数理化生园地

10

1984/6

上海科学技术出版社

数理化生园地

10

(1984/6)

上海科学技术出版社出版
新华书店上海发行所发行
(上海市瑞金二路四五〇号)
上海商务印刷厂印刷

统一书号：13119·1193
定　　价：0.20元

吴定华 (上海市奉贤县奉贤中学)

我们先来看一个问题:

[例 1] 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$, 求数列的通项 a_n.

这里 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$ 是递推公式, 它所表示的数列是递归数列, 已知递推公式, 如何求数列的通项公式呢? 下面我们介绍几种解法.

1. 归纳法

首先, 根据首项和递推公式, 可以写出数列的前几项, 然后观察它们的规律, 归纳得出数列的通项公式.

$$a_1=3,$$

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+3=\frac{1}{2}\times3+3=3\left(1+\frac{1}{2}\right),$$

$$a_3=\frac{1}{2}a_2+3=\frac{1}{2}\times3\left(1+\frac{1}{2}\right)+3=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right),$$

$$a_4=\frac{1}{2}a_3+3=\frac{1}{2}\times3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)+3$$

$$=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)$$

……

依此类推, 我们可以得到

$$a_n=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=3\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

下面再用数学归纳法来证明这个公式的正确性.

(1) 当 $n=1$ 时, $a_1=3$, 公式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时, 公式成立, 即

$$a_k=6\left(1-\frac{1}{2^k}\right),$$

当 $n=k+1$ 时,

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+3=\frac{1}{2}\cdot 6\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+3$$

$$=6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right)=6\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

可见公式也成立. 这就证明了对于任意自然数 n, 都有

$$a_n=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

2. 消项法

由递推公式, 得

$$a_2-\frac{1}{2}a_1=3,\quad a_3-\frac{1}{2}a_2=3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{n-1}-\frac{1}{2}a_{n-2}=3,\quad a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}=3.$$

为了求出 a_n, 可以先设法消去 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$, 如何消去这些项呢? 分别用 $\frac{1}{2^{n-2}}, \frac{1}{2^{n-3}}, \cdots, \frac{1}{2}, 1$ 乘以上各式, 然后相加, 得

$$\frac{1}{2^{n-2}}\left(a_2-\frac{1}{2}a_1\right)+\frac{1}{2^{n-3}}\left(a_3-\frac{1}{2}a_2\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}a_{n-2}\right)+\left(a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-3}}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right),$$

即 $a_n-\frac{1}{2^{n-1}}a_1=3\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)$. 所以

$$a_n=3\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

这种解法的基本思想是将上述各式分别乘以适当的数，然后相加，消去中间各项，求出通项公式.

3. 阶差法

先求出这个数列相邻两项的差所组成的数列(即阶差数列)，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3,\quad a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+3,$$

两式相减，得 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$.

可见 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 $a_2-a_1=\frac{3}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

然后，求这个阶差数列的前 $n-1$ 项的和

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cdots+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-2}},$$

即
$$a_n-a_1=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right).$$

由此求得数列的通项公式

$$a_n=3\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

4. 换项法

将递推公式 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$ 两边分别减去6，得

$$a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6).$$

可见 $\{a_n-6\}$ 是首项为 $a_1-6=-3$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列. 则

$$a_n-6=(-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$a_n=6-3\times\frac{1}{2^{n-1}}=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

这种解法是把原来的数列通过适当的变形，转化为另一个容易求出通项公式的数列，然后再求原来数列的通项公式.

这些解法对于一些递归数列求通项公式是非常有用的. 下面我们再举几个较复杂的例子.

[例 2] 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+1}=-2a_n+3a_{n-1}$，求它的通项公式.

解 用阶差法来求.

递推公式 $a_{n+1}=-2a_n+3a_{n-1}$ 可以化为

$$a_{n+1}-a_n=-3(a_n-a_{n-1}),$$

可见 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 $a_2-a_1=3-2=1$，公比为 -3 的等比数列.

