，依次介绍多项式、分式、根式、指数式和对数式的运算；第三编，方程和不等式，介绍方程和方程组的同解变形，各种方程、方程组和不等式的解法，列方程和方程组解应用题；第四编，函数和极限，介绍初等函数的性质和图象，极限概念及其应用，简单的级数求和等。

本书对象是中学数学教师。内容编排上采取了专题讲述的方法，便于读者对中学代数的内容有一个总括的了解，教学参考时也较方便。但是这样做不可避免的就出现了有些知识的前后交叉现象。用这种专题讲述的方法进行编排，仅仅是我们的初步尝试。利用本书进行教学时，可根据实际情况适当调整或删减。

本书由我院数学教研组刘宪武、阮一清、任朝雁、晚成国、于恩芳、江一、晁国勋、郭凤英等同志集体编写。

由于我们对毛主席的教育思想学习不够，水平有限，书中一定会存在不少缺点甚至错误，敬希广大教师同志们批评指正。

太原市教育学院数学教研组

一九七八年五月

目　录

第一编　数的概念

数是客观事物的量的表现。数的概念是人类通过长期的实践活动，从现实世界中逐步抽象概括而得来的。数的概念的发展是人类在社会实践中不断揭示矛盾和解决矛盾的过程。本编，我们先讲一些集合论初步知识，然后将数的概念集中地逐步地进行介绍。

第一章　集　合

集合是现代数学的基础概念之一。自然数概念的产生就是人们对各种各样事物的集合进行观察、比较的结果。集合的观点和方法在数学中应用极其广泛，它已渗入到数学的各个部门。关于集合本身的一般性质的研究，形成了一个数学分支——集合论。现在，集合论已成为所有各门数学的基础，并且正影响着整个现代数学的发展。

本章，我们介绍集合论的初步知识。

第一节　集合的概念

一、集合及其元素

集合（简称"集"）是一个不给定义的概念，由任意一些事物组成的一个整体都可以看为集合，我们可以举出各种各样集合的例子：

①太阳系行星的集合；

②第三世界国家的集合；

③我国所有省（市、自治区）的集合；

④太原市机动车辆的集合；

⑤电灯的"开"、"关"的集合；

⑥某直线上点的集合；

⑦小于100的质数的集合；

⑧有理数的集合；

⑨方程$2x+3y=6$的解的集合；

⑩不等式$x-3>1$的解的集合；

⑪方程$x^2-3x+2=0$的根的集合；

⑫满足$0\leq x\leq 1$的一切实数x的集合；

⑬系数为有理数的一切多项式的集合。

组成集合的每件事物叫做集合的元素。例如，太阳系行星的集合，元素是太阳系的每

个行星．直线上点的集合，元素是该直线上的每个点．有理数的集合，元素为每个有理数．以点为元素的集合称为点集，以数为元素的集合称为数集．

若干个集合也可以组成一个新的集合，也就是说，这一个集合可以作为那一个集合的元素．例如，某学校班的集合，元素为该校的每个班，而每个班又是该班学生的集合．

集合一般用大写字母A、B、C……表示，集合的元素用小写字母a、b、c……表示．元素和集合的关系有属于和不属于两种．若a是A的元素，则称a属于A，记作$a\in A$或$A\ni a$；若a不是A的元素，则称a不属于A，记作$a\overline{\in} A$或$A\overline{\ni} a$．

给出一个集合，就是要确定它的元素，也就是有一定方法判定某个事物是否属于这个集合。集合中所有元素彼此都是不同的，没有重复的元素。给出集合的方法有两种：一种是列举集合中的所有元素，例如由红、黄、兰三种基色组成的集合，记为｛红、黄、兰｝．由a_1，a_2，a_3，……等元素组成的集合，记为$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\}$．全体偶数组成的集合，可记为$\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$．另一种是指出集合中元素的共有性质，此时，集合包括了具有该性质的所有元素．例如，平面上到某定点的距离等于定长的点的集合，方程$2x+3y=6$的解的集合．