求这个数列的前 $n-1$ 项的和，得

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$
$$=1+(-3)+\cdots+(-3)^{n-2},$$

$$\therefore\quad a_n-a_1=\frac{1-(-3)^{n-1}}{4},$$

$$a_n=2+\frac{1-(-3)^{n-1}}{4}=\frac{9-(-3)^{n-1}}{4}.$$

[例 3] 已知数列

$$a_1=x-y,\quad a_2=x^2-xy+y^2,$$

$$a_n=(x-y)a_{n-1}+xya_{n-2}\quad(n\geqslant3),$$

求它的通项公式.

解 用归纳法来求.

$$a_1=x-y=\frac{x^2-y^2}{x+y},$$

$$a_2=x^2-xy+y^2=\frac{x^3+y^3}{x+y},$$

$$a_3=(x-y)\cdot\frac{x^3+y^3}{x+y}+xy(x-y)=\frac{x^4-y^4}{x+y},$$

$$a_4=(x-y)\cdot\frac{x^4-y^4}{x+y}+xy\cdot\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{x^5+y^5}{x+y},$$

依此类推,得 $$a_n=\frac{x^{n+1}-(-1)^{n+1}y^{n+1}}{x+y}.$$

下面用数学归纳法证明这个公式成立.

(1) 当 $n=1, 2$ 时,公式显然成立.

(2) 假设当 $n=k, k+1$ 时公式成立,即

$$a_k=\frac{x^{k+1}-(-1)^{k+1}y^{k+1}}{x+y},$$

$$a_{k+1}=\frac{x^{k+2}-(-1)^{k+2}y^{k+2}}{x+y}.$$

当 $n=k+2$ 时,

$$\begin{aligned}a_{k+2}&=(x-y)a_{k+1}+xya_k\\&=(x-y)\cdot\frac{x^{k+2}-(-1)^{k+2}y^{k+2}}{x+y}+xy\frac{x^{k+1}-(-1)^{k+1}y^{k+1}}{x+y}\\&=[x^{k+3}-x^{k+2}y-(-1)^{k+2}xy^{k+2}+(-1)^{k+2}y^{k+3}+x^{k+2}y\\&\quad-(-1)^{k+1}xy^{k+2}]\div(x+y)\\&=\frac{x^{k+3}-(-1)^{k+3}y^{k+3}}{x+y}.\end{aligned}$$

可见公式也成立．这就证明了对于任意自然数 n，公式都成立．

$$\therefore \quad a_n=\frac{x^{k+1}-(-1)^{k+1}y^{k+1}}{x+y}.$$

谈谈配方法（续）

左宗明　（江苏教育学院）

利用配方法证明不等式

要证明不等式 $A\geqslant B$，只要证明 $A-B\geqslant 0$．由于任何实数的平方非负，因此可用配方法把 $A-B$ 凑成完全平方式或几个完全平方式之和而得出证明．

［例 1］　证明不等式

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2. \qquad (1)$$

证明　考虑差

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2,$$

将括号展开后，化简得

$$a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2$$
$$-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_3b_1b_3-2a_2a_3b_2b_3,$$

适当集项、配方，就有

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\geqslant 0,$$

即　$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\geqslant 0,$

移项后，即得欲证之不等式(1)．

显然，不等式(1)中的等号，当且仅当

$$a_1b_2-a_2b_1=a_1b_3-a_3b_1=a_2b_3-a_3b_2=0,$$

即 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 时成立.

[例 2] 设实数 a、b、c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$, 试证

$$-\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ac\leqslant 1.$$

证明

$$1-(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

$$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)]$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad ab+bc+ca\leqslant 1. \tag{1}$$

$$2\left[(ab+bc+ca)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=2(ab+bc+ca)+1$$

$$=2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2$$

$$=(a+b+c)^2\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad ab+bc+ca\geqslant -\frac{1}{2}. \tag{2}$$

结合(1)式与(2)式的结论,即得所证.

利用配方法求函数的极值

如果 f 是一个包含变量的表达式, 并且只取实数值, A 是一个常数,那么一定有

$$f^2+A\geqslant A,\quad A-f^2\leqslant A.$$

于是,当 $f=0$ 时

(I) $A+f^2$ 取最小值 A, $A-f^2$ 取最大值 A;

(II) $\frac{1}{A+f^2}$ 取最大值 $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A-f^2}$ 取最小值 $\frac{1}{A}$ $(A\neq 0)$.

据此, 通过直接配方, 如果能把所讨论的函数的表达式变形为

$A\pm f^2$ 或 $\frac{1}{A\pm f^2}$，那么我们就能求出这个函数的最大值与最小值.

[例 1] 求函数 $y=\frac{1}{\cos^2 x-2\sin x+3}$ 的最大值与最小值.

解

$$\because\quad \cos^2 x-2\sin x+3=1-\sin^2 x-2\sin x+3$$
$$=5-(\sin x+1)^2,$$
$$\therefore\quad y=\frac{1}{5-(\sin x+1)^2}.$$

由 (II), 当 $f=\sin x+1=0\left(\text{即 } x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有最小值 $y_{最小}=\frac{1}{5}$; 又因为 $|\sin x+1|\leqslant|\sin x|+1\leqslant 2$, 而当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x+1=2$, 这时有最大值 $y_{最大}=1$.

[例 2] 求函数 $z=x^2+2xy+5y^2+2x-6y+7$ 的极值.

分析 先对 x^2+2xy 配方; 得 $(x+y)^2$ 后, 再将整个表达式看成字母$(x+y)$的二次三项式, 继续配方, 使表达式中除去完全平方项外剩下的部分只含 y 的项; 再对 y 的项配方, 把函数表为

$$z=(x+y+a)^2+b(y+c)^2+d.$$

解

$$\begin{aligned}z&=(x^2+2xy+y^2)+4y^2+2x-6y+7\\&=(x+y)^2+2(x+y)+4y^2-8y+7\\&=[(x+y)^2+2(x+y)+1]+4y^2-8y+6\\&=(x+y+1)^2+4(y^2-2y+1)+2\\&=(x+y+1)^2+4(y-1)^2+2.\end{aligned}$$

故当 $x+y+1=0$、$y-1=0$ 时, 即 $x=-2$、$y=1$ 时, 函数有极小值.

$$z_{极小}=2.$$

说明 一般的二元二次函数，通过上述配方，如能变形为

$$z=a(x+by+c)^2+d(y+e)^2+f,$$

使 a 与 d 同号，则此函数必有极值，且当 a, $d>0$ 时，函数有极小值 $z_{极小}=f$；而当 a, $d<0$ 时，函数有极大值 $z_{极大}=f$.

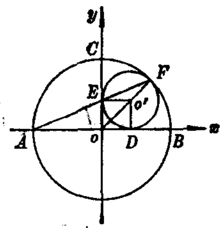
二项式配方的基本类型虽然十分简单，但它的应用却十分广泛. 上面仅仅介绍了它的一些主要应用，其他方面的应用，限于篇幅，这里就不一一列举了.

用解析法证明三点共线

于志洪　（江苏省泰州橡胶总厂职中）

本文拟通过一道例题，将解析法证明三点共线的六种主要方法归纳如下，以供参考.

题目 已知：⊙O 的直径 AOB 和半径 OC 互相垂直，又⊙O' 和 OB、OC 相切于 D、E，并与⊙O 内切于 F. 求证：A、E、F 三点共线.



证明 先建立平面直角坐标系（如图），然后求出 A、E、F 三点的坐标. 设⊙O 的半径为 R，⊙O' 的半径为 r，则 A 点坐标为 $(-R,0)$. ∵ $OD=O'D=O'E=r$, $O'D\perp OD$, ∴ $OO'=\sqrt{2}r$, 且

$$\angle O'OD=45°.$$

又∵⊙O' 和⊙O 相内切，∴ O、O'、F 三点共线，因为

$$OO'=R-r=\sqrt{2}r,$$

所以：
$$r=\frac{R}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)R.$$

因此 E 点坐标为：$[0,(\sqrt{2}-1)R]$．又 $\because OF=R$，$\therefore F$ 点坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}R}{2},\ \frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$.

接下来，我们用不同的方法证明三点共线.

方法一 证明：$K_{AE}=K_{AF}$.

$$\because\quad K_{AE}=\frac{(\sqrt{2}-1)R-0}{0+R}=\sqrt{2}-1,$$

$$K_{AF}=\frac{\frac{\sqrt{2}R}{2}-0}{\frac{\sqrt{2}R}{2}+R}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=\sqrt{2}-1.$$

$\therefore K_{AE}=K_{AF}$，$\therefore AE\parallel AF$，又 AE、AF 都经过同一点 A，故 AE、AF 重合，$\therefore A$、E、F 三点共线.