没有元素的集合叫做空集，用O表示．例如，方程$x^2+1=0$的实根的集合就是空集．

由一个元素组成的集合叫做单元素集，例如，某个三角形的外心的集合就是单元素集．由a组成的单元素集记作$\{a\}$．应注意a和$\{a\}$具有不同的意义．

有限个元素组成的集合叫做有限集．例如，地球上人口的集合，一桶水的水分子的集合是有限集．

由无限个元素组成的集合叫做无限集．例如，全体质数组成的集合，某线段上点的集合，是无限集．

一个集合M，如果在它的元素间规定了某种关系：a在b的前面，记作$a<b$（此时也称作b在a的后面，记作$b>a$），这种关系满足：

（1）任意两个元素之间，$a<b$，$a=b$，$a>b$有且仅有一种成立；

（2）对于任意三个元素a，b，c，若，$a<b$，$b<c$，则$a<c$．

那末称M为有序集．

例如，自然数集，直线上的点集都是有序集．

空集被看为有序集．

二、集合的关系

设有集合A、B，若A的每个元素都属于B，则称A是B的子集，B是A的扩集，记作$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$，读作A被包含在B内或B包含A．显然，对于任何集合A，有$A\subseteq A$，$O\subseteq A$．

若$A\subseteq B$，且B至少有一个元素不属于A，则称A为B的真子集，B为A的真扩集（图1.1）

记作$A\subset B$或$B\supset A$，读作A被真包含在B内，或B真包含A.例如，太原市中学数学教师的集合是太原市中学教师的集合的真子集，有理数集是实数集的真子集。

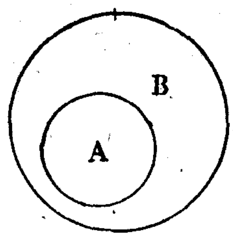


图1.1

若集合A和集合B的元素完全相同，即A的每个元素都属于B，B的每个元素都属于A，则称A和B相等，记作$A=B$，也就是说：若$A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则$A=B$。例如等边三角形的集合与等角三角形的集合相等，正整数集和自然数集相等。

显然，对于任何集合A，有A＝A。由此可知，集合是由它的元素所唯一确定的，与元素的顺序无关，例如$\{1,2,3,4\}=\{4,3,2,1\}=\{3,2,4,1\}$等等。

习 题 一

一、指出下列集合里的元素。

1． 山西省图书馆的书本的集合；

2． 太原市中小学校的集合；

3． 某果树场里果树的集合；

4． 能被5整除的数的集合；

5． 10的整数次幂的集合；

6． 实数对(a,b)的集合；

7． 平面上点的平移变换的集合。

二、举出两个集合的例子，并指出每个集合里的元素各是什么。

三、指出下列集合的两个真子集

1． 自然数集；

2． 平面上直线的集合；

3． $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$；

4． 有理系数一元二次方程的集合。

四、$B\not\subset A$（即B不被真包含于A内），$B\subseteq A$，什么时候才能成立？

第二节 集合的运算

一、交 集

设有两个集合A和B。由A、B的所有公共元素（即既属于A又属于B的所有元素）组成的集合C叫做A和B的交集（或通集），记作$C=A\cap B$（图1.2）

例1 若A＝矩形的集合，

B＝菱形的集合，

则$A\cap B$＝正方形的集合。

例 2　若A＝4的倍数的集合，

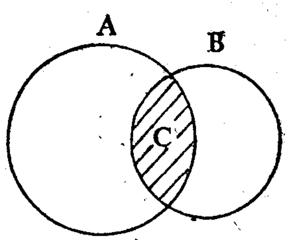
B＝6的倍数的集合，

则$A\cap B=12$（4和6的最小公倍数）的倍数的集合。

显然，对于任何集合，有$A\cap A=A, A\cap O=O$。

当$A\subseteq B$时，有$A\cap B=A$。

类似地可以定义任意多个集合的交集，集合$A_1, A_2, \cdots \cdots A_n$的交集记作$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。

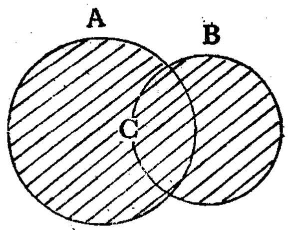


C＝A∩B

图1.2

二、并　集

设有两个集合A和B。由至少属于A、B之一（即或者属于A，或者属于B，或者同时属于A和B）的所有元素组成的集合C，叫做A和B的并集（或和集），记作$C=A\cup B$。（图1.3）



C＝A∪B

图1.3

例 1　若$A=\{a,b,c,d\}$，

$B=\{c,d,e,f\}$，

则　$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$

例 2　若A＝满足$0\leqslant x\leqslant 2$的一切实数x的集合，B＝满足$1\leqslant x\leqslant 3$的一切实数x的集合，则$A\cup B$＝满足$0\leqslant x\leqslant 3$的一切实数x的集合。

显然，对于任何集合A，有$A\cup A=A$，$A\cup O=A$，当$A\subseteq B$时，有$A\cup B=B$。

类似地可以定义任意多个集合的并集，$A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$的并集记作$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。

三、补　集

设有两个集合A和B。由属于A而不属于B的所有元素组成的集合C叫做A与B的补集（或差集）记作$C=A\setminus B$，（图1.4）

例 1　若$A=\{1,2,3,4,5\}$，

$B=\{4,5,6,7,8\}$，

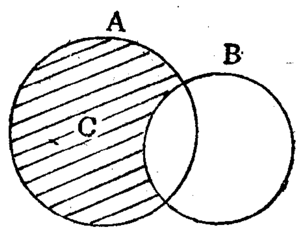
则　$A\setminus B=\{1,2,3\}$。

例 2　若A＝矩形的集合，B＝菱形的集合，

则　$A\setminus B$＝不等边矩形的集合，$B\setminus A$＝不等角菱形的集合。

显然，当$A=B$时，有$A\setminus B=O$。

如果　$A\supseteq B$，那末，补集$A\setminus B$称为B在A中的余集记作



C＝A∖B

图1.4

C_AB.（图1.5）

例若$A=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$,

$B=\{2,4,6,\cdots\cdots\}$,

则 $C_AB=\{1,3,5,\cdots\cdots\}$.

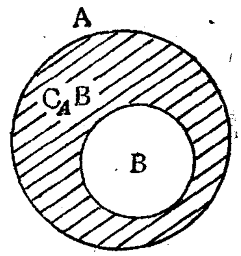


图1.5

四、性　质

集合的交与并满足下列性质：

（1）交换律

$A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$.

（2）结合律

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

（3）分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$（交对于并的分配性）.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（并对于交的分配性）.

我们只证明最后一个等式：

设$x\in A\cup(B\cap C)$，则或者$x\in A$，或者$x\in B\cap C$.若$x\in A$，则由$A\subseteq A\cup B$，且$A\subseteq A\cup C$得$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$即$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.若$x\in B\cap C$则由$x\in B\subseteq A\cup B$，$x\in C\subseteq A\cup C$得$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

反过来，设$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则$x\in A\cup B$，且$x\in A\cup C$.当$x\in A$时，有$x\in A\cup(B\cap C)$，当$x\overline{\in}A$时，由$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$，必有$x\in B$和$x\in C$，因而$x\in B\cap C$故有$x\in A\cup(B\cap C)$.（证完）

关于余集性质，有以下重要的对偶原理：若A、B为S的子集，则

①并集的余集等于余集的交集（图1.6）

$S\diagdown(A\cup B)=(S\diagdown A)\cap(S\diagdown B)$,

②交集的余集等于余集的并集（图1.7）

$S\diagdown(A\cap B)=(S\diagdown A)\cup(S\diagdown B)$.

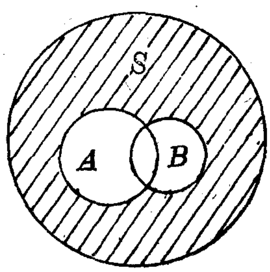


图1.6

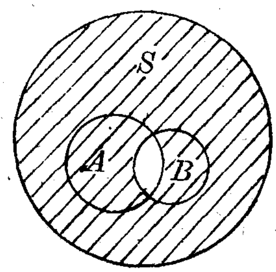


图1.7

习 题 二

一、证明：对于任何集合有

1. $A\cap B\subset A$;　　2. $A\cap B\subset B$;

3. $A\subset A\cup B$;　　4. $B\subset A\cup B$.

二、证明：如果$A\subseteq C$　那末$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$.