方法二 证明：$|AE|+|EF|=|AF|$.

$$\because\quad |AE|=\sqrt{R^2+(\sqrt{2}-1)^2R^2}$$
$$=\sqrt{4-2\sqrt{2}}\,R=\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\,R,$$

$$|EF|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}+1\right)^2R^2}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R,$$

$$|AF|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2R^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2}$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,R.$$

$$\therefore\quad (|AE|+|EF|)^2$$
$$=(4-2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}+2\sqrt{2(2-\sqrt{2})^2})R^2$$
$$=(6-3\sqrt{2}+4\sqrt{3-2\sqrt{2}})R^2$$
$$=[6-3\sqrt{2}+4(\sqrt{2}-1)]R^2$$
$$=(2+\sqrt{2})R^2=|AF|^2,$$

即 $|AE|+|EF|=|AF|$.

因此 A、E、F 三点共线.

方法三 证明：直线 AE 和 AF 的方程相同.

∵ 直线 AE 的方程是

$$\frac{y-0}{x+R}=\frac{(\sqrt{2}-1)R-0}{0+R},$$

即 $$(\sqrt{2}-1)x-y+(\sqrt{2}-1)R=0;$$

又 ∵ 直线 AF 的方程是

$$\frac{y-0}{x+R}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}R-0}{\frac{\sqrt{2}}{2}R+R},$$

即 $$(\sqrt{2}-1)x-y+(\sqrt{2}-1)R=0.$$

∴ 直线 AE、AF 的方程相同.

故 A、E、F 三点共线.

方法四 先求出过三点中任意两点（不妨设 A、E）的直线方程，再证明第三点（F）的坐标适合此方程.

由方法三已求得直线 AE 的方程为：

$$(\sqrt{2}-1)x-y+(\sqrt{2}-1)R=0,$$

再将 $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R,\ \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$ 点的坐标代入上述方程，得：

$$(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R-\frac{\sqrt{2}}{2}R+(\sqrt{2}-1)R$$

$$=R-\frac{\sqrt{2}}{2}R-\frac{\sqrt{2}}{2}R+\sqrt{2}R-R=0;$$

∴ F 点的坐标满足直线 AE 的方程，故 A、E、F 三点共线.

方法五 先建立过 A、E 两点的直线方程，再证明 F 到直

线 AE 的距离为零.

由方法三，已知直线 AE 的方程为

$$(\sqrt{2}-1)x-y+(\sqrt{2}-1)R=0,$$

$\therefore F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R,\ \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)$点到直线 AE 的距离

$$d=\frac{\left|(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R-\frac{\sqrt{2}}{2}R+(\sqrt{2}-1)R\right|}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|0|}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}=0,$$

故 A、E、F 三点共线.

方法六 应用三点共线的充要条件证明. 三点共线的充要条件是:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

$$\because \begin{vmatrix} -R & 0 & 1 \\ 0 & (\sqrt{2}-1)R & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}R & \frac{\sqrt{2}}{2}R & 1 \end{vmatrix}$$

$$=R^2-\sqrt{2}R^2+\frac{\sqrt{2}}{2}R^2-R^2+\frac{\sqrt{2}}{2}R^2$$

$$=0,$$

$\therefore$ A、E、F 三点共线.

关于解析法证三点共线的问题，主要就是前述六种主要方法. 证明时，首先要建立适当的坐标系，再根据命题的条件，结合图形，应用有关公式和方程求出三个点的坐标，利用上述方法证明即可.

若要证明四点(如 A、B、C、D)共线，其办法是：先证明任意三点(如 A、B、C)共线，再证明第四点 D 的坐标满足点 A、B、C 所在的直线方程即可.

若要证明四个以上的点共线，可仿照证明四点共线的方法进行.

一字之差的两个物理概念

吴顺章（浙江教育学院）

在学习物理学的过程中，经常会见到仅有一字之差的两个概念，例如，速度与速率；时间与时刻等等．表面看来只有一字之差，但却有本质的区别，必须弄清它们的联系和区别．动能与动量也一样.