三、证明：

1. $(A\setminus B)\cap B=O$;

2. $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

第三节　等 价 集 合

一、一一对应

为了比较两个集合元素的多少，日常生活中我们常采用对应的方法，例如，电影院中座位的集合和某场观众的集合，当每一个观众都有一个座位而没有空座时，就能断定座位和观众一样多，这种对应方法广泛应用于数学中。

设有两个集合A、B，如果存在一个对应法则f使得，对于A中的每个元素都有B的唯一元素与它对应，而B中的每个元素都对应于A中的唯一元素，则称f为A与B的元素间的一一对应。（或A到B的一一对应）．

当$A=B$时，集合A到B的一一对应即A到自身的一一对应称为集合A的一一变换。

例 1　$A=$自然数集合，$B=$偶数集合，对应法则f为$n\to 2n$，即

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \cdots\cdots & 2n & \cdots, \end{array}$$

则f为A与B的一一对应。

例 2　$A=$平面上点的集合．

对应法则f：以平面上的直线l为对称轴的轴对称（图1．8），则f为A的一个一一变换。

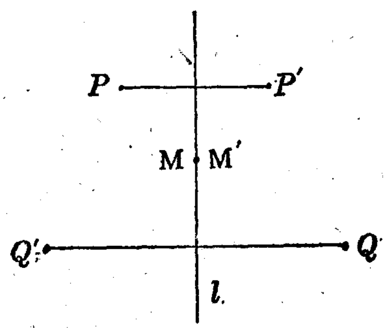


图1．8

二、等价集合

如果两个集合A、B的元素间可以建立一一对应，则称A、B为等价集合，或A与B等价，记作$A\sim B$。

例如，

①电影院的座位的集合与座号的集合等价；

②某校学生的集合与学号的集合等价；

③奇数的集合与偶数的集合等价；

④两个同心元上的点的集合等价；

⑤实数的集合与数轴上点的集合等价。

判定两个集合是否等价，我们不必知道每个集合里元素个数是多少，只要有条件确定这两个集合的元素能够一一对应就可以了。对于等价的两个集合，我们可以说它们的元素个数一样多或有相同的势（浓度）。

集合的等价关系具有以下性质：

1. $A\sim A$。（反身性）

2. 若$A\sim B$，则$B\sim A$。（对称性）

3. 若$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$。（传递性）

等价关系也应用于集合的元素。如果在集合M的元素之间，我们规定了一个关系，并且具有反身性、对称性、传递性，我们就称这个关系为等价关系，此时，称这个关系为M的等价关系。例如，平面上所有三角形组成的集合，它的元素间的全等、相似都是等价关系，但轴对称不是等价关系，因为轴对称不具有反身性和传递性。

三、分　　类

在一个集合中，根据某种关系把某些元素看成同一类，把另外一些元素看成不同类，使得每个元素都属于一类，每两类没有相同元素，这种划分叫做一个分类。

可以证明，一个集合的元素能进行分类的充分必要条件*是有一个等价关系，也就是说，假如集合M有一个等价关系，所有与一个元素等价的元素组成的集合叫做一类，那末M就能分成若干个没有公共元素的类而无剩余；反之，假如M能分成若干个没有公共元素的集合而无剩余，那末元素在同一类这个关系就是等价关系。（证明略）

因此，一个集合，如果有一个等价关系，它就有一种分类，反过来，如果它有一种分类，它就有一个等价关系。

例如，在整数集中，我们规定，若$a-b$能被m（m为大于1的自然数）整除，则称a与b对模m同余（或对于模数m，a与b同余），用记号$a\equiv b(mod\ m)$或$a\equiv b\ (m)$表示。那末，同余关系就是一种等价关系，根据这个关系，就可以将整数集分成若干类，同一类中的两个数被m去除有相同余数。而不同类的两个数被m去除有不同余数，这些类叫做对于模数m的剩余类。如果某一个类是由用m去除后余数为r的那些数组成，那末这个类用符号Cr表示，于是我们得到以m为模的剩余类共有m个：$C_0, C_1, C_2, \cdots\cdots C_{m-1}$，当$m=2$时，将整数集分为偶数集与奇数集两大类。

对集合的元素进行分类的方法，也适用于对许多集合进行分类，也就是说，根据一一对应建立的集合的等价关系，可以将各种集合进行分类，集合的分类是产生自然数概

---

* 在A⇒B中，A叫做B的充分条件，B叫做A的必要条件。若同时有A⇒B和B⇒A，则A叫做B的充分必要条件（简称充要条件），同时，B也叫做A的充要条件。

念的基础。

习 题 三

一、判断下列集合是否等价：

1.半元上点的集合与直径上点的集合；

2.梯形上底边上的点的集合与下底边上点的集合；

3.{ 0 ,1 } 与 { 关、开 }；

4.偶数集与自然数集。

二、试建立自然数集与整数集的元素间的一一对应。

三、证明，整数集中，对m(m为大于 1 的自然数)同余是一个等价关系。

第四节 群、环、体简介

一、代 数 运 算

我们知道，数的运算（例如加减乘除）在定义上和性质上有许多相同之处，仿此，对于任意集合的元素也建立运算的一般概念：

设有一个集合M，若有一个确定的法则，对于M中按一定顺序取出的每一对 元 素a和b，有M中唯一的元素c与它们对应，则这一法则叫做集合M内的一个代数运算（或结合法），记作$aob=c$。此时，我们也说集合M对于这个代数运算是封闭的，或这个代数运算在集合M内可以实施。

例如，①在整数集中，加法是一个代数运算，而除法不是代数运算。

②在正整数集中，对于两个正整数a与b，令$c=a^b$与它们对应，这样规定 的法 则是正整数集的一个代数运算记作$aob=a^b$。

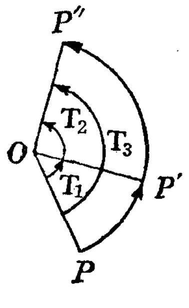


图1.9

③平面上的点，绕定点O的所有旋转变换组成的集 合中，将连续施行的两次旋转T_1,T_2看为一次旋转T_3，则这种旋转的合成(图1.9)可看为绕点O旋转变换集合的一个代数运算：

$$T_1 o T_2 = T_3.$$

设o是集合M的一个满足交换律的代数运算，若 是 对于M的任意一对元素a、b来说方程$aox=b$在M中有唯一解，那末就 说，代 数 运算o有一个逆运算.例如整数集中加法有逆运算——减法。

具有适合某些法则的代数运算的一个集合叫做一个代数系统。

在同一个集合内，可以给定一个或多个代数运算，使它们满足某些性质，这就得到不同的代数系统。下面，我们介绍三个代数系统，即近世代数中的三个基本概念：群、环、体。

二、群

设有一个非空集合G，如果在它里面定义了一个代数运算（通常称作乘法）：对于G的每两个元素a和b，这运算相应地确定一个属于G的元素（称作a和b的积），记作ab，并且这个运算具有以下性质：

（1）结合律：对于G中任意三个元素a，b，c有$a(bc)=(ab)c$。

（2）可逆律：对于G中任意两个元素a和b，方程$ax=b$和$ya=b$在G内有解.也就是说，在G内存在至少一个元素c和一个元素d，使得$a\cdot c=b$，$d\cdot a=b$。

那末，集合G叫做一个群。

一个群的代数运算若满足交换律：即对于任意二元素a，b有$ab=ba$，则称此群为可换群。

如果一个可换群的代数运算称为加法(用符号“+”表示)，那末，此群称为加群。

若一个群的元素个数是有限的，则称此群为有限群。

例1 整数集，有理数集对于普通加法都构成可换群（加群），而对于普通乘法都不是群.因为$0\cdot x=1$无解，但有理数集中去掉数0以后，对于普通乘法是一个可换群。

例2 平面上绕定点0的所有旋转关于旋转合成法构成一个可换群，叫做平面旋转群。

例3 集合$\{1,-1\}$对于普通乘法构成一个群。

例4 单元素集$\{1\}$对于普通乘法构成一个群。

在任一群G内必存在一个唯一的元素e(称作单位元)，对于任一元素a必存在唯一的元素a^{-1}（称作a的逆元），满足

$$ae=ea=a$$

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e$$

可以证明，有一个代数运算的集合G成群的充分必要条件是运算满足结合律且有单位元和每个元素的逆元。

三、环

设有一个非空集合R，如果在它里面定义了两个代数运算：加法和乘法。加法：对于R中每两个元素a和b相应地规定了叫做该二元素的和$a+b$；乘法：对于R的每两个元素a和b相应地规定了叫做该二元素的积ab，并且这些运算具有以下性质：

（1）（加法交换律）$a+b=b+a$；

（2）（加法结合律）$a+(b+c)=(a+b)+c$；

（3）（加法可逆律）对于R的任意两个元素a和b，方程$a+x=b$有（至少一个）解，就是说存在元素$c\in R$，使$a+c=b$（称c为b减a的差，记作$b-a=c$）；

（4）（乘法结合律）　$a(bc)=(ab)c$；

（5）（乘法对加法的分配律）$(a+b)c=ac+bc$