(一)动能和动量都是用来表示物体运动状态的物理量.

平时我们常用速度这个概念来描述物体的运动状态．既然速度可以表征物体的运动状态，为什么又要引入“动能”和“动量”这两个物理量呢？因为物体的运动状态的含义是很深刻的，不仅是指物体是静止的还是运动的，所以只用速度就不够了．当质量不同的两个物体虽然有相同的速度，但它们具有的作功本领就不同．例如：一粒步枪子弹和一颗炮弹，如以同样的速度去射击目标，它们击穿目标的深度就大不相同．又如：质量不同的两个物体，在相同的冲量作用下，它们得到的速度虽然不同，但它们各自的质量与速度的乘积大小却相同．由此可知，必须引入新的概念，才能全面描述物体的运动状态.

(二)动能与动量有哪些区别呢？

1．动能与动量的量度方法不同

一个运动着的物体具有动能，动能的大小等于物体的质量和它的速度平方乘积的一半，即 $\frac{1}{2}mv^2$，它的单位是焦耳.

一个运动着的物体具有动量，动量的大小等于物体的质量和它的速度的乘积，即 mv，它的单位是牛顿·秒.

2．动能是标量，动量是矢量

一个运动着的钢球以速度 v 沿水平方向与坚硬的墙壁相碰，碰撞后钢球以同样的速率向反方向弹回来．问碰撞前后它的动能和动量各自变化了多少呢？

先计算它的动能变化，碰撞前的动能是 $\frac{1}{2}mv^2$，碰撞后的动能仍旧是 $\frac{1}{2}mv^2$，因此，它的动能变化为零.

其次计算它的动量变化，碰撞前的动量是 mv，碰撞后的动量是 $m(-v)$，因此，它的动量变化为 $m(-v)-mv=-2mv$.（负号表示与原来速度的方向相反）

3．动能与功密切联系，动量与冲量密切联系

一辆正在行驶的汽车，当它关闭发动机后，由于它具有动能，可以继续前进，同时它受到地面阻力的作用，速度就逐渐变为零，使汽车停了下来．它的动能克服阻力而作了功，此时动能决定了物体反抗阻力能够"运动多远"．这说明物体动能的变化与外力作功密切联系着，所以说，动能是力的位移（空间）积累效应.

同样是这辆汽车，当它突然与一建筑物相碰撞而停止，这是由于受到冲量的作用而使它的动量变为零，此时动量决定了反抗阻力能够"运动多久"．这说明物体的动量变化与作用于它的冲量密切联系着，所以说，动量是力的时间积累效应.

4．动能不一定守恒，动量守恒

一个物体的动能与重力势能可以互相转化，这是通过重力作功实现的；它的动能与弹性势能也可以互相转化，这是通过弹力作功实现的．如果除了重力和弹力以外，没有其他外力(如摩擦力)对运动物体做功，或物体对外作功，则机械能是守恒的．如果还有摩擦力存在，则机械能就不守恒了，其中有一部分变成了其他形式的能(如热能)．

当两个物体相碰时，只要不受外力作用(或合外力等于零)，则不论是弹性碰撞，还是非弹性碰撞，相碰两个物体的总动量总是守恒的．

综上所述，同学们大致可以了解动能与动量之间的联系和区别，但请你自己想一想它们的适用条件和范围，切不要生搬硬套．

左右手定则的运用

屠传忠　(上海市静安区第三业余中学)

怎样运用左、右手定则，对不少初学电和磁的同学来说，虽然下了一点工夫，效果也许并不理想，关键是用哪一只手搞不清，他们想用"确定电流方向用右手"、"确定受力方向用左手"这样简单的结论来处理问题是行不通的，特别在考试时稍一紧张，左、右手更是混淆不清了．要解决这个问题必须了解人们对电和磁的联系的认识过程，首先，发现电流周围存在磁场，以后进一步发现了磁场对电流有作用力，最后才利用磁场来产生电流．"右——左——右"这三个阶段和同学们学习课本时的先后顺序是一致的，一般来说是能记住的．在具体解题时则应搞清题目是属于哪一个阶段的问题．如果是确定电流和它产生的磁场间的关系，那是第一阶段的问题，则不管是确定电流方向还是磁场